УДК 517.946

І.М.Колодій

СЛАБКА ФОРМА НЕРІВНОСТІ ХАРНАКА ДЛЯ НЕВІД"ЄМНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Ця праця тісно пов"язана з попередньою [1]. Позначимо через $v(x,t)$ ту із функцій $1 \pm \frac{u}{\mathcal{M}}$ у праці [1], яка не менша одиниці на множині, міра якої не менша $\frac{1}{2} mes\, Q(\tau)$. Легко бачити, що функція $v(x,t)$ є узагальненим розв"язком рівняння

$$v_t - div\,\tilde{A}(x,t,v_x) = \tilde{B}(x,t,v_x) \qquad /1/$$

за умов

$$\begin{gathered}
\tilde{A}(x,t,v_x)v_x \geqslant a_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t)|v_{x_i}|^2 - \tilde{g}(x,t), \\
|\tilde{A}(x,t,v_x)| \leqslant a_2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x,t)|v_{x_i}| + \tilde{e}(x,t), \\
|\tilde{B}(x,t,v_x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)|v_{x_i}| + \mathcal{F}(x,t), \\
\tilde{g} = \mathcal{M}^{-2} g_0, \ \tilde{e} = \mathcal{M}^{-1} e_0, \ \mathcal{F} = \mathcal{M}^{-1} f_0 \\
\tilde{A}(x,t,v_x) = \mathcal{M}^{-1}(\pm\hat{A}(x,t,\pm\mathcal{M}v_x)), \tilde{B}(x,t,v_x) = \mathcal{M}^{-1}(\pm\hat{B}(x,t,\pm\mathcal{M}v_x)),
\end{gathered} \qquad /2/$$

де функції $g_0, e_0, f_0, \hat{A}, \hat{B}$ із праці [1].

Узагальнений розв"язок розуміють у сенсі інтегральної тотожності

$$\iint\limits_{Q(\tau)} (\varphi v_t + \tilde{A}\varphi_x - \tilde{B}\varphi)\,dxdt = 0 \qquad /3/$$

/означення узагальненого розв"язку у праці [2] /.

<u>Теорема 1.</u> Нехай функція $v(x,t)$, що не менша одиниці на множині, міра якої не менша $\frac{1}{2} mes\, Q(\tau)$, є узагальненим розв"язком рівняння /1/ за умов /2/ в циліндрі $Q(\tau)$, де $0<\tau^{\gamma}<\mathcal{M}$, $\tau^{\gamma}< C$, причому C – достатньо мале /означення констант γ і

M див. у [1] /. Тоді в деякому циліндрі $Q(\delta\tau)$, $\delta\in(0,1)$ функція $v(x,t)>\varepsilon>0$, $\varepsilon=\varepsilon(n,a_1,a_2,M_0,M_1,M_2)\in(0,1)$

Спочатку доведемо лему. Лема I. Нехай числа $\beta\in(\frac{1}{2},1)$ і $\omega\in(0,\frac{1}{2})$ пов'язані співвідношенням $\frac{1}{2(1-\omega)\beta^n}=\frac{2}{3}$. Тоді існує число $h=h(n,a_1,a_2,M_0,M_1)$, таке, що коли позначити множину $\{x\in K(\beta\tau): v(x,t)\geq h\}=N_t$, то для майже всіх $t\in(-\omega\tau^2,0)$

$$mes\, N_t\geq\frac{1}{4}\, mes\, K(\beta\tau). \qquad /4/$$

Доведення. Позначимо $\mu(t)=mes\{x\in K(\tau): v(x,t)\geq 1\}$. Повторивши міркування праці [3], одержимо, що існує таке число $\tau\in(-\tau^2,-\omega\tau^2)$, при якому $v(x,\tau)$ визначена майже всюди в $K(\tau)$ і

$$\mu(\tau)\geq\left(\frac{1}{2}-\omega\right)\frac{mes\, K(\tau)}{1-\omega}. \qquad /5/$$

Підставимо у /3/ функцію $\varphi(x,t)=\eta^2 F'(v)\chi(t;\tau,\sigma)$, де $\chi(t;\tau,\sigma)$ - характеристична функція інтервалу (τ,σ), $\sigma\in(-\omega\tau^2,0)$, $\eta=\prod_{i=1}^{n}\eta_{\beta\tau,(1-\beta)\tau}(|x_i|)$ / див. [3] /. $w=F(v)=Z(v+h)$, а функція $Z(v)$ із леми [4, с. 57]. Тоді одержуємо

$$\int_{K(\tau)}\eta^2F(v)dx\Big|_{\tau}^{\sigma}+\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(\tau)}(\eta^2F''(v)\tilde{A}v_x+2\eta F'(v)\eta_x\tilde{A}-\eta^2F'(v)\tilde{B})\,dx\,dt=0.$$

Враховуючи властивості функції $F(v)$, умови /2/ і нерівності Юнга та Гельдера, дістаємо, що для майже всіх $\sigma\in(-\omega\tau^2,0)$ має місце нерівність

$$\int_{K(\tau)}\eta^2w(\sigma,x)dx+\frac{a_1}{2}\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(\tau)}\eta^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|w_{x_i}|^2dx\,dt\leq C\left(\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(\tau)}|\eta_x|^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}dx\,dt+\right.$$

$$+\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(\tau)}\eta^2\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}dx\,dt+\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(\tau)}\eta^2\frac{g_0(x,t)}{M^2h^2}dx\,dt+\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(\tau)}\eta^2\frac{1}{M^2h^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{e_0^2(x,t)}{\mu_i(x,t)}dx\,dt+$$

$$+\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(\tau)}\eta^2\frac{f_0(x,t)}{Mh}dx\,dt+\int_{K(\tau)}\eta^2w(x,\tau)dx\leq C\tau^n\left(\tau^{-2}\int\left(\tau^{-n}\int_{Q(\tau)}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\right)^p dx\right)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\tau^{4\gamma}\Big(\int\limits_{Q(\tau)}\Big(\int\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\Big)^{p}dx\Big)^{\frac{q}{p}}dt\Big)^{\frac{1}{q}}+\frac{\tau^{\frac{\gamma}{2}}}{h}\cdot\frac{\tau^{\gamma}}{\mu}\,\tau^{\frac{5}{2}\gamma}\Big(\int\limits_{Q(\tau)}\Big(\int f_0^{p}(x,t)dx\Big)^{\frac{q}{p}}dt\Big)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\Big(\frac{\tau^{\frac{\gamma}{2}}}{h}\cdot\frac{\tau^{\gamma}}{\mu}\Big)^{2}\tau^{\gamma}\Big(\int\limits_{Q(\tau)}\Big(\int\Big(g_0(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{l_0^2(x,t)}{\mu_i(x,t)}\Big)^{p}dx\Big)^{\frac{q}{p}}dt\Big)^{\frac{1}{q}}+\int\limits_{K(\tau)}w(x,\tau)dx. \qquad /6/$$

Звідси при достатньо малому τ /зауважимо, що вибір h робимо незалежно від τ / випливає

$$\int\limits_{K(\tau)}\eta^{2}w(\sigma,x)dx\le C\,mes\,K(\beta\tau)+\int\limits_{K(\tau)}w(x,\tau)dx. \qquad /7/$$

З цієї нерівності, як і в працях [3, 4], одержимо

$$mes\,(K(\beta\tau)\setminus N_\sigma)\le\Big(\frac{C}{Z(2h)}+\frac{2}{3}\frac{Z(h)}{Z(2h)}\Big)mes\,K(\beta\tau).$$

Враховуючи властивості функції $Z(h)$, оберемо h настільки малим, щоб

$$mes\,(K(\beta\tau)\setminus N_\sigma)\le\frac{3}{4}\,mes\,K(\beta\tau).$$

Зауважимо, що вибір h зроблено незалежно від τ. З останньої нерівності випливає оцінка /4/. Лема I доведена.

Доведемо тепер теорему I. Підставимо в інтегральну тотожність /3/ функцію $\varphi(x,t)=\eta^{2}\Psi(v)\chi(t;\tau,\sigma)$, де $z=\Psi(v)=Z\big(\frac{v+\varepsilon}{h}\big)$, $\varepsilon>0$ оберемо далі. Тоді так само, як і для функції $w(x,t)=F(v)=Z(v+h)$, виведемо нерівність

$$\int\limits_{K(\tau)}\eta^{2}z(x,\sigma)dx+\int\limits_{\tau}^{\sigma}\int\limits_{K(\tau)}\eta^{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|z_{x_i}|^{2}dxdt\le C\tau^{n}\Bigg(\Big(\tau^{-2}\int\limits_{Q(\tau)}\Big(\tau^{-n}\int\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^{2}}{\lambda_i}\Big)^{p}dx\Big)^{\frac{q}{p}}dt\Big)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\tau^{4\gamma}\Big(\int\limits_{Q(\tau)}\Big(\int\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\Big)^{p}dx\Big)^{\frac{q}{p}}dt\Big)^{\frac{1}{q}}+\frac{\tau^{\frac{\gamma}{2}}}{\varepsilon}\,\frac{\tau^{\gamma}}{\mu}\,\tau^{\frac{5}{2}\gamma}\Big(\int\limits_{Q(\tau)}\Big(\int f_0^{p}(x,t)dx\Big)^{\frac{q}{p}}dt\Big)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left(\frac{\tau^{\frac{\delta}{2}}}{\varepsilon}\frac{\tau^{\gamma}}{\mathcal{M}}\right)^2 \tau^{\gamma}\left(\int\limits_{Q(\tau)}\left(\int\left(g_0(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\ell_0^{(2)}(x,t)}{\mu_i(x,t)}\right)^{\rho}dx\right)^{\frac{q}{\rho}}dt\right)^{\frac{1}{q}}+Z\left(\frac{\varepsilon}{h}\right).$$

Спрямуємо σ до нуля. При достатньо малому τ /зауважимо, що ε вибираємо незалежно від τ/ одержуємо

$$\int\limits_{-\omega\tau^2}^{0}\int\limits_{K(\beta\tau)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\left|Z_{x_i}\right|^2 dx\,dt \le C\left(1+Z\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right)\tau^{n}. \qquad /8/$$

Приймаємо $\delta=\frac{1}{2}\min\left(\beta,\sqrt{\omega}\right)$. За теоремою 2.I праці [2] і лемою 2 праці [I] записуємо

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q(\delta\tau)} Z^2 \le C\left(\|Z\|^2_{2kp',2kq',Q(2\delta\tau)}+1\right) \le C\Big(\varepsilon_0\|Z\|^2_{2,\infty,Q(2\delta\tau)}+$$

$$+C\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)\left(\tau^2 P^{\frac{1}{2}}(\delta\tau)\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{\frac{1}{2}}Z_{x_i}\|^2_{2,2\,Q(2\delta\tau)}+\left(\tau^{-2}\int\limits_{-(2\delta\tau)^2}^{0}\left(\tau^{-n}\int\limits_{N_t}Z^2dx\right)dt\right)+1\right). \qquad /9/$$

Об"єднаємо оцінки /8/, /9/, врахувавши, що $Z=0$ для майже всіх $t\in(-\omega\tau^2,0)$ на множині N_t. Тоді дістаємо

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q(\delta\tau)} Z^2 \le \varepsilon_1 Z^2\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)+C\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(1+Z\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right),\quad \varepsilon_1=C\cdot\varepsilon_0 .$$

Вибираємо $\varepsilon_1=\frac{1}{2}\frac{Z^2\left(\frac{2\varepsilon}{h}\right)}{Z^2\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)}$. Тоді

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q(\delta\tau)} Z^2 \le \frac{1}{2}Z^2\left(\frac{2\varepsilon}{h}\right)+C\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(1+Z\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right). \qquad /I0/$$

Візьмемо тепер $\varepsilon>0$ настільки малим, щоб

$$Z^2\left(\frac{2\varepsilon}{h}\right)>\frac{1}{2}Z^2\left(\frac{2\varepsilon}{h}\right)+C\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(1+Z\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right). \qquad /II/$$

Це можна зробити, враховуючи, що $Z(v)\sim-\ln v$ при $v\to+0$. Зауважимо, що вибір ε зроблено незалежно від τ. Покажемо, що $v\geq\varepsilon$ в $Q(\delta\tau)$. Справді, бо в протилежному разі, зважаючи на монотонність функції $Z(v)$ й оцінки /I0/,

$$Z^2\left(\frac{2\varepsilon}{h}\right)\le Z^2\left(\frac{v+\varepsilon}{h}\right)=z^2(x,t)\le\frac{1}{2}Z^2\left(\frac{2\varepsilon}{h}\right)+C\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(1+Z\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right),$$

що суперечить /II/. Теорема I доведена.

Список літератури: 1. К о л о д і й І.М. Нерівність за Гельдером узагальнених розв"язків параболічних рівнянь дівергентного виду з виродженням.-У цьому ж Віснику. 2. К р у ж к о в С.Н., К о л о д и й И.М. Априорные оценки и неравенство Харнака для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений. - Сибирский математический журнал, 1977, т.18, № 3. 3. К р у ж к о в С.Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. - Математический сборник, 1964, т.65 /107/, № 4. 4. К р у ж к о в С.Н. Нелинейные уравнения с частными производными. Ч. 1. М., 1969.

Стаття надійшла в редколегію 30.12.80

УДК 517.512.2

Б.В.Ковальчук

ПРО АБСОЛЮТНУ ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ФУР"Є S^p - МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

Нехай $F(x) = [f_{jk}(x)] (-\infty < x < \infty) \in S^p$ - майже періодична /м.п./ матриця $(p > 1)$ з рядом Фур"є

$$F(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}, \qquad /1/$$

де $\{\lambda_n\}$ - спектр матриці $F(x)$; $A_n = A_{\lambda_n} = M\{F(x)e^{-i\lambda_n x}\}$ - її матричні коефіцієнти Фур"є [4].

Е.А.Бредихіна [1] знайшла достатні умови абсолютної збіжності рядів Фур"є м.п. функцій у термінах найліпших наближень.

Ми вивчаємо аналогічні питання для класу S^2 - м.п. матриць. При цьому для доведення достатніх умов абсолютної збіжності рядів Фур"є S^2 - м.п. матриць опираємось на результати праці [1].

Відомо [2], що для $F(x) \in S^2$ виконується рівність Парсеваля

$$\|F\|^2_{(2)} = \sum_n \|A_{\lambda_n}\|^2. \qquad /2/$$

Позначимо $P_\lambda^{(2)} \in S^2$ і $Q_\lambda^{(2)} \in S^2$ - класи матриць, спектри яких