Зокрема, при $\alpha = \frac{1}{2}$ маємо

$$p(t) = \frac{1}{\pi} t^{-\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k} (-1)^k \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)}{(2k)!} t^{-k} =$$

$$= \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{t}\right)^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{t}} t^{-\frac{3}{2}}, \quad t > 0$$

густину, приналежну до п"ятого типу сім"ї Пірсона [I, 4]. Якщо додатну стійку випадкову змінну з показником $\alpha = \frac{1}{2}$ помножити на імпульс у точці $a,\ a > 0$, то густина нової випадкової змінної набуде вигляду

$$p(t) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-\frac{a}{t}} t^{-\frac{3}{2}}, \quad t > 0,\ a > 0, \qquad /6/$$

а відбиття

$$M(z) = a^{z-1} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - z\right)}{\sqrt{\pi}}, \quad \operatorname{Re} z < \frac{3}{2},\ a > 0.$$

Густина /6/ при $a = \frac{1}{2}$ розглядається у праці [I], а при $a = \frac{c^2}{2}$ – в [4].

Список літератури. I. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.- М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 2. Квіт І.Д. Зворотна формула для відбиття. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип.I3, 1978. 3. Титчмарш Е. Теория функций.- М.:, Л.: Гостехиздат, 1951. 4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. - М.: Мир, 1967.

Стаття надійшла в редколегію IO.02.8I

УДК 512.513

О.Д.Артемович, О.Л.Горбачук

РОЗШИРЕННЯ ДІУВІЛЛЯ ПОЛЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $\mathcal{M}$ - довільне диференціальне поле, а $\mathcal{K}$ - його диференціальне підполе. Диференціальну групу Галуа поля $\mathcal{M}$ відносно поля $\mathcal{K}$ позначимо через $DG(\mathcal{M},\mathcal{K})$

Означення та факти, зв"язані з диференціальними групами й полями, можна знайти у працях [1, 2].

Означення 1. Поле $\mathcal{K}(u)$ називають розширенням поля $\mathcal{K}$, яке одержують внаслідок приєднання інтеграла від елемента, коли

$$u = \int a\,dx,\ a \in \mathcal{K},\ u \notin \mathcal{K}.$$

Означення 2. Поле $\mathcal{K}(v)$ називають розширенням поля $\mathcal{K}$, що дістають внаслідок приєднання експоненти інтеграла, коли

$$v = e^{\int a\,dx},\ a \in \mathcal{K},\ v \notin \mathcal{K}.$$

Означення 3. Поле $\mathcal{M}$ називають розширенням Ліувілля поля $\mathcal{K}$, якщо існує такий ланцюг проміжних диференціальних полів $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{K}_n = \mathcal{M}$, коли для кожного i поле $\mathcal{K}_{i+1}$ є розширенням поля $\mathcal{K}_i$ за допомогою інтеграла або експоненти інтеграла.

Теорема. Диференціальне поле розкладу лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + y = 0$ над полем $\mathbb{R}(x)$ дійсних раціональних функцій не буде розширенням Ліувілля.

Доведення. $\bar{\mathcal{M}} = \mathbb{R}(x, \cos x, \sin x)$ – диференціальне поле розкладу даного рівняння. Знайдемо групу Галуа $DG(\bar{\mathcal{M}}, \mathbb{R}(x))$.

Нехай $f \in DG(\bar{\mathcal{M}}, \mathbb{R}(x)),\ f(\cos x) = \alpha,\ f(\sin x) = \beta.$

Тоді $-\beta = f(-\sin x) = (f(\cos x))' = \alpha'$,

$$\alpha = f(\cos x) = (f(\sin x))' = \beta',$$

тобто

$$\begin{cases} \alpha' + \beta = 0, \\ \beta' - \alpha = 0. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що

$$f: \cos x \longmapsto C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$
$$f: \sin x \longmapsto -C_2 \cos x + C_1 \sin x.$$

Диференціальна група Галуа рівняння $y'' + y = 0$ над $\mathbb{R}(x)$ є алгебраїчною матричною групою над полем констант поля $\mathbb{R}(x)$, тобто

$$DG(\bar{\mathcal{M}}, \mathbb{R}(x)) = \left\{ \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ -C_2 & C_1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} C_1, C_2 \text{ – елементи} \\ \text{поля констант} \\ \text{поля } \mathbb{R}(x) \\ \text{/дійсні числа/} \end{array} \right\}$$

Матриці цієї групи Галуа $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{pmatrix}$ не зводяться до трикутного виду над полем R дійсних чисел, оскільки корені характеристичного многочлена комплексні /клас матриць незвідний/. Тим більше їх не можна звести скінченним числом перетворень до спеціального трикутного та діагонального видів, тому розширення не є розширенням Ліувілля [I, с. 29].

Отже, розв"язки рівняння $y'' + y = 0$, а саме $\cos x$, $\sin x$, не можуть бути ні інтегралами, ні експонентами інтегралів над полем $R(x)$.

Зауважимо, що над полем комплексних чисел це не характерне.

<u>Наслідок.</u> Цілі функції $\cos x$, $\sin x$ не можна виразити за допомогою скінченної комбінації арифметичних операцій, інтегралів і експонент інтегралів від дійсних раціональних функцій.

<u>Список літератури</u>: I. К а п л а н с к и й И. Введение в дифференциальную алгебру. - М.: ИЛ 1959. 2. Kolchin E.R. Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations. - Ann. of Math., 1948, N49.

Стаття надійшла в редколегію 04.II.80

УДК 512.553

О.Л.Горбачук, Р.Б.Попович

РАДИКАЛИ, НАПІВПРОСТИЙ КЛАС ЯКИХ ЗАМКНЕНИЙ ВІДНОСНО ФАКТОР-МОДУЛІВ

Дослідимо радикали з напівпростим класом, замкненим відносно фактор-модулів. Опишемо точні справа ідемпотентні радикали. Як наслідок отримаємо відмінні від відомих характеризації кручень з напівпростим класом, замкненим відносно фактор-модулів. Розв"яжемо задачу про розщеплюваність точних справа радикалів. Опишемо кільця, над якими всі ідемпотентні радикали точні справа.