Матриці цієї групи Галуа $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{pmatrix}$ не зводяться до трикутного виду на- полем R дійсних чисел, оскільки корені характеристичного многочлена комплексні /клас матриць незвідний/. Тим більше їх не можна звести скінченним числом перетворень до спеціального трикутного та діагонального видів, тому розширення не є розширенням Ліувілля [I, с. 29].

Отже, розв"язки рівняння $y''+y=0$, а саме $\cos x$, $\sin x$, не можуть бути ні інтегралами, ні експонентами інтегралів над полем $R(x)$.

Зауважимо, що над полем комплексних чисел це не характерне.

<u>Наслідок.</u> Цілі функції $\cos x$, $\sin x$ не можна виразити за допомогою скінченної комбінації арифметичних операцій, інтегралів і експонент інтегралів від дійсних раціональних функцій.

<u>Список літератури</u>: I. К а п л а н с к и й И. Введение в дифференциальную алгебру. - М.: ИЛ 1959. 2. Kolchin E.R. Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations. - Ann. of Math., 1948, N49.

Стаття надійшла в редколегію 04.II.80

УДК 512.553

О.Л.Горбачук, Р.Б.Попович

РАДИКАЛИ, НАПІВПРОСТИЙ КЛАС ЯКИХ ЗАМКНЕНИЙ ВІДНОСНО ФАКТОР-МОДУЛІВ

Дослідимо радикали з напівпростим класом, замкненим відносно фактор-модулів. Опишемо точні справа ідемпотентні радикали. Як наслідок отримаємо відмінні від відомих характеризації кручень з напівпростим класом, замкненим відносно фактор-модулів. Розв"яжемо задачу про розщеплюваність точних справа радикалів. Опишемо кільця, над якими всі ідемпотентні радикали точні справа.

Кожне кільце, яке розглядатимемо, припускаємо асоціативним і з одиницею, а кожен модуль-правим і унітарним. Категорію правих модулів над кільцем R позначаємо $Mod\text{-}R$.

Нагадаємо [5], що в $Mod\text{-}R$ вважається заданим радикал, якщо виконуються наступні умови:

1. Кожному $M \in Mod\text{-}R$ ставлять у відповідність його підмодуль $\tau(M)$.

2. Для будь-якого гомоморфізму R - модулів $M \xrightarrow{f} N$ $f(\tau(M)) \subseteq \tau(N)$.

3. $\tau(M/\tau(M))=0$ для всіх модулів M. Якщо, крім того, виконується умова

4. $\tau(\tau(M))=\tau(M)$ для всіх модулів M, то радикал τ називають ідемпотентним. Кожен радикал τ однозначно задається напівпростим класом $F_\tau=\{M / \tau(M)=0\}$. Будь-який ідемпотентний радикал τ однозначно задається також радикальним класом $T_\tau = \{M / \tau(M)=M\}$. Ідемпотентний радикал τ з T_τ, замкненим відносно підмодулів називають крученням.

Твердження [5]. Для підфунктора τ тотожного функтора еквівалентні наступні умови:

a/ τ точний справа;

в/ $\tau(M)=M \cdot \tau(R)$ для кожного $M \in Mod\text{-}R$;

c/ τ радикал і F_τ, замкнений відносно фактор-модулів.

Нехай J довільний двосторонній ідеал кільця R. Позначимо через τ_J підфунктор, який кожному модулю M ставить у відповідність його підмодуль $\tau_J(M)=MJ$. Легко перевірити, що τ_J є точним справа радикалом. З твердження отримуємо наслідок.

Наслідок 1. Радикал τ точний справа тоді і тільки тоді, коли $\tau=\tau_J$ для деякого двостороннього ідеала J.

Лема 1. Радикал τ_J ідемпотентний тоді і тільки тоді, коли J ідемпотентний ідеал.

Доведення. Якщо τ_J ідемпотентний, то для всіх модулів M виконується умова $\tau_J(\tau_J(M))=\tau_J(M)$. Застосовуючи її до модуля R, маємо $J^2 = (RJ)J = RJ = J$. Навпаки, коли J ідемпотентний ідеал, то $\tau_J(\tau_J(M)) = (MJ)\cdot J = MJ^2 = MJ = \tau_J(M)$.

Використовуючи наслідок I та лему I, одержуємо такий наслідок.

Наслідок 2. Ідемпотентний радикал τ точний справа тоді і тільки тоді, коли $\tau = \tau_J$ для двостороннього ідемпотентного ідеала J. J - радикалом, де J довільний двосторонній ідеал, називаємо ідемпотентний радикал з радикальним класом $T_J = \{M | MJ = M\}$ [I, 2].

Лема 2. Якщо J двосторонній ідемпотентний ідеал, то J - радикал є крученням в тому і тільки тому випадку, коли J задовольняє умову: a_1/ для довільних $i_1, \ldots, i_k \in J$ $\bigcap_{\ell=1}^{k}(0:i_\ell) + J = R$.

Доведення. Достатність. Нехай $M \in T_J$ та N - довільні підмодулі у M. Для довільного елемента $n \in N$ $n = \sum_{\ell=1}^{k} m_\ell i_\ell$, де $m_\ell \in M$, $i_\ell \in J$ для всіх $\ell = \overline{1,k}$. За умовою $1 = \tau + j$, де $\tau \in \bigcap_{\ell=1}^{k}(0:i_\ell)$, $j \in J$. Тоді $n = n\cdot 1 = n\cdot\tau + n\cdot j = n\cdot j$. Отже, $N = NJ$ та $N \in T_J$.

Необхідність. Якщо J - радикал є крученням, то його радикальний фільтр E_J складається з тих ідеалів T, для яких $T + J = R$. Оскільки $J\cdot J = J$, то $J \in T_J$, отже, для довільних $i_1, \ldots, i_k \in J$ $\bigcap_{\ell=1}^{k}(0:i_\ell) \in E_J$, тобто $\bigcap_{\ell=1}^{k}(0:i_\ell) + J = R$.

Зауваження. У праці [2] отримані умови, за яких J - радикал є крученням для довільного двостороннього ідеала J. Лема 2 дає спрощену умову, при якій J - радикал є крученням для випадку, коли ідеал J ідемпотентний.

Враховуючи, що радикальний клас джансового кручення, радикальний фільтр якого має найменший ідеал J, є півпростим класом J-радикала, та лему 2, маємо наступний наслідок.

Наслідок 3 [4]. Джансове кручення, найменший ідеал в радикальному фільтрі якого дорівнює J, стабільне тоді і тільки тоді, коли ідеал J задовольняє умову a_1.

Наслідок 2 та лема 2 дають такі результати.

Наслідок 4. Кручення τ точне справа тоді і тільки тоді, коли $\tau=\tau_J$ для двостороннього ідемпотентного ідеала J з умовою a_1.

Наслідок 5. Джансове кручення τ точне справа тоді і тільки тоді, коли $\tau=\tau_J$ для двостороннього ідеала J, який задовольняє умову a_2/ для довільної сім"ї $\{i_\alpha\}_{\alpha\in A}$ елементів із J $\bigcap\limits_{\alpha\in A}(0:i_\alpha)+$ $+J=R$.

Доведення. Достатність. За наслідком 4 $\tau=\tau_J$ є точним справа крученням. Покажемо, що воно джансове. Нехай $\{M_\beta\}_{\beta\in B}$ — довільна сім"я модулів з класу T_J. Розглянемо модуль $M=\prod\limits_{\beta\in B}M_\beta$. Нехай $(m_\beta)_{\beta\in B}$ довільний елемент з M. Для кожного $\beta\in B$ маємо $m_\beta=\sum\limits_{\alpha\in A_\beta}m_\alpha^{(\beta)}i_\alpha^{(\beta)}$, де $m_\alpha^{(\beta)}\in M_\beta$, $i_\alpha^{(\beta)}\in J$ для всіх $\alpha\in A_\beta$. Приймемо $A=\bigcup\limits_{\beta\in B}A_\beta$. За умовою $1=r+j$, де $r\in\bigcap\limits_{\alpha\in A}(0:i_\alpha)$, $j\in J$. Тоді $(m_\beta)_{\beta\in B}=(m_\beta)_{\beta\in B}(r+j)=(m_\beta)_{\beta\in B}\,j$. Отже, $MJ=M$, клас T_J замкнений відносно прямих добутків і τ_J — джансове кручення [5].

Необхідність. За наслідком 2 кручення τ задається ідемпотентним ідеалом J. Радикальний фільтр E_J кручення τ складається з тих ідеалів T, для яких $T+J=R$. Оскільки τ — джансове кручення, то E_J замкнений відносно довільних перетинів. Тоді для довільної сім"ї $\{i_\alpha\}_{\alpha\in A}$ елементів з J $\bigcap\limits_{\alpha\in A}(0:i_\alpha)\in E_J$ і, отже, $\bigcap\limits_{\alpha\in A}(0:i_\alpha)+J=R$.

Зауваження. Наслідки 4 і 5 дають характеризації точних справа кручень і джансових кручень, відмінні від наведених у праці [4].

Теорема I. Точний справа радикал τ розщеплюється тоді і тільки тоді, коли τ ідемпотентний з радикальним класом, замкненим відносно суттєвих розширень.

Доведення. Необхідність. Якщо радикал τ розщеплюється, то $M=\tau(M)\oplus N$ для кожного модуля M. Застосовуючи до обох частин τ, отримуємо $\tau(M)=\tau(\tau(M))\oplus\tau(N)=\tau(\tau(M))$. Отже, τ — ідемпотентний. Замкненість T_τ відносно суттєвих розширень очевидна.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай M – довільний модуль і $\tau(M)$ – його радикал. Існує такий підмодуль N модуля M, що $\tau(M)\cap N=0$ та $\tau(M)\oplus N$ суттєві у M [5]. Тоді $[\tau(M)\oplus N]/N$ суттєвий у M/N. Оскільки $[\tau(M)\oplus N]/N\cong\tau(M)\in T_\tau$ і T_τ замкнений відносно суттєвих розширень, то $M/N\in T_\tau$. Таким чином, $M/[\tau(M)\oplus N]\in T_\tau\cap F_\tau=0$ і, отже, $M=\tau(M)\oplus N$.

Теорема 2. Над кільцем R всі ідемпотентні радикали точні справа тоді і тільки тоді, коли R є скінченною прямою сумою повних матричних кілець над локальними досконалими зліва та справа кільцями.

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Кільце R є скінченною прямою сумою повних матричних кілець над локальними досконалими зліва [6]. Розглянемо над кільцем R_i $(i=\overline{1,n})$ ідемпотентний радикал, породжений простими R_i – модулями. За наслідком 2, він повинен задаватися ідемпотентним двостороннім ідеалом J. Тому що, $R_i/J(R_i)$ просте, то $J\subseteq J(R_i)$. Візьмемо довільний $a\in J$. З $J=J^2$ отримуємо $a=a_1a_1'$, де $a_1,a_1'\in J$. У свою чергу a_1' розкладається: $a_1'=a_2a_2'$, тобто $a=a_1a_2a_2'$ і т.д. Оскільки $J(R_i)T$ – нільпотентний зліва, то $a=0$. Тоді розглянутий ідемпотентний радикал тривіальний, і кожний R_i – модуль має максимальний підмодуль. Отже, $J(R_i)$ T – нільпотентний справа [3].

Д о с т а т н і с т ь. Вона випливає з того, що над матричним над локальним досконалим зліва і справа кільцем R_i всі ідемпотентні радикали тривіальні.

Автори висловлюють подяку М.Я.Комарницькому за обговорення роботи.

Список літератури: 1. Г о р б а ч у к Е.Л. Радикалы в модулях над разными кольцами. – Математические исследования, 1972, 76, № 1. 2. Г о р б а ч у к О.Л., К о м а р н и ц ь к и й М.Я.

$\mathcal{J}$ - радикали та їх властивості. - УМЖ, 1978, 30, № 2. 3. Ф е й с К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. - М.: Мир, 1979. 4. Golan J. Localization of Noncommutative Rings. New York: Dekker, 1975. 5. Stenström B. Rings and Modules of Quotients. Berlin: Springer, 1975. 6. Teply M. Homological dimension and splitting torsion theories. - Pacif. J. Math., 1970, 34.

Стаття надійшла в редколегію 23.12.80

УДК 5 4

С.В.Дениско

ПРО ДЕЯКІ СПОСОБИ ВІДТВОРЕННЯ РОЗГОРТНИХ ПОВЕРХОНЬ

На рисунку $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ - масштабні вектори правої прямокутної системи координат, $\bar{e}_1' = \bar{e}_1\cos\alpha + \bar{e}_2\sin\alpha$, $\bar{e}_2' = -\bar{e}_1\sin\alpha + \bar{e}_2\cos\alpha$, $\overline{OO'} = a^1\bar{e}_1 + a^2\bar{e}_2 + a^3\bar{e}_3$ $(a^3 \neq 0)$,

$$\overline{OA} = R_1(\bar{e}_1\cos\varphi + \bar{e}_2\sin\varphi),\quad \overline{O'A'} = R_2(\bar{e}_1'\cos k\varphi + \bar{e}_2'\sin k\varphi),$$

причому $\alpha, a^1, a^2, a^3, R_1, R_2, k$ - сталі; φ - змінна.

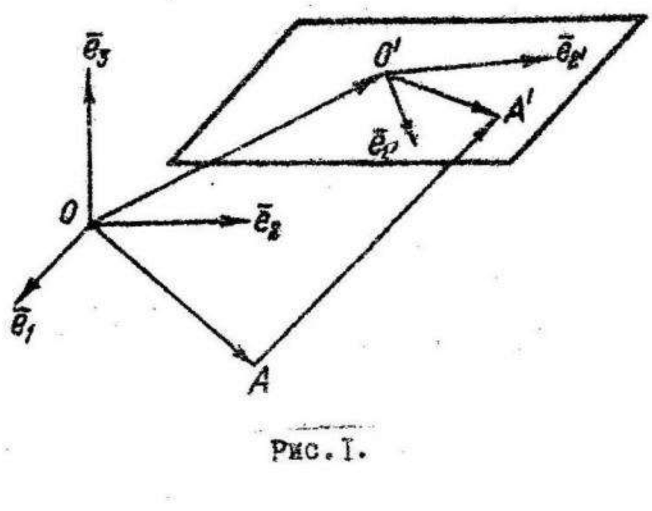

Рис. 1.