ческие разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. 4. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Успехи матем. наук, 1957, № 5. 5. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964.

Стаття надійшла в редколегію 20.09.80

УДК 517.946

В.М.Цимбал

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНЕ РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

В області $D_T = \{0 \le x \le \ell, 0 \le t \le T\}$ розглянемо таку задачу:

$$L_\varepsilon u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t)u = f(x,t), \qquad /1/$$

$$u(0,t,\varepsilon) = 0,\ \frac{\partial u(0,t,\varepsilon)}{\partial x} = 0,\ u(\ell,t,\varepsilon) = 0,\ u(x,0,\varepsilon) = 0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Умови однозначної розв"язності задачі /1/, /2/ без параметра встановлені у праці [ ].

Якщо в /1/ формально прийняти $\varepsilon = 0$, то одержимо гіперболічне рівняння. Виродження параболічного рівняння другого порядку в гіперболічне першого порядку, а також узагальнення на параболічне рівняння будь-якого парного порядку вже досліджено.

Побудуємо асимптотичний розклад до деякого порядку N по степенях малого параметра ε розв"язку задачі /1/, /2/. При цьому використовуємо метод примежового шару [1].

Припускаємо, що виконуються умови:

1/ $a(x,t) > 0$ в D_T;

2/ функції $a(x,t)$, $b(x,t)$, $f(x,t)$ достатньо гладкі в D_T для проведення подальших викладок;

3/ $\dfrac{\partial^{i+j} f(0,0)}{\partial x^i \partial t^j} = \dfrac{\partial^{i+j} f(\ell,0)}{\partial x^i \partial t^j}$ $(i = 0,\dots,N+1;\ i+j = 0,\dots,N+1)$.

Асимптотичний розклад розв"язку задачі /I/, /2/ шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)+\varepsilon\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(\xi,t)+\sum_{i=0}^{N+1}\varepsilon^iQ_i(\eta,t)+\varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /3/$$

де $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$, $\eta=\frac{l-x}{\varepsilon}$. Всі функції, що входять у /3/, визначені нижче.

Рівняння для знаходження регулярної частини асимптотики $\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)$ дістаємо, виконуючи стандартну процедуру методу збурень

$$\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x}+b(x,t)\bar{u}_i=f_i(x,t) \quad (i=0,\dots,N), \qquad /4/$$

де $f_0(x,t)\equiv f(x,t)$, $f_1(x,t)\equiv 0$, $f_i(x,t)=\frac{\partial^3\bar{u}_{i-2}}{\partial x^3}$ $(i=2,\dots,N)$.

Опишемо, як одержати рівняння для визначення $\Pi_i(\xi,t)$. В операторі L_ε зробимо регуляризуюче перетворення $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$ і розкладемо всі коефіцієнти у скінченні строки Тейлора в околі $x=0$. Визначений таким чином оператор позначимо M_ε. Зрівнюючи в $M_\varepsilon(\varepsilon\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(\xi,t)=0$ коефіцієнти при однакових степенях ε, дістаємо рівняння для визначення $\Pi_i(\xi,t)$ $(i=0,\dots,N)$.

$$\frac{\partial^3\Pi_i}{\partial\xi^3}-a(0,t)\frac{\partial\Pi_i}{\partial\xi}=F_i(\xi,t), \qquad /5/$$

де $F_0(\xi,t)\equiv 0$, $F_i(\xi,t)$ $/i=1,\dots,N/$ лінійно виражаються через Π_j та їх похідні $(j<i)$.

Рівняння для знаходження $Q_i(\eta,t)$ $/i=0,\dots,N+1/$ одержуємо аналогічно /регуляризуюче перетворення в околі $x=l$, $\xi=\frac{l-x}{\varepsilon}$/

$$\frac{\partial^3Q_i}{\partial\eta^3}-a(l,t)\frac{\partial Q_i}{\partial\eta}=P_i(\eta,t), \qquad /6/$$

де $P_0(\eta,t)\equiv 0$, $P_i(\eta,t)$ $/i=1,\dots,N+1/$ явно виражаються через $Q_j(\eta,t)$ $(j<i)$ та їх похідні.

Для визначення умов, за яких слід розв"язувати /4/, /5/, /6/, враховуємо, що $u(x,t,\varepsilon)$, яке записується у вигляді /3/, повинна задовольняти граничним і початковим умовам /2/. Маємо

$$\bar{u}_i(0,t) = -\Pi_{i-1}(0,t),\ \bar{u}_i(x,0) = 0\ (i = 0,\ldots,N), \qquad /7/$$

де

$$\Pi_{-1}(\xi,t) \equiv 0;$$

$$\frac{\partial \Pi_i(0,t)}{\partial \xi} = -\frac{\partial \bar{u}_i(0,t)}{\partial x};\ \Pi_i(\xi,t) \xrightarrow[\xi \to \infty]{} 0\ (i = 0,\ldots,N); \qquad /8/$$

$$Q_i(0,t) = -\bar{u}_i(l,t),\ Q_i(\eta,t) \xrightarrow[\eta \to \infty]{} 0\ (i = 0,\ldots,N+1); \qquad /9/$$

$$\bar{u}_{N+1} \equiv 0.$$

Зауважимо, тут ще враховано, що $\Pi_i(\xi,t)$ і $Q_i(\eta,t)$ – функції, які ліквідують нев"язку в околі відповідної сторони прямокутника D_T і, як легко далі безпосередньо перевірити, враховуючи умови 3/, $Q_i(\eta,0) = 0$ / $i = 0,\ldots,N+1$ /, $\Pi_i(\xi,0) = 0$ / $i = 0,\ldots,N$ /.

Отже, ми одержали рекурентний процес визначення функцій, що входять у /3/. Їх визначають у порядку $\bar{u}_0(x,t)$, $\Pi_0(\xi,t)$, $Q_0(\xi,t)$, $\bar{u}_1(x,t)$ і т.д. $\bar{u}_i(x,t)$ / $i = 0,\ldots,N$ / є розв"язками змішаних задач для гіперболічних рівнянь /4/, /7/. Задачу /4_0/, /7_0/ назвемо виродженою. Легко перевірити, що необхідні для однозначної розв"язності цих задач умови узгодженості у точці $(0,0)$ випливають з 3/; розв"язки можна одержати методом характеристик [4].

$\Pi_i(\xi,t)$ / $i = 0,\ldots,N$ / – розв"язки задач / 5/, /8/ для звичайних диференціальних рівнянь / t – параметр/. Серед коренів характеристичного рівняння $\lambda^3 - a(0,t)\lambda = 0$ наявний рівно один від"ємний корінь, а саме $\lambda = -\sqrt{a(0,t)}$. При переході до виродженої задачі на лівій границі прямокутника D_T випадає гранична умова. Отже, кількість коренів характеристичного рівняння з від"ємною дійсною частиною збігається з кількістю граничних умов, що випадає при переході до виродженої задачі, тобто виродження регулярне [I]. Міркуючи аналогічно [I], легко показати, що $\Pi_i(\xi,t)$- функції типу примежового шару в околі правої границі прямокутника D_T.

Для визначення $R_N(x,t,\varepsilon)$ одержуємо задачу, аналогічну задачі /I/, /2/. Методом інтегралів енергії [3] дістаємо оцінку

$$\| R_N(x,t,\varepsilon) \|_{L_2(D_T)} \leq C,$$

де константа C не залежить від ε. Що і доводить асимптотичну коректність розкладу /3/.

Результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. При виконанні умов I/ – 3/ розв"язок задачі /I/, /2/ допускає асимптотичний розклад /3/, де $\bar{U}_i(x,t)$, $\Pi_i(\xi,t)$, $Q_i(\eta,t)$ визначаються рекурентно і є розв"язками відповідно задач /4/, /7/; /5/, /8/; /6/, /9/. Π – функції – функції типу примежового шару в околі лівої границі прямокутника D_T, Q – функції – функції типу примежового шару в околі правої границі прямокутника D_T.

Список літератури: I. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Успехи матем. наук, 1957, т.12, № 5. 2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. –Ташкент: Фан, 1979. 3. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. 4. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.

Стаття надійшла в редколегію 9.09.80

УДК 517.917

Л.М.Лісевич

ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНОГО ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Відомо, що обмежений неозначений інтеграл від майже періодичної /м.п./ функції Бора є знову м.п. функцією Бора [2] і обмежений неозначений інтеграл від S^p – майже періодичної /S^p – м.п./ функції також м.п. функція Бора [1].