Для визначення $R_N(x,t,\varepsilon)$ одержуємо задачу, аналогічну задачі /1/, /2/. Методом інтегралів енергії [3] дістаємо оцінку

$$\| R_N(x,t,\varepsilon) \|_{L_2(D_T)} \leqslant C,$$

де константа C не залежить від ε. Що і доводить асимптотичну коректність розкладу /3/.

Результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. При виконанні умов 1/ – 3/ розв"язок задачі /1/, /2/ допускає асимптотичний розклад /3/, де $\bar{U}_i(x,t)$, $\Pi_i(\xi,t)$, $Q_i(\eta,t)$ визначаються рекурентно і є розв"язками відповідно задач /4/, /7/; /5/, /8/; /6/, /9/. Π – функції – функції типу примежового шару в околі лівої границі прямокутника D_T, Q – функції – функції типу примежового шару в околі правої границі прямокутника D_T.

Список літератури: 1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Успехи матем. наук, 1957, т.12, № 5. 2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. –Ташкент: Фан, 1979. 3. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. 4. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.

Стаття надійшла в редколегію 9.09.80

УДК 517.917

Л.М.Лісевич

ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНОГО ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Відомо, що обмежений неозначений інтеграл від майже періодичної /м.п./ функції Бора є знову м.п. функцією Бора [2] і обмежений неозначений інтеграл від S^p – майже періодичної / S^p – м.п./ функції також м.п. функція Бора [1].

Розглянемо випадок, коли неозначений інтеграл від м.п. функції $f(x)$ має вигляд

$$\int_0^x f(t)dt = cx + g(x), \qquad /1/$$

де C - стала; $-\infty < x < +\infty$.

<u>Лема.</u> Якщо $f(x)$ S^p - м.п. і $g(x)$ обмежена на всій дійсній осі функція, то $g(x)$ м.п. функція Бора.

<u>Доведення</u>. Запишемо рівність /1/ у вигляді

$$\int_0^x [f(t)-c]\,dt = g(x). \qquad /2/$$

Функції $f(x)-C$ як сума двох S^p - м.п. функцій - це знову S^p - м.п. функція. Якщо тепер $g(x)$ - обмежена, то вона м.п. функція Бора, як обмежений неозначений інтеграл від S^p - м.п. функції.

Узагальнимо результат праці [3] на випадок рівняння

$$\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{dy}{dx}\right] = \varphi(x)y + \psi(x). \qquad /3/$$

<u>Теорема.</u> Нехай

1/ $K(x)$ - м.п. функція Бора така, що

$$0 < a^2 < K(x) < b^2, \qquad /4/$$

$$\int_0^x \frac{dt}{K(t)} = cx + g(x), \qquad /5/$$

де C - стала, а $g(x)$ - обмежена функція, $/-\infty < x < +\infty/$;

2/ $\varphi(x)$ - м.п. функція Бора така, що

$$0 < \alpha^2 < \varphi(x) < \beta^2; \qquad /6/$$

3/ $\psi(x)$ - S^p - м.п. функція з обмеженим інтегралом

$$\omega(x) = \int_0^x \psi(t)dt. \qquad /7/$$

Тоді існує обмежений і м.п. за Бором розв"язок $y(x)$ рівняння /3/.

Доведення. Прийнявши

$$z = \int_0^x \frac{dt}{K(t)} = cx + g(x), \qquad /8/$$

$$\Phi(z) = K(x)\varphi(x), \quad \Psi(z) = K(x)\psi(x),$$

із /3/ отримуємо

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \Phi(z)y + \Psi(z). \qquad /9/$$

Вважатимемо, що $c > 0$.

У праці [3] показано, коли $\Phi(z)$ – .п. функція Бора така, що $0 < A^2 < \Phi(z) < B^2$, а $\Psi(z)$ – S^p – м.п. функція з обмеженим неозначеним інтегралом

$$\int_0^z \Psi(t)\,dt,$$

то існує обмежений і м.п. розв"язок $y(z)$ рівняння /9/.

Нам залишилося довести, що із м.п. за Бором розв"язку $y(z)$ рівняння /9/ випливає м.п. розв"язку $y(x)$ рівняння /3/.

Як і в праці [3] , розв"язок рівняння /9/ шукаємо у вигляді ряду

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(z), \qquad /10/$$

де

$$y_0(z) = -\frac{1}{2B}\left\{\int_z^{+\infty} e^{-B(u-z)}\Psi(u)\,du + \int_{-\infty}^{z} e^{B(u-z)}\Psi(u)\,du\right\}, \qquad /11/$$

$$y_n(z) = -\frac{1}{2B}\left\{\int_z^{+\infty} e^{-B(u-z)}F(u)y_{n-1}(u)\,du + \int_{-\infty}^{z} e^{B(u-z)}F(u)y_{n-1}(u)\,du\right\};$$

$$F(u) = \Phi(z) - B^2, \quad n = 1,2,\ldots, \quad (B^2 = \beta^2 b^2). \qquad /12/$$

Не порушуючи загальності, вважаємо, що $B>0$. Як показано у праці [3], ряд /10/ рівномірно збіжний для $-\infty<z<+\infty$.

Повертаючись тепер до змінної x , на основі співвідношення /8/ із /11/ отримуємо

$$y_0(x)=-\frac{1}{2B}\left\{\int_x^{+\infty} e^{-B[cv+g(v)-cx-g(x)]}\psi'(v)dv+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{x} e^{B[cv+g(v)-cx-g(x)]}\psi(v)dv\right\}.$$

Застосувавши тепер другу теорему про середнє значення, маємо

$$y_0(x)=-\frac{1}{2B}\left\{e^{Bg(x)}\int_x^{\theta_1} e^{-Bg(v)}\psi(v)dv+\right.$$

$$+e^{-Bg(x)}\int_{\theta_2}^{x} e^{Bg(v)}\psi(v)dv. \qquad /13/$$

Функції $g(x)$, $e^{Bg(x)}$, $e^{-Bg(x)}$ і $\omega(x)$ є м.п. за Бором функції, тому

$$\left|\int_0^x e^{Bg(t)}\psi(t)dt\right|\leq M|\omega(x)|<+\infty.$$

Звідси випливає м.п. за Бором інтегралів

$$\int_0^x e^{Bg(t)}\psi(t)dt,\quad \int_0^x e^{-Bg(t)}\psi(t)dt,$$

а, отже, м.п. за Бором $y_0(x)$.

Далі з /12/ при $n=1$ записуємо

$$y_1(z)=-\frac{1}{2B}\left\{\int_z^{+\infty} e^{-B(u-z)}F(u)y_0(u)du+\right.$$

$$+\int_{-\infty}^{z} e^{-B(u-z)}F(u)y_0(u)du.$$

Повертаючись до змінної x, отримуємо

$$y_1(x) = -\frac{1}{2B}\left\{\int_x^{+\infty} e^{-B[cv+g(v)-cx-g(x)]} F(v)\, y_0(v)\, \frac{dv}{K(v)} + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{x} e^{B[cv+g(v)-cx-g(x)]} F(v)\, y_0(v)\, \frac{dv}{K(v)}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2B}\left\{ e^{Bg(x)} e^{Bcx} \int_x^{+\infty} e^{-Bcv}\left[e^{-Bg(v)}\varphi(v)\right] y_0(v)\, dv + \right.$$

$$+ e^{-Bg(x)} e^{-Bcx} \int_{-\infty}^{x} e^{Bcv}\left[e^{Bg(v)}\varphi(v)\right] y_0(v)\, dv +$$

$$+ \frac{B}{2}\left\{ e^{Bg(x)} e^{Bcx} \int_x^{+\infty} e^{-Bcv} e^{-Bg(v)} y_0(v)\, \frac{dv}{K(v)} + \right.$$

$$\left. + e^{-Bg(x)} e^{-Bcx} \int_{-\infty}^{x} e^{Bcv} e^{Bg(v)} y_0(v)\, \frac{dv}{K(v)}\right\}.$$

Приймемо

$$T_1(x) = e^{Bcx} \int_x^{+\infty} e^{-Bcv}\left[e^{-Bg(v)}\varphi(v)\right] y_0(v)\, dv,$$

$$T_2(x) = e^{-Bcx} \int_{-\infty}^{x} e^{Bcv}\left[e^{Bg(v)}\varphi(v)\right] y_0(v)\, dv,$$

$$T_3(x) = e^{Bcx} \int_x^{+\infty} e^{-Bcv} e^{-Bg(v)} y_0(v)\, dv,$$

$$T_4(x) = e^{-Bcx} \int_{-\infty}^{x} e^{Bcv} e^{Bg(v)} y_0(v)\, dv.$$

Довівши м.п. за Бором функцій $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$, покажемо цим м.п. за Бором $y_1(x)$.

$$P_1(x) = e^{-Bg(x)}\varphi(x)\, y_0(x),$$

$$P_2(x) = e^{Bg(x)}\varphi(x)\, y_0(x),$$

$$P_3(x) = e^{-Bg(x)} \frac{y_0(x)}{K(x)},$$

$$P_4(x) = e^{Bg(x)} \frac{y_0(x)}{K(x}$$

є м.п. функції Бора як добуток м.п. за Бором функцій. Нехай $\tau = \tau(\frac{\varepsilon}{4})$ їх спільний $\frac{\varepsilon}{4}$ – майже період. Тоді

$$|T_1(x+\tau) - T_1(x)| =$$

$$= \left| e^{Bc(x+\tau)} \int_{x+\tau}^{+\infty} e^{-Bcv} P_1(v)dv - e^{Bcx} \int_x^{+\infty} e^{-Bcv} P_1(v)dv \right| \leq$$

$$\leq e^{Bcx} \int_x^{+\infty} e^{-Bcv} |P_1(v+\tau) - P_1(v)| dv < \frac{\varepsilon}{4Bc},$$

тобто $T_1(x)$ – м.п. за Бором функція.

Аналогічно показуємо, що $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$ м.п. функції Бора. Отже, $y_1(x)$ теж м.п. функція Бора.

Поступаючи аналогічно, можна показати, що $y_k(x)$ $/k=2,3,\ldots/$ м.п. функції Бора. Тоді рівномірно збіжний ряд

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

м.п. функція Бора, причому $y(x)$ є розв"язком рівняння /3/. Теорема доведена.

Список літератури: I. К о в а н ь к о А.С., Л и с е в и ч Л.Н. О некоторых свойствах интеграла и производной от S^p – почти периодической функции. – Вопросы математической физики и теории функций, 1964, № 2. 2. Л е в и т а н Б.М. Почти периодические функции. М., 1953. 3. Л і с е в и ч Л.М., К о с т ю к Я.П. Про майже періодичність розв"язків деяких звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з S^p – майже періодичною правою частиною. – ДАН УРСР, сер.А, 1971, № 1.

Стаття надійшла в редколегію 20.03.81