УДК 517.946

І.М.Колодій

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ГЕЛЬДЕРОМ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДУ З ВИРОДЖЕННЯМ

Доведемо неперервність за Гельдером узагальнених розв"язків рівнянь вигляду

$$u_t - \operatorname{div} A(x,t,u,u_x) = B(x,t,u,u_x), \qquad /1/$$

$$x=(x_1,\dots,x_n),\quad u_x=(u_{x_1},\dots,u_{x_n}),$$

$$A(x,t,u,u_x)=(A_1(x,t,u,u_x),\dots,A_n(x,t,u,u_x)).$$

Цей результат міститься у праці [1]. Зауважимо, що неперервність за Гельдером можна отримати як наслідок з нерівності Харнака [3]. Доведемо неперервність за Гельдером безпосередньо, не використовуючи нерівності Харнака.

Нехай Ω обмежена область в n -мірному евклідовому просторі E^n векторів $x=(x_1,\dots,x_n)$. Кулю $(x\in E^n;\ |x|<r)$ запишемо як $K(r)$. У просторі E^{n+1} векторів (x,t) через Q і $Q(r)$ позначаємо відповідно циліндри $\Omega\times(T_1,T_2)$, $K(r)\times(-r^2,0)$. Припустимо, що вектор-функція $A(x,t,u,\bar p)$ і функція $B(x,t,u,\bar p)$ для всіх значень $(x,t)\in Q$ і всіх значень u і $\bar p=(p_1,\dots,p_n)$ задовольняють умови

$$\begin{aligned}
&A(x,t,u,\bar p)\bar p \geq a_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|p_i|^2 - d(x,t)|u|^2 - g(x,t),\\
&|A(x,t,u,\bar p)| \leq a_2\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x,t)|p_i| + c(x,t)|u| + e(x,t),\\
&|B(x,t,u,\bar p)| \leq \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)|p_i| + h(x,t)|u| + f(x,t),
\end{aligned} \qquad /2/$$

де a_1, a_2 – додатні константи; $0\leq\lambda_i(x,t)\leq\mu_i(x,t)$; функції $d(x,t), g(x,t), e(x,t), b_i(x,t), h(x,t), f(x,t)$ – невід"ємні.

Вважаємо, що

$$\lambda_i^{-1}(x,t) \in L_{t_i,t_0}(Q), \qquad /3/$$

а функції

$$\mu_i(x,t),\ \mu_i^2(x,t)\lambda_i^{-1}(x,t),\ d(x,t),\ g(x,t),\ c^2(x,t)\mu_i^{-1}(x,t),$$

$$e^2(x,t)\mu_i^{-1}(x,t),\ b^2(x,t)\lambda_i^{-1}(x,t),\ h(x,t),\ f(x,t) \in L_{p,q}(Q), \qquad /4/$$

де

$$\frac{p}{q'} > \theta, \qquad /5/$$

$$\theta = \frac{n}{2-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}} \cdot \frac{t_0+1}{t_0};\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} < 2;\ n \geq 2,\ \frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1.$$

Надалі через p', q' позначаємо числа, спряжені за Гельдером, з числами p і q.

$$M(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \| \mu_i^2 \lambda_i^{-1} \|_{p,q,Q(\tau)};\ P(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \| \lambda_i^{-1} \|_{t_i,t_0,Q(\tau)};$$

$$\|u\|_{p,q,Q(\tau)} = \left(\tau^{-2}\int_{-\tau^2}^{0}\left(\tau^{-n}\int_{K(\tau)}|u|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

<u>Лема 1.</u> Нехай у функції $u(x,t)$, що належить $L_{2,2}(Q(\tau))$, існують узагальнені похідні u_{x_i}, $i=1,\dots,n$ такі, що $\lambda_i^{\frac{1}{2}} u_{x_i} \in L_{2,2}(Q(\tau))$.

Тоді

$$\|u\|_{q_1,q_2,Q(\tau)} \leq C\left(\tau P^{\frac{1}{2}}(\tau)\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{\frac{1}{2}}u_{x_i}\|_{2,2,Q(\tau)} + \left(\tau^{-2}\int_{-\tau^2}^{0}\left(\tau^{-n}\int_{N_t}u^2dx\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}\right), \qquad /6/$$

де $\operatorname{mes} N_t \geq c_0 \operatorname{mes} K(\tau)$, $c_0 > 0$; $q_2 = \frac{2t_0}{t_0+1}$; $q_1 = 2n\left(n-2+\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^{-1}\right)^{-1}$; $C = C(n,t_i)$, коли $n+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} > 2$; q_1 – довільне число ≥ 1, $C = C(n,t_i,q_1)$, коли $n+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} = 2$.

<u>Лема 2.</u> Нехай у функції $u(x,t)$, що належить $L_{2,\infty}(Q(\tau))$ існують узагальнені похідні u_{x_i}, $i=1,\dots,n$ такі, що

$\lambda_i^{\frac{1}{2}} u_{x_i} \in L_{2,2}(Q(\tau))$. Тоді

$$\|u\|_{2kp',2kq',Q(\tau)} \le \varepsilon_0 \|u\|_{2,\infty,Q(\tau)} + C\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)\left(\tau P^{\frac{1}{2}}(\tau) \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i^{\frac{1}{2}} u_{x_i}\|_{2,2,Q(\tau)} + \left(\tau^{-2}\int_{-\tau^2}^{0} \left(\tau^{-n}\int_{N_0} u^2 dx\right) dt\right)^{\frac{1}{2}}\right), \qquad /7/$$

де $k = 1 + \left(\frac{p}{q'} - \theta\right)(p\theta)^{-1} > 1$, $C\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) = C\left(\frac{1}{\varepsilon_0}, n, t_i, t_0\right)$, якщо $n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} > 2$;

$k = 1 + \left(\frac{p}{q'} - \theta\right)(2p\theta)^{-1} > 1$, $C\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) = C\left(\frac{1}{\varepsilon_0}, n, t_i, t_0, p, q\right)$, якщо $n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} = 2$.

Узагальнений розв"язок розуміють у сенсі інтегральної тотожності, як і в праці [3].

Нехай $u(x,t)$ узагальнений розв"язок рівняння /I/ у циліндрі Q. Припустимо, що $Q(2\tau_0) \subset Q$. Тоді за теоремою 2.I праці [3] узагальнений розв"язок обмежений у $Q(\tau_0)$ деякою константою, яку запишемо M_0. Якщо позначити $g_0(x,t) = d(x,t)|u|^2 + g(x,t)$, $e_0(x,t) = c(x,t)|u| + e(x,t)$, $f_0(x,t) = h(x,t)|u| + f(x,t)$, $\hat{A}(x,t,\bar{p}) = A(x,t,u,\bar{p})$, $\hat{B}(x,t,\bar{p}) = B(x,t,u,\bar{p})$, то рівняння /I/ і нерівності /2/ матимуть вигляд

$$u_t - \operatorname{div} \hat{A}(x,t,u_x) = \hat{B}(x,t,u_x), \qquad /8/$$

$$\hat{A}(x,t,\bar{p})\bar{p} \ge a_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t)|p_i|^2 - g_0(x,t),$$

$$|\hat{A}(x,t,\bar{p})| \le a_2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x,t)|p_i| + e_0(x,t), \qquad /9/$$

$$|\hat{B}(x,t,\bar{p})| \le \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)|p_i| + f_0(x,t),$$

причому норми функцій $g_0(x,t)$, $e_0^2(x,t)\mu_i^{-1}(x,t)$, $f_0(x,t)$ в просторі $L_{p,q}(Q(\tau_0))$ обмежені константою, що залежить від M_0 і норм функцій $d(x,t)$, $g(x,t)$, $c_i^2(x,t)\mu_i^{-1}(x,t)$, $e^2(x,t)\mu_i^{-1}(x,t)$, $h(x,t)$, $f(x,t)$ у просторі $L_{p,q}(Q(\tau))$.

<u>Теорема I.</u> Нехай $u(x,t)$ узагальнений розв"язок рівняння /I/ у циліндрі $Q(\tau)$, $\tau \le \tau_0$, причому $\operatorname{vrai\,max}_{Q(\tau_0)} |u| \le M_0$, і нехай існують такі додатні константи M_1, M_2, що для довіль-

ного циліндра $Q(\rho)$, $\rho \le r_0$, $M(\rho) \le M_1$, $P(\rho) \le M_2$.
Тоді знаходимо такі постійні δ і ξ, які належать інтервалу /0,I/ і залежать тільки від n, a_1, a_2, M_0, M_1, M_2, що або

I/ $osc(u, Q(\delta r)) \le C r^{\gamma}$,

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2p'} + \frac{1}{q'} - \frac{n}{2}\right) > 0, \quad C = C(n, a_1, a_2, M_0, M_1, M_2),$$

або

2/ $osc(u, Q(\delta r)) \le \xi\, osc(u, Q(r))$.

Доведення. Не зменшуючи загальності викладу, можна вважати, що $\underset{Q(r)}{vrai\,max}(\pm u(x,t)) = \mathcal{M}$, оскільки після додавання до функції $u(x,t)$ будь-якої постійної нова функція знову є розв"язком рівняння, аналогічного рівнянню /8/ з тими ж умовами /9/, а її коливання (osc) на довільній множині збігаються з коливаннями функції $u(x,t)$. Маємо дві можливості: I/ $\mathcal{M} < r^{\gamma}$ або 2/ $\mathcal{M} \ge r^{\gamma} > 0$. У першому випадку при довільному $\delta \in (0,1)$ $osc(u, Q(\delta r)) \le osc(u, Q(r)) \le 2\mathcal{M} \le 2r^{\gamma}$. У другому при $r^{\gamma} < C$, де C – достатньо мале, буде доведено існування таких постійних δ і ξ з інтервалу /0,I/, що має місце пункт 2 теореми I. Якщо ж $r^{\gamma} \ge C$, то

$$osc(u, Q(\delta r)) \le osc(u, Q(r_0)) \le 2M_0 \le 2M_0 \frac{1}{C} r^{\gamma}.$$

Отже, достатньо розглянути випадок $\mathcal{M} \ge r^{\gamma} > 0$, де $r^{\gamma} < C$ і C – достатньо мале. Позначимо через $v(x,t)$ ту із функцій $1 \pm \frac{u}{\mathcal{M}}$, що не менша одиниці на множині, міра якої не менша $\frac{1}{2} mes\, Q(r)$ /зауважимо, що функція $u(x,t)$ невід"ємна або недодатна на множині, міра якої не менша $\frac{1}{2} mes\, Q(r)$ /. Тоді, як доведено у праці [2], у деякому циліндрі $Q(\delta r)$, $\delta \in (0,1)$ функція $v(x,t) > \varepsilon > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(n, a_1, a_2, M_0, M_1, M_2) \in (0,1)$. Звідси, як і в праці [4], випливає пункт 2 теореми I.

Теорема 2. Нехай $u(x,t)$ узагальнений розв"язок рівняння /I/ у циліндрі $Q(r)$, $r \le r_0$, причому $\underset{Q(r_0)}{vrai\,max}|u| \le M_0$, і нехай існують такі додатні константи M_1 і M_2, що для довільного

циліндра $Q(\rho)$, $\rho \le r_0$, $M(\rho) \le M_1$, $P(\rho) \le M_2$.
Тоді при $0 < \rho \le r_0$ і $\alpha = \min(\gamma, \log_\delta \xi)$ має місце оцінка

$$osc(u,Q(\rho)) \le C(1+r_0^\gamma)\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^\alpha, \qquad /10/$$

де постійні α і C залежать від $n, a_1, a_2, M_0, M_1, M_2$.

Доведення. Зрозуміло, що існує таке число $m \ge 0$, яке $\delta r_0 \le \delta^{-m}\rho \le r_0$. Для послідовності коливань функції $u(x,t)$ у циліндрах $Q(\rho)$, $Q(\delta^{-1}\rho), \dots, Q(\delta^{-m}\rho)$ маємо дві можливості: або при переході від одного циліндра до наступного завжди має місце пункт 2 теореми 1 і тоді

$$osc(u,Q(\rho)) \le \xi^m osc(u,Q(\delta^{-m}\rho)) \le 2M_0\xi^m = C\xi^m, \qquad /11/$$

або ж на деякому кроці $k < m$, має місце пункт 1 теореми 1 і тоді

$$osc(u,Q(\rho)) \le \xi^k osc(u,Q(\delta^{-k}\rho)) \le C\xi^k(\delta^{-k-1}\rho)^\gamma. \qquad /12/$$

Якщо має місце /11/, то, враховуючи, що $\delta^m \le \rho(\delta r_0)^{-1}$, запишемо $osc(u,Q(\rho)) \le C\xi^m \le C\delta^{m\log_\delta \xi} \le C\delta^{m\alpha} \le C\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^\alpha$.
За умови /12/, користуючись тотожністю

$$(\delta^{-k-1}\rho)^\gamma \xi^k = \delta^{-\gamma}(\delta^{-k}\rho)^{\gamma-\alpha}(\xi\delta^{-\alpha})^k\rho^\alpha$$

і враховуючи, що $\delta^{-k}\rho \le r_0$ і $\xi\delta^{-\alpha} \le 1$, отримуємо оцінку

$$osc(u,Q(\rho)) \le C\delta^{-\gamma}r_0^{\gamma-\alpha}\rho^\alpha \le Cr_0^\gamma\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^\alpha.$$

Список літератури: 1. К о л о д и й И.М. О некоторых свойствах обобщенных решений эллиптических и параболических уравнений. М., 1972. 2. К о л о д і й І.М. Слабка форма нерівності Харнака для невід"ємних узагальнених розв"язків параболічних рівнянь з виродженням. – У цьому ж Віснику. 3. К р у ж к о в С.Н., К о л о д и й И.М. Априорные оценки и неравенство Харнака для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений. – Сибирский математический журнал, 1977, т.18, № 3. 4. К р у ж к о в С.Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. – Математический сборник, 1964, т.65 /107/, № 4.

Стаття надійшла в редколегію 30.12.80