ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

20

1982

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 20

ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Виходить з 1965 р.

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1982

ББК 22.31
530.I
Л89
УДК 513

Вопросы математической физики. Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 20.-Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, 96 с. /на укр. яз./.

В Вестнике помещены статьи по теории функций, функционального анализа, алгебры, теории вероятностей, дифференциальных и интегральных уравнений.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов. Библиогр. списки в конце статей.

Відповідальний за випуск доц. Є.М.Парасюк.

Адреса редакційної колегії: 290000, м.Львів, вул. Університетська, I, кафедра диференціальних рівнянь.

Редакція науково-технічної та природничої літератури

Зав. редакцією М.П.Парцей

Л $\frac{20204-035}{М225/04/-82}$ 1702050000 Замовне

УДК 517.53

М.В.Заболоцький

ДЕЯКІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ НЕВАНЛІННІВСЬКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ ПОРЯДКУ $\rho<1$

Дослідимо зв"язок між зростанням величин $T(r,f)$ і $N(r)=N(r,f^{-1})$ цілої функції f порядку $\rho<1$. Нехай $V(r)=r^{\rho(r)}$, де $\rho(r)$ – уточнений порядок функції f [1], $\rho(r)\to\rho$ при $r\to\infty$.

Розглянемо спочатку випадок $0<\rho<1$. Позначимо через $\tau=\tau(Q)$, $\sigma=\sigma(Q)$ відповідно невід"ємний і недодатний корені рівняння $Qe^{x}=x+1$, $0\leq Q\leq 1$, $x\in R$. При $Q=0$ приймаємо $\tau(0)=+\infty$, а при $Q=1$ відповідно $\tau=\sigma=0$. Нехай ρ – фіксоване число, $0<\rho<1$, $\mathcal{K}_0(t,\varphi)=(1-t\cos\varphi)t^{-1}(t^2-2t\cos\varphi+1)^{-1}$; $0<t<+\infty$, $0<\varphi\leq\pi$.

Проаналізуємо при $0<q<+\infty$ функцію

$$\omega(q,\varphi;Q)=\frac{\pi\cos\rho(\pi-\varphi)}{\sin\pi\rho}-\int\limits_{q\exp(-\tau/\rho)}^{q}(t^{\rho}-q^{\rho}e^{-\tau})\mathcal{K}_0(t,\varphi)\,dt-\int\limits_{q}^{q\exp(-\sigma/\rho)}(t^{\rho}-q^{\rho}e^{-\sigma})\mathcal{K}_0(t,\varphi)\,dt. \qquad /1/$$

З /1/ одержуємо, що $\omega(q,\varphi;1)=\pi\cos\rho(\pi-\varphi)\operatorname{cosec}\pi\rho$, $\omega(q,\varphi;0)\to 0$ при $q\to+\infty$.

<u>Теорема 1.</u> Нехай f – ціла функція порядку ρ, $0<\rho<1$, $\underline{\lim}_{r\to\infty} N(r)/V(r)=\mathcal{K}$, $0<\mathcal{K}<+\infty$, $\underline{\lim}_{r\to\infty} N(r)/V(r)=L$. Має місце нерівність

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)\leq\mathcal{K}\rho\pi^{-1}\inf_{0<q<+\infty}\int\limits_{0}^{\pi}\omega^{+}(q,\varphi;L/\mathcal{K})\,d\varphi, \qquad /2/$$

де ω визначається за /1/, і існує ціла функція f порядку ρ, $0<\rho<1$, для якої в /2/ має місце знак рівності.

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію. Нехай r_k - довільне число, $0 < r_k < \infty$, а $u_k(z)$ - субгармонічна в C функція порядку ρ, $0 < \rho < 1$, у якої ріссівська маса μ зосереджена на додатній півосі і

$$n(r, u_k) = \mu(\{z : |z| < r\}) = \begin{cases} K\rho r^\rho, & 0 \le r < r_k e^{-\tau/\rho}, \\ K\rho e^{-\tau} r_k^\rho, & r_k e^{-\tau/\rho} \le r < r_k, \\ K\rho e^{-\phi} r_k^\rho, & r_k \le r \le r_k e^{-\phi/\rho}, \\ K\rho r^\rho, & r_k e^{-\phi/\rho} \le r < \infty, \end{cases}$$

де $\tau = \tau(L/K)$; $\phi = \phi(L/K)$; $0 < L \le K < +\infty$.

Маємо

$$u_k(re^{i\varphi}) = \int_0^\infty n(rt, u_k) K_0(t, \varphi)\, dt = K\rho \Big\{ \int_0^\infty r^\rho t^\rho K_0(t, \varphi)\, dt -$$

$$- \int_{(r_k/r)\exp(-\tau/\rho)}^{(r_k/r)} (t^\rho r^\rho - r_k^\rho e^{-\tau}) K_0(t, \varphi)\, dt - \int_{(r_k/r)}^{(r_k/r)\exp(-\phi/\rho)} (t^\rho r^\rho - r_k^\rho e^{-\phi}) K_0(t, \varphi)\, dt \Big\} =$$

$$= K\rho r^\rho \omega(r_k/r, \varphi; L/K). \qquad /3/$$

Нехай спочатку $\rho(r) \equiv \rho$, $L < K$. Позначимо $K_1 = K + \varepsilon$, $L_1 = L + \varepsilon < K$, $\varepsilon > 0$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що нулі f додатні [1] $f(0) = 1$, $N(r) \le K_1 V(r)$ для всіх $r > 0$. Нехай послідовність $r_k \to \infty$ така, що $N(r_k) = L_1 V(r_k)$, $r = r_k/q$, $0 < q < +\infty$. Враховуючи /3/, одержуємо

$$\varliminf_{r \to \infty} T(r, u_k)/V(r) = K\rho\pi^{-1} \inf_{0 < q < \infty} \int_0^\pi \omega^+(q, \varphi; L_1/K)\, d\varphi.$$

Нехай $t = \ln r$, $t_k = \ln r_k$. Рівняння дотичних до графіка $y = K_1 e^{\rho t}$, проведених в точки $(t_k, L_1 e^{\rho t_k})$, мають вигляд $y_1(t) = K_1 \exp(\rho t_k - \tau)\rho(t - t_k) + L_1 \exp(\rho t_k)$, $y_2(t) = K_1 \exp(\rho t_k - \phi)\rho(t - t_k) + L_1 \exp(\rho t_k)$.

Враховуючи, що функція $N(e^t, 0, f)$ опукла відносно t, одержуємо $N(r, f^{-1}) \le N(r, u_k)$. Тоді $T(r, f) \le T(r, u_k)$ [3]. Маємо оцінку /2/ у випадку $\rho(r) \equiv \rho$. Перехід до $\rho(r) \not\equiv \rho$ робиться, так само, як і в праці [2].

У випадку $L=\mathcal{K}$ для цілої функції f з додатними нулями насправді виконується [I]

$$\lim_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)=\varkappa(\rho)\lim_{r\to\infty} N(r)/V(r), \qquad /4/$$

де $\varkappa(\rho)=1$ при $0{,}5\geq\rho>0$ і $\varkappa(\rho)=\operatorname{cosec}\pi\rho$ при $1>\rho>0{,}5$. Звідси випливає справедливість /2/, причому в лівій стороні /2/ нижню границю можна замінити на верхню.

Зауваження. Для $L=0$ з /2/ одержуємо

$$\lim_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)=0.$$

Покажемо, що оцінку /2/ уточнити не можна. При $L=0$ це очевидно, а при $L=\mathcal{K}$ випливає з /4/. Нехай $0<L<\mathcal{K}<+\infty$, $\rho(r)\equiv\rho$, $0<\rho<1$, (r_n) – послідовність чисел таких, що $r_n/r_{n-1}\to\infty$ при $n\to\infty$. Візьмемо цілу функцію f з додатними нулями такими, що

$$N(r)\sim\begin{cases}\mathcal{K}V(r), & r_{n-1}e^{-\sigma/\rho}\leq r\leq r_n e^{-\tau/\rho},\\ (\mathcal{K}\rho e^{-\tau}\ln(r/r_n)+L)V(r_n), & r_n e^{-\tau/\rho}\leq r<r_n,\\ (\mathcal{K}\rho e^{-\sigma}\ln(r/r_n)+L)V(r_n), & r_n\leq r\leq r_n e^{-\sigma/\rho},\end{cases}$$

де $\tau=\tau(L/\mathcal{K})$, $\sigma=\sigma(L/\mathcal{K})$ – визначені вище.

Нехай $\sqrt{r_{n-1}r_n}\leq r\leq\sqrt{r_n r_{n+1}}$. Легко показати, що

$$\ln|f(re^{i\varphi})|=\mathcal{K}\rho V(r)\,\omega(r_n/r,\varphi;L/\mathcal{K})+o(V(r)),\ r\to\infty. \qquad /5/$$

Враховуючи формулу /7.15/ з праці [I] і /5/, одержуємо

$$T(r,f)=\mathcal{K}\rho\pi^{-1}V(r)\int_0^\pi\omega^+(r_n/r,\varphi;L/\mathcal{K})\,d\varphi+o(V(r)),\ r\to\infty,$$

звідки бачимо, що в /2/ для функції f має місце знак рівності.

Теорема 2. Якщо f –ціла функція порядку ρ, $0<\rho<1$, то

$$\lim_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)\geq\lim_{r\to\infty} N(r)/V(r). \qquad /6/$$

Коли, крім того, нулі функції f додатні, то

$$\lim_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)\geq\varkappa(\rho)\lim_{r\to\infty} N(r)/V(r). \qquad /7/$$

Існують функції, що задовольняють умови теореми, для яких в /6/ і /7/ мають місце знаки рівності.

Доведення. Нехай $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} N(r)/V(r)=K, \underline{\lim\limits_{r\to\infty}} N(r)/V(r)=L$.
Для цілої функції f_1 з додатними нулями такими, що $N(r,f_1^{-1})=LV(r)+o(V(r))$, маємо $T(r,f_1)=L\varkappa(\rho)V(r)+o(V(r)), r\to\infty$. Оскільки $T(r,f)\geq(1+o(1))T(r,f_1)$ [3], одержуємо оцінку /7/. Оцінка /6/ очевидна. Покажемо, що вона точна. Нехай $0\leq L<K<+\infty, 0<\rho<1$; (r_k) – послідовність чисел таких, що $r_k/r_{k-1}\to\infty, k\to\infty$.
Для функції

$$\varphi(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-(z/n^{3/\rho})^{m_n}\right\},$$

де $m_n=[3K\rho n^2]$ при $r_{2k}\leq n^{3/\rho}<r_{2k+1}$ і $m_n=[3L\rho n^2]$ при $r_{2k+1}\leq n^{3/\rho}<r_{2k+2}$, в /6/ має місце знак рівності. Справді, добре видно, що $L\rho(1+o(1))r^\rho\leq n(r,0,\varphi)\leq K\rho(1+o(1))r^\rho, r\to\infty$,
$N(\rho_{2k},0,\varphi)=K(1+o(1))\rho_{2k}^\rho, N(\rho_{2k+1},0,\varphi)=L(1+o(1))\rho_{2k+1}^\rho$, $K\to\infty$, де $\rho_k=\sqrt{r_k r_{k+1}}$. Далі маємо [1]

$$T(r,\varphi)\leq \ln M(r,\varphi)\leq N(r,0,\varphi)+\sum_{n^{3/\rho}\leq r}(n^{3/\rho}/r)^{m_n}+$$

$$+\sum_{n^{3/\rho}>r}(r/n^{3/\rho})^{m_n}\leq N(r,0,\varphi)+\sum_{k=1}^{n-1}(k/n)^{3m_k/\rho}+1+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}(n/k)^{3m_k/\rho}\leq N(r,0,\varphi)+\sum_{k=1}^{\infty}(k/(k+1))^{3m_k/\rho}+2=N(r,0,\varphi)+O(1),$$

що доводить точність оцінки /6/.

Нехай $\varphi_1(z)$ – канонічний добуток з додатними нулями такими, що $N(r,0,\varphi_1)\sim V_1(r)+o(V_1(r)), \quad r\to\infty$, де

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, V_1(r)/V(r)=K, \quad \underline{\lim_{r\to\infty}}\, V_1(r)/V(r)=L.$$

Тоді $T(r,\varphi_1)=\varkappa(\rho)V_1(r)+o(V_1(r)), \ r\to\infty.$

Звідси

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\, T(r,\varphi_1)/V(r)\leq\varkappa(\rho)L,$$

що підтверджує точність оцінки /7/.

Теорема 3. Нехай f – ціла функція нульового порядку. Тоді

$$\varliminf_{r\to\infty} T(r,f)/V(r) = \varliminf_{r\to\infty} N(r)/V(r). \qquad /8/$$

Доведення. Нехай L, $\mathcal{K}$, L_1, $\mathcal{K}_1$ і послідовність (r_k) такі, як при доведенні теореми I. При $L=\mathcal{K}$ рівність /8/ добре відома. З рівності /4.16/ праці [I] одержуємо у випадку $L<\mathcal{K}$ $(0<\Delta<1,\ f(0)=1)$

$$T(\Delta r_k, f) = \Delta r_k \int_{\Delta r_k}^{\infty} N(t)t^{-2}dt \le \Delta r_k \left\{ \int_{\Delta r_k}^{r_k} \frac{N(t)}{t^2}dt + \int_{r_k}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_1 V(t)}{t^2}dt \right\} \le$$

$$\le \left(L_1(1-\Delta) + \Delta \mathcal{K}_1 \right) V(\Delta r_k)(1+o(1)),\ k\to\infty.$$

Звідси

$$\varliminf_{r\to\infty} T(r,f)/V(r) \le L_1(1-\Delta) + \Delta\mathcal{K}_1.$$

Спрямувавши ε і Δ до нуля, дістаємо твердження теореми.

Автор висловлює вдячність А.А.Гольдбергу за керівництво роботою.

Список літератури: I. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. 2. Кондратюк А.А. Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями. – Литовский математический сборник, 1967, т.7, № I. 3. Hellerstein S., Shea D.F. An extremal problem concerning entire functions with radially distributed zeros. Symposium on Complex Analysis Canterbury, 1973; Cambridge, 1974.

Стаття надійшла в редколегію 16.03.81

УДК 517.537.6

М.М.Хом"як

АНАЛОГИ ТЕОРЕМИ ВІМАНА ДЛЯ РЯДІВ ДІРІХЛЕ, ЯКІ ЗАДАЮТЬ ЦІЛІ ФУНКЦІЇ СКІНЧЕННОГО НИЖНЬОГО R – ПОРЯДКУ

При дослідженні асимптотичних властивостей цілих функцій, заданих рядами Тейлора, часто використовують метод Вімана – Валірона, причому у випадку, коли ціла функція має скінченний порядок, дістають дещо інші оцінки, ніж у випадку всіх цілих функцій без обмеження на ріст. Фентон [3] показав, що в ряді тверджень, зв"язаних з методом Вімана – Валірона, умову скінченності порядку можна замінити умовою скінченності нижнього порядку.

Останнім часом ряд математиків зацікавились розвитком методу Вімана – Валірона для рядів Діріхле з невід"ємними показниками. Застосування цього методу до цілих функцій, заданих такими рядами, пов"язане з труднощами, викликаними нерегулярним розподілом показників. Якщо у випадку цілих функцій скінченного R – порядку одержано більш-менш задовільні аналоги теореми Вімана, то для цілих функцій скінченного нижнього R – порядку вони не розглядалися. Вкажемо аналоги теореми Вімана для рядів Діріхле з невід"ємними показниками, які задають цілі функції скінченного нижнього R – порядку.

Нехай f – ціла функція, задана абсолютно збіжним в $\mathbb{C}$ рядом Діріхле

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad z=x+iy, \qquad /1/$$

де $a_0=1$ і $0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\to\infty\ (n\to\infty)$; $M(x,f)=\sup\{|f(x+iy)|: y\in R\}$; $\mu(x,f)$ і $\nu=\nu(x,f)$ – відповідно максимальний член і центральний індекс ряду /1/; $n(t)=\sum_{\lambda_n\leq t} 1$ – рахуюча функція послідовності (λ_n).

Розглянемо ряди /1/, для яких $\ln n(t)\leq Bt\ (t\geq t_0)$, де B – додатна стала. Отримані нижче оцінки виконуються зовні виняткових множин, для описання яких використовують поняття нижньої щільності. Нижньою щільністю dE вимірної множини $E \in [0,\infty)$ називають величину

$$dE = \underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_{E\cap[0,x]} dt .$$

<u>Теорема I</u>. Нехай f – ціла функція скінченного нижнього R-порядку λ, задана рядом /I/ $\ln n(t) < Bt \, (t \geq t_0)$, $0 < \delta < 1$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ і $\forall x \bar{\in} E$, $dE < \delta$, виконується нерівність

$$\ln M(x,f) \leq \exp\left\{\frac{(\lambda+\varepsilon)B}{\delta}\right\} \ln \mu(x,f). \qquad /2/$$

Приклад функції $f_1(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\ln n \ln\ln n}{\rho} + \ln n \sqrt{\ln\ln n}\right\} n^z$ вказує на точність оцінки /2/. Тоді $\lambda_n = \ln n$, $B = 1$, $\lambda = \rho$ і $\ln M(x,f_1) = (1+o(1)) e^{\rho} \ln \mu(x,f_1)$, $x \to \infty$.

У випадку, коли нижній R – порядок функції /I/ дорівнює 0, оцінку /2/ можна уточнити. Неважко показати, що для того щоб функція f мала нульовий нижній R -порядок, необхідне і достатнє існування опуклої неспадної додатної на $(-\infty,\infty)$ функції Φ, для якої існує послідовність (x_k), $x_k \to \infty$ $(k \to \infty)$, така що $\ln M(x_k, f) \leq \Phi(x_k)$ і $\Phi'(x) = o(\Phi(x))$, $x \to \infty$.

<u>Теорема 2.</u> Нехай f – ціла функція, задана рядом /I/, $\ln n(t) < Bt \, (t \geq t_0)$; $0 < \delta < 1$. Якщо існує функція Φ з вказаними вище властивостями, то $\forall \varepsilon > 0$ і $\forall x \bar{\in} E$, $dE < \delta$, виконуються нерівності

$$M(x,f) \leq \mu(x,f) \exp\{(B+\varepsilon)\lambda_{\nu}\} \leq$$
$$\leq \mu(x,f) \exp\left\{(B+\varepsilon)\Psi\left(\frac{1}{\delta} \ln \mu(x,f)\right)\right\}, \qquad /3/$$

де Ψ – функція, обернена до $\psi(x) = \int_a^x t\varphi'(t)dt$; φ – функція, обернена до Φ , a – додатна стала.

Приклад функції $f_2(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \exp\{-\ln n (\ln\ln n)^2\} n^z$ вказує [I] на точність оцінки /3/.

Важливим є клас цілих функцій /I/, для яких

$$\ln M(x_k, f) \le A x_k^{\rho}, \ A>0, \ \rho>1, \qquad /4/$$

де (x_k) – деяка послідовність; $x_k \to +\infty \ (k \to \infty)$.

Теорема 3. Нехай f – ціла функція, задана рядом /I/, $\ln n(t) \le bt \ (t \ge t_0)$ і $0<\delta<1$. Якщо виконується умова /4/, то $\forall \varepsilon>0$ і $\forall x \bar{\in} E$, $dE \le \delta$, має місце нерівність

$$\frac{M(x,f)}{\mu(x,f)} \le \exp\left\{(b+\varepsilon)\left(A\rho^{2\rho-1}(\rho-1)^{1-\rho}\delta^{1-\rho}\right)^{1/\rho}\left(\ln \mu(x,f)\right)^{\frac{\rho-1}{\rho}}\right\}. \qquad /5/$$

Приклад функції

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{b}\ln n\left(\ln^{\frac{1}{\rho-1}} n - B\right)\right\} n^{z}, \ \rho>1, \ B=\frac{1}{\rho-1}(A_\rho)^{\frac{1}{\rho-1}}, \ A>0,$$

вказує [2] на точність оцінки /5/.

Розглянемо випадок, коли $\lambda_n = \frac{1}{b}\ln n, \ b \in (0,+\infty)$, а

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln M(x,f)}{x \ln x} = A < \infty. \qquad /6/$$

Теорема 4. Нехай f – ціла функція, задана рядом /I/, $\lambda_n = \frac{1}{b}\ln n, \ b \in (0,+\infty)$ і виконується умова /6/. Тоді $\forall \varepsilon>0$ $\forall x \bar{\in} E$, $dE=0$, має місце нерівність

$$M(x,f) \le \begin{cases} \mu(x,f)\left(\ln \mu(x,f)\right)^{Ab-\frac{1}{2}+\varepsilon}, & A \ge \frac{1}{2b}, \\ (1+\varepsilon)\,\mu(x,f), & A < \frac{1}{2b}. \end{cases} \qquad /7/$$

Приклад функції

$$f_4(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\exp\left\{-\frac{n^{\rho}}{(\ln n)^{k}}\right\} n^{z}, \ \rho>0, \ k>0,$$

вказує на точність оцінки /7/. У цьому випадку $A=\frac{1}{\rho}$

$$M(x,f_4) \ge (1+o(1))\begin{cases} K\mu(x,f_4)\left(\ln \mu(x,f_4)\right)^{A-\frac{1}{2}}\left(\ln\ln \mu(x,f_4)\right)^{\frac{k-1}{\rho}+\frac{1}{2}}, & A \ge \frac{1}{2}, \\ \mu(x,f_4), & A < \frac{1}{2} \end{cases}$$

при $x \to \infty$, де K – додатна стала.

Автор висловлює глибоку вдячність М.М.Шереметі за керівництво роботою.

Список літератури: I. Х о м ' я к М.М. Теорема типу Вімана для цілих функцій нульового порядку за Ріттом, заданих рядами Діріхле. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат, вип. I8, 1981. 2. Х о м ' я к М. М. Асимптотичні властивості цілих функцій, заданих рядами Діріхле. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. I4, 1979. 3. Fenton P.C. Some results of Wiman-Valiron type for integral functions of finite lower order. - Ann of Math., 1976, v. 103, N2.

Стаття надійшла в редколегію 20.02.81

УДК 517.535.4

М.М.Шеремета

ПРО ЗРОСТАННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ - аналітична в крузі $\{z:|z|<R\}$, $0<R\leq\infty$, функція, причому, якщо $0<R<\infty$, то f має на $\{z:|z|=R\}$ принаймні одну особливу точку, а коли $R=\infty$, то f - трансцендентна ціла функція. Порядок ρ і тип τ зростання функції f можна виразити за допомогою формул

$$\rho=\varlimsup_{r\to R}\ln\ln M(r)/\ln\frac{Rr}{R-r},\ \tau=\varlimsup_{r\to R}\left(\frac{Rr}{R-r}\right)^{-\rho}\ln M(r)\ (0<\rho<\infty),$$

де $M(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r<R\}$, а $\frac{Rr}{R-r}$ при $R=\infty$ розуміємо як r. Приймемо $\alpha_n=(\sqrt[n]{|a_n|}-1/R)^+$. Згідно з формулою Коші-Адамара $\alpha_n\to 0$ $(n\to\infty)$. Позначимо

$$\varkappa=\varlimsup_{n\to\infty}\ln n/\ln\frac{1}{\alpha_n},\ \sigma=\varlimsup_{n\to\infty}n\alpha_n^{\varkappa}\ (0<\varkappa<\infty).$$

За формулами Адамара для знаходження порядку і типу цілої функції [2] маємо $\rho=\varkappa$ і $\sigma=\tau\rho e$, так що ріст цілої функції f прямо залежить від швидкості прямування $\sqrt[n]{|a_n|}$ до нуля, тобто до $1/R$. Існують такою формули для знаходження порядку й типу через коефіцієнти у випадку, коли $0<R<\infty$ [I, 3]. Проте вони не вказують безпосередньо на зв"язок між зростанням f і прямуванням $\sqrt[n]{|a_n|}$ до $1/R$, точніше, швидкістю прямування α_n до 0. Такий зв"язок розглянемо у цій замітці.

Теорема I. Якщо $0<R<\infty$, то $\rho=(\varkappa-1)^+$. Нехай $\rho<\infty$. Оскільки при $0<R<\infty$ виконується співвідношення $(R-r)/r\sim\ln\frac{R}{r}$, $r\to R$, то $\ln\frac{Rr}{R-r}\sim-\ln\ln\frac{R}{r}$, $r\to R$, і $(\forall\rho_1<\rho)(\forall r\in[r_0(\rho_1),R))\left\{M(r)\le\exp\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-\rho_1}\right\}$. Тому за нерівністю Коші $(\forall n\ge 0)(\forall r\ge r_0(\rho_1))\left\{|a_n|R^n\le\left(\frac{R}{r}\right)^n M(r)\le\exp\left(\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{-\rho_1}+n\ln\frac{R}{r}\right)\right\}$. Вибравши r так, щоб $\ln\frac{R}{r}=(n/\rho_1)^{-1/(\rho_1+1)}$, одержуємо $(\forall n\ge n_0(\rho_1))$ $\left\{|a_n|R^n\le\exp\left(K(\rho_1)\,n^{\rho_1/(\rho_1+1)}\right)\right\}$, де $K(\rho)=(1+\rho_1)\rho_1^{-\rho_1/(\rho_1+1)}$. Звідси випливає, що $\sqrt[n]{|a_n|}\le\frac{1}{R}\exp\left(K(\rho)n^{-1/(\rho_1+1)}\right)=\frac{1}{R}+\frac{K(\rho_1)}{R}(1+o(1))n^{-1/(\rho_1+1)}$ при $n\to\infty$ і, таким чином, $\alpha_n\le(1+o(1))\frac{K(\rho_1)}{R}\,n^{-1/(\rho_1+1)}$ при $n\to\infty$, а отже, внаслідок довільності ρ_1 одержуємо нерівність $(\varkappa-1)^+\le\rho$, яка є очевидною при $\rho=\infty$.

Щоб завершити доведення, треба показати, що $\rho\le(\varkappa-1)^+$. При $\varkappa=\infty$ ця нерівність очевидна; якщо ж $\varkappa<\infty$, то $(\forall\varkappa_1>\max\{1,\varkappa\})$ $(\forall n\ge n_0(\varkappa_1))\left\{\alpha_n\le n^{-1/\varkappa_1}\right\}$, тобто $|a_n|R^n\le(1+Rn^{-1/\varkappa_1})^n\le\exp\left\{Rn^{(\varkappa_1-1)/\varkappa_1}\right\}$. Тому $\forall r\in[0,R)$ виконується

$$M(r)\le\sum_{n=n_0(\varkappa_1)}^{\infty}|a_n|r^n+\sum_{n=0}^{n_0(\varkappa_1)-1}|a_n|r^n=\sum_{n=n_0(\varkappa_1)}^{\infty}|a_n|R^n\left(\frac{R+r}{2R}\right)^n\left(\frac{2r}{R+r}\right)^n+O(1)\le$$

$$\le\frac{R+r}{R-r}\max\left\{\exp\left(Rn^{(\varkappa-1)/\varkappa_1}+n\ln\frac{R+r}{2R}\right):n\ge 0\right\}+O(1)\le$$

$$\le\frac{R+r}{R-r}\exp\left(\max\left\{Rt^{(\varkappa_1-1)/\varkappa_1}+t\ln\frac{R+r}{2R}:t\ge 0\right\}\right)+O(1)=$$

$$=\frac{R+r}{R-r}\exp\left(\frac{\varkappa_1}{R(\varkappa_1-1)}\ln\frac{2R}{R+r}\right)^{1-\varkappa_1}+O(1),\quad r\to R.$$

Оскільки $\frac{1}{R}\ln\frac{2R}{R+r}\sim\frac{R-r}{2r}$ при $r\to R$, то одержуємо

$$M(r)\le\frac{2R}{R-r}\exp\left((1+o(1))\frac{\varkappa_1-1}{\varkappa_1}\frac{2r}{R-r}\right)^{\varkappa_1-1}+O(1)=$$

$$= \exp\left\{(1+o(1))\left(\frac{2}{R}\,\frac{x_1-1}{x_1}\,\frac{R_2}{R-r}\right)^{x_1-1}\right\},\ r\to R,$$

тобто $\rho\le x_1-1$, і внаслідок довільності x_1, $\rho\le\max\{1,x\}-1=(x-1)^+$, що і завершує доведення теореми I.

Наслідок I [3]. Якщо $R=1$, то $\rho=\frac{\gamma}{1-\gamma}$, $\gamma=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln n}$.

Дійсно, коли $x<\infty$, то $(\forall x_1>\max\{1,x\})(\forall n\ge n_0(x_1))\{\alpha_n\le n^{-1/x_1}\}$ і $|a_n|\le(1+n^{-1/x_1})^n\le\exp n^{(x_1-1)/x_1}$, тобто $\gamma\le\frac{x_1-1}{x_1}$. З останньої нерівності випливає, що $\gamma\le 1$ і $\gamma/(1-\gamma)\le x_1-1$. Тому внаслідок довільності γ_1 одержуємо нерівність $\gamma/(1-\gamma)\le\le\max\{1,x\}-1=(x-1)^+$, яка очевидна при $x=\infty$. З іншого боку, коли $\gamma<1$, то $(\forall\gamma_1\in(\gamma,1))(\forall n\ge n_0(\gamma_1))\{|a_n|\le\exp n^{\gamma_1}\}$, звідки випливає $\alpha_n\le(1+o(1))n^{-(1-\gamma_1)}$ при $n\to\infty$ і внаслідок довільності γ_1 одержуємо нерівність $x\le 1/(1-\gamma)$, або $(x-1)^+\le\gamma/(1-\gamma)$, яка очевидна при $\gamma=1$. Таким чином, за теоремою I $\gamma/(1-\gamma)=(x-1)^+=\rho$.

Теорема 2. Якщо $0<R<\infty$, то $\tau=\frac{R\sigma}{\rho}\left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^{\rho+1}$.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми I. З теореми 2 випливає наступне твердження.

Наслідок 2 [3]. Якщо $R=1$, то $\tau=\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{\rho}{\rho+1}\right)^{\rho+1}$, $\beta=\varlimsup_{n\to\infty}n^{-\rho}(\ln^+|a_n|)^{\rho+1}$.

Список літератури: I. Говоров Н.В. О связи между ростом функции, аналитической в круге, и коэффициентами ее степенного разложения. – Тр. Новочерк. политехн. ин-та, I959, т.I00. 2. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, I956. 3. Мак-Лейн Г. Асимптотические значения голоморфных функций. – М.: Мир, I966.

Стаття надійшла в редколегію I2.02.8I

УДК 513.88

В.Е.Лянце, О.Г.Сторож

УМОВИ ЗБІГАННЯ ДВОХ ОПЕРАТОРІВ

Приймемо такі позначення: $B(X,Y)$ – простір лінійних обмежених операторів $X \to Y$, де X, Y – нормовані простори; $B(X)=B(X,X)$; $D(T)$, $R(T)$, $Z(T)$ – область визначення, область значень і ядро оператора T; 1_X – одиничний оператор простору X; $T/_R$ – звуження оператора T на множину R; $\bar{R}$ – замикання множини R. Далі, нехай H – фіксований комплексний гільбертів простір, L, L_0 – замкнуті, щільно визначені лінійні оператори в H, причому $L_0 \subset L$. Замість $D(L)$ пишемо $D[L]$, коли множина розглядається як гільбертів простір зі скалярним добутком графіка оператора L. Крім того, заданими вважаємо оператори $\Phi_i \in B(H, U_i)$, $i=1,2$, де U_1, U_2 – гільбертові простори такі, що їх ортогональна сума $U = U_1 \oplus U_2$ крайовий простір для (L, L_0). Тобто існує $\Gamma \in B(D[L], U)$ таке, що (U, Γ) – крайова пара для (L, L_0); означення крайової пари наведено у праці [3].

Розглянемо оператори W_i, $\hat{W}_i \in B(D[L], U_i)$, $i=1,2$, такі що

$$R(W_1 - \Phi_1) = R(\hat{W}_1 - \Phi_1) = U_1, \tag{1}$$

$$R(W_2) = R(\hat{W}_2) = \overline{R(\Phi_2)}, \tag{2}$$

$$Z(W) \supset D(L_0), \quad Z(\hat{W}) \supset D(L_0), \tag{3}$$

де $W, \hat{W} \in B(D[L], U)$ визначаються співвідношеннями

$$W_y = (W_1 y, W_2 y), \quad \hat{W}_y = (\hat{W}_1 y, \hat{W}_2 y).$$

Встановлено умови збігання операторів S_W, $S_{\hat{W}} : H \to H$, де

$$D(S_W) = \{y \in D(L) : W_1 y = \Phi_1 y\}, \tag{4}$$

$$S_W y = Ly + \Phi_2^* W_2 y, \quad y \in D(S_W); \qquad /5/$$

$S_{\hat{W}}$ визначається співвідношеннями типу /4/–/5/ з заміною W_i на $\hat{W}_i$; $\Phi_2^* \in B(U_2, H)$ – оператор, спряжений до Φ_2.

Відзначимо, що питання про рівність операторів, породжених співвідношеннями вказаного типу, постає при дослідженні умов взаємної спряженості деяких диференціально-граничних операторів у просторі вектор-функцій. Крім того, воно зв"язане з задачею про самоспряжені розширення деяких нещільно визначених операторів.

Теорема. $S_W = S_{\hat{W}}$ тоді і тільки тоді, коли існує $\Omega \in B(U_1 \oplus \overline{R(\Phi_2)})$ такий, що $\Omega^{-1} \in B(U_1 \oplus \overline{R(\Phi_2)})$, $\Omega|_{\overline{R(\Phi_1)}} = 1_{\overline{R(\Phi_1)}}$, $\Omega|_{\overline{R(\Phi_2)}} = 1_{\overline{R(\Phi_2)}}$, $W = \Omega \hat{W}$.

Доведення. Нехай оператор Ω з потрібними властивостями існує. Розглядаючи його як відображення з $\overline{R(\Phi_1)} \oplus [U_1 \ominus \overline{R(\Phi_1)}] \oplus \overline{R(\Phi_2)}$ в себе / $\ominus$ – знак ортогонального доповнення/, бачимо, що він має вигляд

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1_{\overline{R(\Phi_1)}} & \Omega_{12} & 0 \\ 0 & \Omega_{22} & 0 \\ 0 & \Omega_{32} & 1_{\overline{R(\Phi_2)}} \end{pmatrix}. \qquad /6/$$

Звідси випливає, що $W_1 = C_1 \hat{W}_1$, де $C_1 = \begin{pmatrix} 1_{\overline{R(\Phi_1)}} & \Omega_{12} \\ 0 & \Omega_{22} \end{pmatrix}$.

Крім того, зрозуміло, що $\Phi_1 = C_1 \Phi_1$, а тому $(W_1 - \Phi_1) = C_1(\hat{W}_1 - \Phi_1)$. Зі зворотності Ω випливає зворотність C_1 /[4], задача 56/, так що $Z(W_1 - \Phi_1) = Z(\hat{W}_1 - \Phi_1)$, тобто $D(S_W) = D(S_{\hat{W}})$.

Далі, для всіх $y \in D(S_W)$,

$$W_2 y = \Omega_{32}(\hat{W}_1 y - P_1 \hat{W}_1 y) + \hat{W}_2 y = \Omega_{32}(\hat{W}_1 y - P_1 \hat{W}_1 y) + \hat{W}_2 y = \hat{W}_2 y,$$

де P_1 – ортопроектор $U_1 \to \overline{R(\Phi_1)}$. Тепер вже видно, що $S_W = S_{\hat{W}}$.

Навпаки, нехай $S_W = S_{\hat{W}}$. Тоді $Z(W_1 - \Phi_1) = Z(\hat{W}_1 - \Phi_1)$. Використовуючи (1) і "лему про трійку" [I], робимо висновок про існування $C_1 \in B(U_1)$ такого, що $C_1^{-1} \in B(U_1)$, $(W_1 - \Phi_1) = C_1(\hat{W}_1 - \Phi_1)$. Беручи до уваги /3/, переконуємось, що $\Phi_1 /_{D(L_0)} = C_1 \Phi_1 /_{D(L_0)}$. Продовжуючи це співвідношення по неперервності, бачимо, що

$$\Phi_1 = C_1 \Phi_1, \qquad /7/$$

а отже

$$W_1 = C_1 \hat{W}_1. \qquad /8/$$

Відзначимо, що, беручи до уваги /7/, $C_1 /_{\overline{R(\Phi_1)}} = 1_{\overline{R(\Phi_1)}}$, а тому C_1, розглядуваний як відображення $\overline{R(\Phi_1)} \oplus [U_1 \ominus \overline{R(\Phi_1)}]$ в себе, визначається матрицею

$$\begin{pmatrix} 1_{\overline{R(\Phi_1)}} & \Omega_{21} \\ 0 & \Omega_{22} \end{pmatrix}. \qquad /9/$$

Далі, у розглядуваній ситуації для всіх $y \in D(S_W)$ $\Phi_2^* W_2 y = \Phi_2^* \hat{W}_2 y$, тобто $Z(\Phi_2^*(W_2 - \hat{W}_2)) \supset Z(\hat{W}_1 - \Phi_1)$. Але $R(W_2 - \hat{W}_2) \subset \overline{R(\Phi_2)} = U_2 \ominus Z(\Phi_2^*)$, тому $Z(\Phi_2^*(W_2 - \hat{W}_2)) = Z(W_2 - \hat{W}_2)$. Таким чином, $Z(W_2 - \hat{W}_2) \supset Z(\hat{W}_1 - \Phi_1)$. Застосовуючи ще раз "лему про трійку", бачимо, що $W_2 - \hat{W}_2 = C_2(\hat{W}_1 - \Phi_1)$, де $C_2 \in B(U_1, \overline{R(\Phi_2)})$. Міркуючи так само, як при виведенні співвідношень /7/ – /8/, отримуємо

$$C_2 /_{\overline{R(\Phi_1)}} = 0, \qquad W_2 = C_2 \hat{W}_1 + \hat{W}_2. \qquad /II/$$

Враховуючи /8/, /II/, приходимо до висновку, що

$$W = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & 1_{\overline{R(\Phi_2)}} \end{pmatrix} \hat{W}.$$

Безпосередня перевірка показує, що оператор, який визначається матрицею у правій частині останнього співвідношення, задовольняє потрібні вимоги.

Список літератури: 1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976. 2. Лянце В.Е., Сторож О.Г. Про збурення крайового оператора. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. 14, 1979. 3. Лянце В.Е., Сторож О.Г. Умови взаємної спряженості деяких замкнутих операторів в термінах абстрактних граничних операторів. - ДАН УРСР, сер. А, 1980, № 6. 4. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. - М.: Мир, 1970.

Стаття надійшла в редколегію 16.03.81

УДК 517.535.4

О.В.Веселовська

ПРО НИЖНІЙ ПОРЯДОК ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай f - ціла функція. Через $\rho(f)$, $\lambda(f)$ позначимо відповідно порядок і нижній порядок функції f, через $q(f)$ - її рід. При нескінченному $\rho(f)$ вважатимемо $q(f)$ також нескінченним.

Відомо, що ріст цілої функції тісно пов'язаний з розподілом її нулів. У цій статті досліджуємо властивості нижнього порядку $\lambda(f)$ залежно від розподілу нулів функції f та її роду. Наведені нижче теореми узагальнюють відповідні результати з праць [1, 3, 4].

Позначимо через $n(t,0)$ кількість нулів функції f в крузі $\{z : |z| \le t\}$.

Теорема 1. Нехай $f(z)$, $f(0)=1$, $Re f'(0) \ge 0$ - ціла функція роду $q(f) \ge 1$, нулі $\{a_k\}$ якої лежать в області $\{z : Re z > 0\}$. Тоді $\lambda(f) \ge 1$.

Теорема 2. Нехай f - ціла функція роду $q(f) \ge 1$, $f(0)=1$ і $Re f'(0) < 0$, а нулі $\{a_k\}$ функції f лежать в області $\{z = r \cdot e^{i\theta} : \cos\theta \ge \psi(r)\}$, причому функція $\psi \equiv 0$, коли $\int_0^{\infty} \frac{n(t,0)}{t^2} dt < \infty$,

і задовольняє умови

1/ $0<\psi(r)\leq 1$, ψ – незростаюча,

2/ $\psi(r)\int_0^r \frac{n(t,0)}{t^2}dt\to\infty$ при $r\to\infty$,

коли $\int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^2}dt=\infty$.

Тоді $\lambda(f)\geq 1$.

Для доведення цих теорем потрібні наступні леми. Через $T(r,f)$ позначимо характеристику Неванлінни функції f .

<u>Лема I</u> [I]. Якщо ω – ціла функція роду q , то

$$T(r,\omega)=o(r^{q+1}).$$

<u>Лема 2</u> [2]. Нехай u , v – цілі трансцендентні функції і $w(z)=u(v(z))$. Тоді

$$3T(r,w)\geq T(r^{n+1},u)$$

для довільного фіксованого натурального n і достатньо великих r .

Перейдемо до доведення теореми I. Розглянемо спочатку випадок, коли нулі функції f задовольняють умову

$$\sum_k \frac{1}{|a_k|}<\infty.$$

Тоді

$$f(z)=h(z)\prod_k\left(1-\frac{z}{a_k}\right),$$

де h – ціла функція, що не має нулів і не є тотожньо сталою, оскільки $q(f)>1$. Крім того, $h(z)=e^{g(z)}$, де g – відмінна від сталої ціла функція, тому справедлива рівність

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_k\left(1-\frac{z}{a_k}\right).$$

Використовуючи відомі співвідношення між характеристиками [I] та лему I, отримуємо

$$T(r,f)=T(r,e^{g(z)})+o(r). \qquad /1/$$

Припустимо, що g – ціла трансцендентна функція. Тоді на основі леми 2

$$T(r,f)\geq\frac{1}{3}T(r^{n+1},e^z)+o(r),$$

де n – довільне фіксоване натуральне число; r – досить велике.

Таким чином, бачимо, що

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{r} = \infty,$$

а це й означає, що $\lambda(f) \geq 1$.

Нехай тепер g – многочлен. Відомо, що

$$T(r, e^{g(z)}) \sim \frac{|b|}{\pi} r^{p}, \quad r\to\infty,$$

де b – коефіцієнт при найстаршому степені многочлена g; p – степінь цього многочлена. Це разом з /I/ знову дає $\lambda(f) \geq 1$.

Розглянемо тепер випадок, коли

$$\sum_k \frac{1}{|a_k|} = \infty.$$

Запишемо для функції f формулу Шварца-Йенсена [I]

$$\ln f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\varphi})| \frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}\, d\varphi -$$

$$-\sum_{|a_k|<R} \ln \frac{R^2 - \bar{a}_k z}{R(z-a_k)} + iC,$$

де C – дійсна стала; $|z| < R$. Продиференціювавши її та прийнявши $z=0$, одержимо

$$f'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\varphi})| \frac{d\varphi}{Re^{i\varphi}} + \sum_{|a_k|<R} \frac{|a_k|^2 - R^2}{a_k \cdot R^2}.$$

Відокремивши дійсну частину, матимемо

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\varphi})|\cos\varphi\, d\varphi = A\cdot R + \sum_{|a_k|<R}\left(\frac{R}{|a_k|} - \frac{|a_k|}{R}\right)\cos\beta_k,$$

де $A = \operatorname{Re} f'(0)$, $\beta_k = \arg a_k$.

Легко перевірити, що

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\varphi})|\cos\varphi\, d\varphi \leq 4T(R,f).$$

Тому

$$4T(R,f) \geq A\cdot R + \sum_{|a_k|<R}\left(\frac{R}{|a_k|} - \frac{|a_k|}{R}\right)\cos\beta_k. \qquad /2/$$

Оскільки для всіх k $\cos\beta_k > 0$, $A \geq 0$, то

$$4T(R,f) \geq \left(\frac{R}{|a_1|} - \frac{|a_1|}{R}\right)\cos\beta_1,$$

звідки випливає, що

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{T(R,f)}{R} \neq 0$$

і, отже, $\lambda(f) \geq 1$. Теорема I доведена.

Зауваження I. Побудовано приклад цілої функції $f(z), f(0)=1$, $Re f'(0)=0$ роду $q(f)=1$ з нулями на уявній осі та нульового нижнього порядку.

Доведення теореми 2 розбивається на два випадки:

$$I) \quad \sum_k \frac{1}{|a_k|} < \infty;$$

$$II) \quad \sum \frac{1}{|a_k|} = \infty.$$

Доведення випадку I аналогічне доведенню цього випадку в теоремі I.

Випадок II. Виходимо з формули /2/. То, на основі умови I/ виконується

$$4T(R,f) \geq A\cdot R + \psi(R) \sum_{|a_k|<R} \left(\frac{R}{|a_k|} - \frac{|a_k|}{R}\right).$$

Перетворимо суму $\sum_{|a_k|<R} \left(\frac{R}{|a_k|} - \frac{|a_k|}{R}\right)$ таким чином

$$\sum_{|a_k|<R} \left(\frac{R}{|a_k|} - \frac{|a_k|}{R}\right) = R\int_0^R \frac{n(t,0)}{t^2}dt + \frac{1}{R}\int_0^R n(t,0)dt.$$

З останньої рівності та умови I/ випливає, що

$$4T(R,f) \geq AR + R\psi(R)\int_0^R \frac{n(t,0)}{t^2}dt.$$

Оскільки ряд $\sum_k \frac{1}{|a_k|}$ – розбіжний, то розбіжний також інтеграл [I]

$$\int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^2}dt.$$

Тоді, використовуючи умову 2), маємо

$$\lim_{R\to\infty} \frac{T(R,f)}{R} = \infty,$$

що завершує доведення теореми.

Зауваження 2. Побудовано також приклад цілої функції $f(z)$, $f(0)=1$, $Re f'(0) < 0$ роду $q(f)=1$ і нульового нижнього порядку, нулі якої розташовані на кривій $\{z = r\cdot e^{i\theta} : \cos\theta = \psi(r)\}$, де ψ – функція, що задовольняє умову I/ і не задовольняє умову 2)

Наведемо тепер без доведення дві теореми, які узагальнюють доведені вище теореми у випадку скінченного роду.

Теорема 3. Нехай f – ціла функція скінченного роду $q = q(f) \geq 1, f(0) \neq 0$, нулі якої лежать в області $\{z : \operatorname{Re} z^q > 0\}$

$$\operatorname{Re} \frac{d^q}{dz^q} \ln f(z) \Big|_{z=0} \geq 0.$$

Тоді $q \leq \lambda(f) \leq \rho(f) \leq q+1.$

Теорема 4. Нехай f – ціла функція скінченного роду $q = q(f) \geq 1$, $f(0) \neq 0$. Якщо

$$\operatorname{Re} \frac{d^q}{dz^q} \ln f(z) \Big|_{z=0} < 0$$

і нулі функції f лежать в області $\{z = r e^{i\theta} : \cos q\theta \geq \psi(r)\}$, причому функція $\psi \equiv 0$, коли

$$\int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{q+1}} dt < \infty$$

і задовольняє умови

$$0 < \psi(r) \leq 1 \qquad , \ \psi \text{ – незростаюча},$$

$$\psi(r) \int_0^r \frac{n(t,0)}{t^{q+1}} dt \to \infty \quad \text{при } r \to \infty \ ,$$

коли $\displaystyle\int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{q+1}} dt = \infty,$

то $q \leq \lambda(f) \leq \rho(f) \leq q+1.$

Автор висловлює вдячність А.А.Кондратюку за керівництво роботою.

Список літератури: I. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. 2. Хейман Уолтер К. Мероморфные функции. – М.: Мир, 1966. 3. Edrei A. and W. H. J. Fuchs. On the growth of meromorphic functions with several deficient values. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, N93. 4. Kobayashi T. On the lower order an entire function.- Kodai Math. Sem. Rep., 1976, N27.

Стаття надійшла в редколегію 05.03.81

УДК 517.946

С.П.Лавренюк

СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ ОДНІЄЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

У працях [2, 3, 4] розглядається стійкість за Ляпуновим тривіального розв"язку однієї змішаної задачі для рівняння коливання пластинки відносно певної метрики, яка дає змогу поширити відомі результати для класичних розв"язків на узагальнені по просторових змінних розв"язки.

Нехай маємо задачу

$$\Delta^2 u + \mathrm{div}(b(x)\nabla u) + c(x)u + u_{tt} = f(x,t,u,u_t), \qquad /1/$$

$$u\big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_\Gamma = 0, \qquad /2/$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad /3/$$

в області $\Omega = D\times J$, де $J = \{0 < t < +\infty\}$;

$D = \{x \in R^n :\ 0 < x_i < 1,\ i = 1,\dots,n\}$,

Γ – бічна поверхня Ω .

Позначимо через ∂D межу області D і через D_0 множину $\{x \in D,\ t=0\}$. Нехай функція $u(x,t)$, яка належить простору

$$Y = C^{4,2}_{x,t}(\Omega) \cap C^{2,2}_{x,t}(\Omega \cup \Gamma \cup \bar{D}_0),$$

є розв"язком задачі /1/ - /3/. Позначимо через $\tilde{C}^2(\bar{D})$ множину функцій $v(x) \in C^2(\bar{D})$, що задовольняють умову $v\big|_{\partial D} = 0$. Нехай $\tilde{H}^2(D)$ замикання $\tilde{C}^2(\bar{D})$ у просторі $H^2(D)$ [1]. Тоді для довільної функції $v(x) \in \tilde{H}^2(D)$ справедлива тотожність

$$\int_D \Big[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - b(x)\nabla u\,\nabla v + c(x)uv + u_{tt}v - fv\Big]dx \equiv 0. \quad /4/$$

Розглянемо тепер функцію $u(x,t)$ як функцію, визначену на J зі значеннями в деякому гільбертовому просторі H . Позначимо через

$C^k(J; H^l(D))$ множину k раз неперервно диференційованих на J функцій зі значеннями у гільбертовому просторі $H^l(D)$, а через B усі функції $u(x,t)$, які належать множині

$$C^2(J; L^2(D) \cap C^1(J; \tilde{H}^2(D)).$$

Означення I. Функцію $u \in B$ називаємо узагальненим по просторових змінних розв"язком задачі /I/ – /3/ в області Ω, якщо вона задовольняє тотожність /4/ для будь-якої функції $v(x) \in \tilde{H}^2(D)$.

Отже, класичний розв"язок задачі /I/ – /3/ буде і узагальненим по просторових змінних розв"язком цієї задачі. Навпаки, якщо $u(x,t) \in Y$ узагальнений по просторових змінних розв"язок задачі /I/ – /3/, то аналогічно, як і в праці [I], можна показати, що $u(x,t)$ класичний розв"язок цієї задачі.

Введемо на множині B, метрику за формулою

$$\rho(u,v) = \left\{ \int_D \left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial (u-v)}{\partial x_i} \right)^2 + (u-v)^2 + \left(\frac{\partial (u-v)}{\partial t} \right)^2 \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

і припустимо, що $u \equiv 0$ – розв"язок рівняння /I/.

Означення 2. Нульовий розв"язок $u \equiv 0$ задачі /I/ – /3/ називається стійким за Ляпуновим на множині B відносно метрики ρ, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що при виконанні нерівності $\rho(u,0)|_{t=0} < \delta$ нерівність $\rho(u,0) < \varepsilon$ справедлива для всіх $t > 0$.

Теорема. Нехай $f(x,t,u,u_t) = p_0(t) f_0(x,u) + p_1(t) f_1(x,u_t)$. Якщо виконуються умови: I/ функція $p_0(t)$ диференційована, $p_0(t) \leq 0$, $p_0'(t) \geq 0$, $t \in J$; $\sup_{t \in J} |p_0(t)| < +\infty$; 2/ функція $p_1(t)$ неперервна і $p_1(t) \leq 0$, $t \in J$; 3/ функції $x \to f_i(x,\xi)$ вимірні для всіх $\xi \in R^1$; $i = 0,1$; 4/ функції $\xi \to f_i(x,\xi)$ неперервні майже для всіх $x \in D$, $i = 0,1$; 5/ справедлива оцінка $|f_i(x,\xi)| \leq K|\xi|$ майже для всіх $x \in D$ і для всіх $\xi \in R^1$, $i = 0,1$; 6/ $f_i(x,\xi)\,\xi \geq 0$ для всіх $\xi \in R^1$, $i = 0,1$; 7/ $b(x), c(x) \in C(\bar{D})$, $b(x) \leq b_0$, $b_0 \geq 0$, $c(x) \geq -c_0$, $c_0 \geq 0$,

$$\frac{n\pi^2}{3}-b_0>0, \quad \frac{n^2\pi^4}{3}-c_0>0,$$

то нульовий розв"язок задачі /1/ – /3/ стійкий за Ляпуновим на множині B відносно метрики ρ.

Доведення: Розглянемо на множині B функціонал

$$V(u)=\int_D\Big[\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\Big)^2-b(x)\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2+c(x)u^2+$$

$$+u_t^2-2\rho_0(t)\int_0^u f_0(x,\xi)\,d\xi\Big]dx.$$

Перш за все зазначимо, що, завдяки умовам /3/ – 5/, теореми функції $f_0(x,u), f_1(x,u_t)\in L^2(D)$ для будь-якої $u(x,t)\in B$ при кожному $t\in J$. З умови 6/ випливає нерівність

$$\int_0^u f_0(x,\xi)\,d\xi\geq 0 \qquad /5/$$

майже для всіх $x\in D$ і для всіх $t\in J$. Крім того,

$$\Big|\int_0^u f_0(x,\xi)\,d\xi\Big|\leq K_1 u^2. \qquad /6/$$

Для функцій $u(x,t)\in B$ легко довести нерівності

$$\int_D u^2_{x_i x_j}(x,t)\,dx\geq\pi^2\int_D u^2_{x_i}(x,t)\,dx, \qquad /7/$$

$$i,j=1,\dots,n,$$

$$\int_D u^2_{x_i}(x,t)\,dx\geq\pi^2\int_D u^2(x,t)\,dx \qquad /8/$$

$$i=1,\dots,n,$$

справедливі при $t\in J$.

Враховуючи умови 1/, 7/ теореми та нерівності /5/, /7/, /8/, одержуємо нерівність

$$V(u)\geq\gamma_0\rho^2(u,0), \qquad /9/$$

де $\gamma_0=\min\Big\{\frac{1}{3};\ \frac{n\pi^2}{3}-b_0;\ \frac{n^2\pi^4}{3}-c_0\Big\}$.

На основі умов 1/, 7/ і нерівності /6/ записуємо нерівність

$$V(u)\leq\gamma_1\rho^2(u,0), \qquad /10/$$

де $\gamma_1=\max\Big\{1;\ \max_{x\in\bar D}|b(x)|;\ 2K_1\sup_{t\in J}|\rho_0(t)|+\max_{x\in\bar D}|c(x)|\Big\}$.

Обчислимо тепер dV/dt уздовж довільного узагальненого за просторовими змінними розв"язку задачі /I/ – /3/. Маємо

$$\frac{dV}{dt}=2\int_D\Big[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\,\frac{\partial^2 u_t}{\partial x_i\partial x_j}-b(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_t}{\partial x_i}+c(x)uu_t+$$
$$+u_{tt}\,u_t-p_0(t)f_0(x,u)u_t\Big]dx-2p_0'(t)\int_D\Big[\int_0^u f_0(x,\xi)\,d\xi\Big]dx.$$

Враховуючи, що $\overset{\circ}{u}(x,t)$ задовольняє /4/ для довільної $V(x)\in \tilde{H}^2(D)$ маємо

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-2p_0'(t)\int_D\Big[\int_0^u f_0(x,\xi)\,d\xi\Big]dx+2p_1(t)\int_D f_1(x,u_t)u_t\,dx,$$

прийнявши $V=\overset{\circ}{u}_t$.

Н? основі умов 2/, 6/, і нерівності 5/ одержуємо нерівність

$$\frac{dV(u)}{dt}\leq 0$$

для довільного узагальненого за просторовими змінними розв"язку задачі /I/ – /3/. Таким чином, функціонал $V(u)$ задовольняє всі умови теореми стійкості, сформульованої у праці [4], звідки і випливає стійкість за Ляпуновим нульового розв"язку задачі /I/ – /3/.

Зауваження. Якщо виконуються умови теореми та $\varphi\in H^2(\tilde{D})$, $\psi\in L^2(D)$, то для довільного узагальненого за просторовими змінними розв"язку $u(x,t)$ задачі /I/ – /3/

$$\sup_{t\in J}\left(\|u\|_{H^2(D)}+\|u_t\|_{L^2(D)}\right)<\infty.$$

Список літератури: I. М и х а й л о в В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, I976. 2. М о в ч а н А.А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем. – Прикладная математика и механика, I959, т.23. 3. М о в ч а н А.А. Обоснование некоторых критериев устойчивости равновесия пластин. – Инженерный журнал, I979, вып. 4. 4. Plaut R.H. Asymptotic Stability and Instability Criteria for some Elastic Systems by Liapunov's Direct Method. – Q. Appl. Math, 1972, 29, N4.

Стаття надійшла в редколегію I2.02.8I

УДК 517.946

Г.М.Березовська, О.Я.Ковалів, Г.П.Лопушанська

ЗОВНІШНЯ УЗАГАЛЬНЕНА ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ $(\Delta^2 - K^4)u = 0$

Одержимо теореми про представлення єдиного розв"язку зовнішньої задачі Діріхле для рівняння

$$(\Delta^2 - K^4)u = 0 \qquad /1/$$

$(K \geq 0)$, коли на границі області задані узагальнені функції. Розв"язок задачі розуміємо в сенсі праці [1]. Використовуємо той самий метод, що й для узагальнених граничних задач для еліптичних рівнянь і систем 2-го порядку. Іншим методом отримано розв"язок задачі Діріхле для бігармонійного рівняння всередині круга з заданою на границі узагальненою функцією у праці [2].

Нехай Ω - область в R^3, розташована зовні нескінченно диференційованої замкненої поверхні S; S_ε - паралельна до S поверхня, віддалена від неї на $\varepsilon > 0$, $S_\varepsilon \subset \Omega$; $D(S)$ - простір нескінченно диференційованих на S /основних/ функцій; $D'(S)$ - простір лінійних неперервних функціоналів над $D(S)$ /простір узагальнених функцій/; (φ, F) - дія узагальненої функції $F \in D'(S)$ на основну функцію $\varphi \in D(S)$. Вважаємо, що $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(y)$, коли $x_\varepsilon \in S_\varepsilon, y \in S, x_\varepsilon = y + \varepsilon \nu(y)$, $\nu(y)$ - орт зовнішньої нормалі $n(y)$ до S у точці y.

<u>Постановка задачі</u>. Нехай $F_1, F_2 \in D'(S)$. Знайти в області Ω розв"язок $u(x)$ рівняння /1/, що задовольняє граничні умови

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon) dS_\varepsilon = (\varphi, F_1),$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}} dS_\varepsilon = (\varphi, F_2) \quad \forall \varphi \in D(S) \qquad /2/$$

і умови на безмежності

$$\int\limits_{|x|>R>0} |u_1|^2 dx < \infty, \quad \int\limits_{|x|>R>0} \left|\left(\frac{\partial}{\partial |x|} - ik\right) u_2\right|^2 dx < \infty, \qquad /3/$$

де $u_1 = (\Delta + k^2) u, \quad u_2 = (\Delta - k^2) u; \quad k > 0,$

або

$$D^p u(x) = O(|x|^{-p}); \ \forall p: |p| \le 3; \quad k = 0. \qquad /4/$$

Граничні умови /2/ еквівалентні одній умові

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \left[\varphi_1(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon) + \varphi_2(x_\varepsilon) \frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial n_{x_\varepsilon}}\right] dS_\varepsilon = (\varphi_1, F_1) + (\varphi_2, F_2), \qquad /5/$$
$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D(S)$$

або

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) U(x_\varepsilon) dS_\varepsilon = \langle \varphi, F \rangle \qquad /5/$$

для кожної основної вектор-функції $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in [D(S)]^2$ і заданої узагальненої вектор-функції $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \in [D'(S)]^2$. Тут $U(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} \end{pmatrix}$, $\langle \varphi, F \rangle = (\varphi_1, F_1) + (\varphi_2, F_2)$.

Мають місце такі леми.

Лема 1. Оператори $(A\varphi)(x) = \int\limits_S \varphi(x) \omega(x,y) dS_x$, де $\omega(x,y)$ – будь-яка з функцій $\frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|}, \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|}, \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|}, \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|}$ / $\alpha = -1, \pm i$ /, діють у просторі $D(S)$.

Лема 2. Рівномірно відносно $y \in S$ для довільної $\varphi \in D(S)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\alpha k|x_\varepsilon - y|}}{|x_\varepsilon - y|} dS_\varepsilon = 2\pi \varphi(y) + \int\limits_S \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|} dS,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \frac{e^{\alpha k|x_\varepsilon - y|}}{|x_\varepsilon - y|} dS_\varepsilon = \int\limits_S \varphi(x) \frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|} dS,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\alpha k|x_\varepsilon - y|}}{|x_\varepsilon - y|} dS_\varepsilon = \left(\int\limits_S \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n_x} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{\alpha k|x-y|}}{|x-y|} dS\right)_S ,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{e^{\alpha\kappa|x_\varepsilon-y|}}{|x_\varepsilon-y|}dS_\varepsilon=-2\pi\varphi(y)+\int_S\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{\alpha\kappa|x-y|}}{|x-y|}dS,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial n_y}|x_\varepsilon-y|dS_\varepsilon=\int_S\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_y}|x-y|dS,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\frac{\partial}{\partial n_{x_\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial n_y}|x_\varepsilon-y|dS_\varepsilon=\int_S\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{\partial}{\partial n_y}|x-y|dS,$$

коли $\alpha=\pm i,-1,0,\ \kappa>0$.

Теорема I. Нехай $\kappa>0$, узагальнена вектор-функція $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$ визначається з умови

$$\langle g,A\rangle=\langle\varphi_g,F\rangle, \qquad /6/$$

де $g=(g_1,g_2)$ – довільна основна вектор-функція; $\varphi_g=(\varphi_{g1},\varphi_{g2})$ – розв"язок системи інтегральних рівнянь

$$\varphi_1(y)+i\varphi_2(y)+\frac{1}{2\pi}\int_S\varphi_1(x)\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{-i\kappa|x-y|}}{|x-y|}-i\frac{e^{-i\kappa|x-y|}}{|x-y|}\right)dS_x-$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_S\varphi_2(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{-i\kappa|x-y|}}{|x-y|}dS_x+\frac{1}{2\pi}\left(\int_S\varphi_2(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{-i\kappa|x-y|}}{|x-y|}dS_x\right)_S=g_1(y), \qquad /7/$$

$$\varphi_2(y)-\frac{1}{2\pi}\int_S\varphi_1(x)\frac{e^{-\kappa|x-y|}}{|x-y|}dS_x-\frac{1}{2\pi}\int_S\varphi_2(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{e^{-\kappa|x-y|}}{|x-y|}dS_x=g_2(y).$$

Тоді функція

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\left\langle\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{e^{-i\kappa|x-y|}}{|x-y|}-i\frac{e^{-i\kappa|x-y|}}{|x-y|},A_1\right\rangle-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left\langle\frac{e^{-\kappa|x-y|}}{|x-y|},A_2\right\rangle \qquad x\in\Omega \qquad /8/$$

єдиний розв"язок поставленої задачі для рівняння /I/.

Теорема 2. Нехай узагальнена вектор-функція $B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$ визначається з умови

$$\langle g,B\rangle=\langle\varphi_g,F\rangle, \qquad /9/$$

де g – довільна основна вектор-функція; φ_g – розв"язок системи інтегральних рівнянь

$$\varphi_1(y)+\frac{1}{2\pi}\int_S \varphi_1(x)\left(\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}+\frac{\partial}{\partial n_y}|x-y|+1\right)dS_x+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_S \varphi_2(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}+|x-y|\right)dS_x=g_1(y) \qquad /10/$$

$$\varphi_2(y)-\frac{1}{2\pi}\int_S \varphi_1(x)\frac{1}{|x-y|}dS_x-\frac{1}{2\pi}\int_S \varphi_2(x)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x-y|}dS_x=g_2(y).$$

Тоді функція

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\left\langle\frac{\partial}{\partial n_y}\left(\frac{1}{|x-y|}+|x-y|\right)+1,\ B_1\right\rangle-\frac{1}{2\pi}\left\langle\frac{1}{|x-y|},\ B_2\right\rangle,\ x\in\Omega\ –$$

єдиний розв"язок зовнішньої узагальненої задачі Діріхле для рівняння /1/ при $K=0$.

Системи інтегральних рівнянь /7/ і /10/ є спряженими до відповідних систем інтегральних рівнянь [3], а тому з праці [3] і леми 1 випливає, що вони однозначно розв"язані у просторі $D(S)$. Отже, рівностями /6/ і /9/ узагальнені вектор-функції A і B визначаються однозначно. Теореми доводяться безпосередньою перевіркою на основі леми 1 [1], лем 1, 2 і відомих властивостей функцій $\frac{e^{\alpha K|x-y|}}{|x-y|}$ $/\alpha=\pm i,-1$ / [3].

Список літератури: 1. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле. – Доп. АН УРСР, 1966, № 7. 2. Данко С.П. Некоторые краевые задачи для аналитических и бианалитических функций в пространстве обобщенных функций. – Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-тех. и мат. наук, 1971, № 5-6. 3. Wolfrahm wickel. Zur Theorie der Dirichletschen Randwertaufgabe zum Operator Δ^2-K^4 im Innen- und Außenraum mit der Integralgleichungs-methode. – Bonn. Math. Schr. 1973, N68.

Стаття надійшла в редколегію 11.03.81

УДК 517.946

Й.Г.Шипка

ВЛАСТИВОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ"ЯЗКУ МЕТАГАРМОНІЙНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ В РІМАНОВОМУ ПРОСТОРІ

Фундаментальним розв"язком метагармонійного рівняння

$$A[u] = (\Delta - \lambda_1^2)(\Delta - \lambda_2^2)u = 0, \ \lambda_i = const, \ (i = 1,2) \qquad /1/$$

у рімановому просторі $\mathcal{R}$ з лінією галуження γ називається функція $K(P,Q)$, яка має такі властивості.

1. $K(P,Q)$ визначена у всьому просторі $\mathcal{R}$, включаючи лінію галуження γ і точку $P = Q$, в околі якої вона зображується у вигляді

$$K(P,Q) = \omega(P,Q) + \tilde{\omega}(P,Q), \qquad /2/$$

де $\omega(P,Q)$ – класичний фундаментальний розв"язок рівняння /1/; $\tilde{\omega}(P,Q)$ – регулярний розв"язок цього рівняння.

2. Як функція точки P вона є розв"язком рівняння /1/ всюди в $\mathcal{R}$ за винятком точки $P = Q$ і лінії галуження γ, причому її треті похідні при наближенні до лінії галуження ростуть не швидше, ніж $R_0^{-\alpha}$, де $0 \leq \alpha < 1$, R_0 – відстань точки P від лінії галуження γ.

3. Функція $K(P,Q)$ експоненціально спадає на нескінченності в кожному листку $\mathcal{R}_j \ (j = 1, \dots, n)$ ріманового простору $\mathcal{R}$.

У праці [2] доведено існування такого розв"язку і для прикладу побудовано фундаментальний розв"язок рівняння /1/ у дволистковому рімановому просторі з прямолінійною лінією галуження.

Доведем деякі властивості фундаментального розв"язку рівняння /1/ в n – листковому рімановому просторі $\mathcal{R}$.

<u>Властивість 1.</u> Фундаментальний розв"язок рівняння /1/–симетрична функція

$$K(P,Q) = K(Q,P), \quad P \bar{\in} \gamma, \ Q \bar{\in} \gamma. \qquad /3/$$

Доведення. Якщо D – область з границею S, $u, v \in C^4(D) \cup C^3(\bar{D})$, то справедлива формула

$$\iiint\limits_D (uA[v] - vA[u])\,d\tau = \iint\limits_S \Big[u\frac{\partial \Delta v}{\partial n} - v\frac{\partial \Delta u}{\partial n} +$$

$$+ \Delta u\frac{\partial v}{\partial n} - \Delta v\frac{\partial u}{\partial n} - (\lambda_1^2+\lambda_2^2)\Big(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\Big)\Big]\,dS. \qquad /4/$$

Щоб скористатись формулою /4/, побудуємо область D наступним чином. На лінію галуження γ натягнемо достатньо гладку поверхню G і розріжемо R вздовж цієї поверхні. Одержимо n екземплярів евклідових областей R_j $(j=1,\ldots,n)$. Побудуємо навколо лінії галуження трубчасту поверхню T_ε як огинаючу сфер радіуса ε з центрами на лінії галуження. У кожному листі R_j проведемо сферу S_R настільки великого радіуса R, щоб трубчаста поверхня знаходилася всередині цієї сфери. Позначимо через D_j область, межею якої є сфера S_R, трубчаста поверхня T_ε і частина поверхні G, яка лежить зовні T_ε, а через D – сукупність усіх областей D_j $(j=1,\ldots,n)$. Нехай N_1 і N_2 – довільні точки простору $\underline{R}$, що не лежать на лінії галуження, K_1, K_2 – кулі радіуса ε з центрами в точках N_1 і N_2, обмежені сферами Σ_1 і Σ_2. До області D $(K_1 \cup K_2)$ і функцій $u=K(N_1,Q)$, $v=K(N_2,Q)$ застосовуємо формулу /4/. За умовою 2 означення фундаментального розв"язку рівняння /I/ інтеграл у формулі /4/ по області $D\setminus(K_1 \cup K_2)$ дорівнює нулеві. Перейдем до границі при $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$. Інтеграл по сфері S_R прямує до нуля за умовою 3. Інтеграл по T_ε також прямує до нуля. Це легко довести, якщо в цьому інтегралі перейти до координат (ρ,φ), де ρ – довжина дуги лінії γ, обчислювана від деякої фіксованої точки, а φ – кут, що змінюється від нуля до 2π, і врахувати поведінку функції $K(P,Q)$ та її похідних в околі лінії галуження. З умови I випливає рівність

$$\iint\limits_{G^+} F(N_1,N_2,Q)\,d_Q S = \iint\limits_{G^-} F(N_1,N_2,Q)\,d_Q S,$$

де

$$F(N_1,N_2,Q)=K(N_1,Q)\frac{\partial\Delta K(N_2,Q)}{\partial n}-K(N_2,Q)\frac{\partial\Delta K(N_1,Q)}{\partial n}+$$
$$+\Delta K(N_1,Q)\frac{\partial K(N_2,Q)}{\partial n}-\Delta K(N_2,Q)\frac{\partial K(N_1,Q)}{\partial n}-$$
$$-(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\left[K(N_1,Q)\frac{\partial K(N_2,Q)}{\partial n}-K(N_2,Q)\frac{\partial K(N_1,Q)}{\partial n}\right],$$

σ^+ і σ^- – сторони поверхні σ , що відповідають додатному та від"ємному напрямку нормалі до поверхні σ . Одержуємо

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\iint_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} F(N_1,N_2,Q)\,d_Q S=0.$$

Використавши зображення функції $K(P,Q)$ в околі точки $P=Q$ яке дається умовою I, дістанемо

$$-K(N_1,N_2)\frac{\lambda_2^3-\lambda_1^3}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}+K(N_2,N_1)\frac{\lambda_2^3-\lambda_1^3}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}=0,$$

або $K(N_1,N_2)=K(N_2,N_1)$; що і доводить /3/.

Властивість 2. Нехай $\omega(P,Q)$ – класичний фундаментальний розв"язок рівняння /I/, P_i – різні точки n – листкового простору $R,(i=1,\dots,n)$, які мають своїм прообразом одну і ту ж точку евклідового простору E^3 . Тоді справедлива формула

$$\sum_{i=1}^{n}K(P_i,Q)=\omega(P,Q). \qquad /5/$$

Доведення. Оскільки класичний фундаментальний розв"язок $\omega(P,Q)$ однозначний у просторі E^3 , то в n – листковому рімановому просторі R він n – значний, оскільки всі його вітки на n листках простору R рівні між собою. Тому він має n особливостей у точках $P_i\in R_i$, $(i=1,\dots,n)$, що збігаються з особливостями $K(P,Q)$.

Звідси випливає, що

$$u=\omega(P,Q)-\sum_{i=1}^{n}K(P_i,Q)$$

обмежена в R функція і за узагальненою теоремою Ліувілля вона тотожно дорівнює нулеві. А це доводить рівність /5/.

Властивість 3. В околі лінії галуження фундаментальний розв"язок рівняння /I/ $K(P,Q)$ може поводити себе як $R_0^{\frac{k}{n}}$, де k набуває значення $2n+1, 2n+2, \dots$

Доведення. Нехай точка Q – фіксована точка простору R зовні γ, точка P прямує до точки $P_0 \in \gamma$. Можемо припустити, що точка P знаходиться всередині циліндричного околу точки P_0, який внаслідок гладкості γ можемо вважати циліндром досить малих розмірів. Приймаємо, що точка Q знаходиться зовні цього циліндра. Скористаємося локальним зображенням розв"язку u_i рівняння

$$\Delta u - \lambda_i^2 u = 0, \quad (i=1,2),$$

у циліндрі $Ц_0$

$$u_i(P,Q) = \sum_{k,m} Z_m(\mu_m z) I_{\frac{k}{n}}\left(\rho\sqrt{\lambda_i^2+\mu_m^2}\right)\left(a_{km}(Q)\cos\frac{k}{n}\varphi + b_{km}(Q)\sin\frac{k}{n}\varphi\right),$$

де (ρ, φ_0, z) – циліндричні координати.

Функцію $\tilde{\omega}(P,Q)$ з формули /2/, згідно статті [I], можна зобразити у циліндрі $Ц_0$ як

$$\tilde{\omega}(P,Q) = u_1(P,Q) + u_2(P,Q).$$

У цьому випадку $\rho = R_0$, отже, функція $\tilde{\omega}(P,Q)$ поводить себе в околі лінії галуження аналогічно, як і модифікована функція Бесселя $I_{\frac{k}{n}}(\rho)$, тобто $\rho^{\frac{k}{n}}$, де k – довільне натуральне число. За умовою 2, коли $\alpha > 0$, то $k = 2n+1, 2n+2, \dots$

Зокрема, якщо $n=2$, то $\alpha = \frac{1}{2}$. Таке значення й отримане при побудові фундаментального розв"язку рівняння /I/ у дволистковому рімановому просторі з прямолінійною лінією галуження [2].

Список літератури: I. В е к у а И.В. О метагармонических функциях. – Тр. Тбил. матем. ин-та, 1943, т.I2. 2. М а р т ы н е н к о М.Д., Ш и п к а И.Г. Фундаментальные решения метагармонических уравнений в конечнолистном римановом пространстве. – Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1979, № 3.

Стаття надійшла в редколегію I0.02.8I

УДК 517.944

В.Г.Костенко, М.Д.Коркуна

ЗВЕДЕННЯ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

ДО СИСТЕМИ РЕГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У позначеннях праці [1] при $A=0$ розглянемо крайову задачу про знаходження розв"язку системи рівнянь

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v \equiv \sum_{k,\ell=1}^{2} A_{k\ell}\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_\ell}=0 \qquad /1/$$

в області $H \setminus D$, який би в точках $y(y_1,y_2)$ її границі $\mathcal{T}$ задовольняв умову

$$\lim_{x\to y\in\mathcal{T}} B\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)v = \lim_{x\to y\in\mathcal{T}}\sum_{k=1}^{2} B_k(y_1,y_2)\frac{\partial v}{\partial x_k}=\psi(y_1,y_2). \qquad /2/$$

Розв"язок цієї задачі шукаємо у вигляді [2].

$$v(x)=\int_{\mathcal{T}} J_0(x-z,\nu(z))\mu(z)\,d_z\mathcal{T}, \qquad /3/$$

де $\mu(z)=\begin{pmatrix}\mu_1(z)\\ \mu_2(z)\end{pmatrix}$ – стовпець невідомих неперервних функцій;

$$J_0(x-z,\nu(z))=\int_{Z^+}\Phi(x-z,\beta\nu(z)+\tau)A^{-1}(\beta\nu(z)+\tau)(E,\beta E)R(\tau,\nu(z))\Big|_{\tau=(1,0)}d\beta+$$

$$+\int_{Z^+}\Phi(x-z,\beta\nu(z)+\tau)A^{-1}(\beta\nu(z)+\tau)(E,\beta E)R(\tau,\nu(z))\Big|_{\tau=(-1,0)}d\beta \qquad /4/$$

$$\Phi(x-z,\beta\nu(z)+\tau)=-\frac{1}{4\pi i}\lg\left[-\frac{(x-z,\beta\nu(z)+\tau)^2}{(\beta\nu_1(z)+\tau)^2}\right].$$

Інтегрування в /4/ ведемо за додатно орієнтованим контуром Z^+ який лежить у верхній β – комплексній півплощині та охоплює всі комплексні корені рівняння $\det(\beta\nu(z)+\tau)=0$ при довільних дійсних $\tau(\tau_1,\tau_2)\neq 0$; $\nu(z)$ – внутрішня нормаль до $\mathcal{T}$ у точці $z(z_1,z_2)$ $(\nu(z),\tau)=0,\ (\tau,\tau)=1.$

Для довільної точки $x(x_1,x_2)\in H\setminus D$ і $y^0(y_1^0,y_2^0)\in\mathcal{T}$ маємо

$$B\left(y^0,\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)=\int_{\mathcal{T}}B\left(y^0,\frac{\partial}{\partial x}\right)J_0(x-z,\nu(z))\mu(z)d_z\mathcal{T}=$$

$$=\int_{\mathcal{T}}J_1(x-z,\nu(z),y^0)\mu(z)d_z\mathcal{T}, \qquad /5/$$

де

$$J_1(x-z,\nu(z),y^0)=\int_{Z^+}\Phi'(x-z,\beta\nu(z)+\tau)B(y^0,\beta\nu(z)+\tau)A^{-1}(\beta\nu(z)+\tau)\times$$

$$\times(E,\beta E)R(\tau,\nu(z))\Big|_{\tau=(1,0)}d\beta+\int_{Z^+}\Phi'(x-z,\beta\nu(z)+\tau)B(y^0,\beta\nu(z)+\tau)\times \qquad /6/$$

$$\times A^{-1}(\beta\nu(z)+\tau)(E,\beta E)R(\tau,\nu(z))\Big|_{\tau=(-1,0)}d\beta;$$

$\Phi'(x-z,\beta\nu(z)+\tau)$ – похідна функції $\Phi(x-z,\beta\nu(z)+\tau)$ за скалярним добутком $(x-z,\beta\nu(z)+\tau)$.

Якщо виконується умова Лопатинського [2]

$$\operatorname{rang}\int_{Z^+}B(y^0,\beta\nu(y^0)+\tau)A^{-1}(\beta\nu(y^0)+\tau)(E,\beta E)d\beta=2 \qquad /7/$$

для довільної точки $y^0\in\mathcal{T}$, довільного дійсного вектора $\tau(\tau_1,\tau_2)\neq 0$ і такого, що $(\tau,\nu(y^0))=0$, то для кожної точки y^0 з рівняння

$$\int_{Z^+}B(y^0,\beta\nu(z)+\tau)A^{-1}(\beta\nu(z)+\tau)(E,\beta E)d\beta\, R(\tau,\nu(z),y^0)=E \qquad /8/$$

можна знайти $R(\tau,\nu(z),y^0)$. При цьому вважаємо $(\tau,\nu(z))=0$ і $|\nu(z)-\nu(y^0)|$ достатньо малим.

Перевірка показує, що для задачі /1/, /2/ умова /7/ виконується у спрощеному вигляді

$$\det\int_{Z^+}B(y^0,\beta\nu(y^0)+\tau)A^{-1}(\beta\nu(y^0)+\tau)d\beta\neq 0 \qquad /7_1/$$

для довільної точки $y^0\in\mathcal{T}$ і довільного дійсного $\tau\neq 0$, $(\tau,\nu(y^0))=0$, тому в формулах /4/ – /8/ замість прямокутного матричного множника $(E,\beta E)$ можна взяти лише матрицю E.

Тоді з відповідного рівняння /8/

$$\int_{Z^+} B(y^0, \beta\nu(z)+\tau) A^{-1}(\beta\nu(z)+\tau) d\beta R(\tau, \nu(z), y^0) = E \qquad /8_I/$$

знаходимо

$$R(\tau, \nu(z), y^0) = \frac{4i}{\pi(\nu+1)(\nu-3)} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix},$$

де

$$R_{11} = 2\nu_1(z) - i(\nu-1)\nu_2(z); \quad R_{12} = 2\nu_2(z) + i(\nu-1)\nu_1(z);$$

$$R_{21} = 2\left[(\nu+1)\sin\gamma\cos\gamma\, \nu_1(z) + (\cos^2\gamma - \nu\sin^2\gamma)\nu_2(z)\right] +$$

$$+ i\left[2(\nu+1)\sin\gamma\cos\gamma\, \nu_2(z) - ((\nu+3)\cos^2\gamma + (1-\nu)\sin^2\gamma)\nu_1(z)\right];$$

$$R_{22} = 2\left[(\nu\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)\nu_1(z) - (\nu+1)\sin\gamma\cos\gamma\, \nu_2(z)\right] +$$

$$+ i\left[((\nu-1)\cos^2\gamma - (\nu+3)\sin^2\gamma)\nu_2(z) + 2(\nu+1)\sin\gamma\cos\gamma\, \nu_1(z)\right];$$

γ – кут між дотичною в точці $y^0(y_1^0, y_2^0)$ до $\mathcal{T}$ з віссю Ox_1.

Легко переконатись тепер, що при $y^0 = z$

$$R(\tau, \nu(z) z) = \frac{4i}{\pi(\nu+1)(\nu-3)} \begin{pmatrix} 2\nu_1(z) - i(\nu-1)\nu_2(z) & 2\nu_2(z) + i(\nu-1)\nu_1(z) \\ 2\nu_2(z) + i(\nu-1)\nu_1(z) & -2\nu_1(z) + i(\nu-1)\nu_2(z) \end{pmatrix}; \qquad /9/$$

Підставляючи /9/ в /4/, знаходимо остаточний вигляд ядра інтеграла /3/

$$\mathcal{J}_0(x-z, \nu(z)) = \frac{1}{\pi\nu_2(z)(\nu+1)} \begin{pmatrix} \mathcal{J}_0^{(11)}(x-z, \nu(z)) & \mathcal{J}_0^{(12)}(x-z, \nu(z)) \\ \mathcal{J}_0^{(21)}(x-z, \nu(z)) & \mathcal{J}_0^{(22)}(x-z, \nu(z)) \end{pmatrix},$$

де

$$\mathcal{J}_0^{(11)}(x-z, \nu(z)) = 2\nu_1(z)\lg r(x,z) - (\nu-1)\nu_2(z)\operatorname{arctg}\frac{x_1-z_1}{x_2-z_2} + \frac{(\nu+1)(x_2-z_2)\left[(x_2-z_2)\nu_1(z) - (x_1-z_1)\nu_2(z)\right]}{r^2(x,z)},$$

$$\mathcal{J}_0^{(12)}(x-z, \nu(z)) = 2\nu_2(z)\lg r(x,z) + (\nu-1)\nu_1(z)\operatorname{arctg}\frac{x_1-z_1}{x_2-z_2} + \frac{(\nu+1)(x_2-z_2)\left[(x_1-z_1)\nu_1(z) + (x_2-z_2)\nu_2(z)\right]}{r^2(x,z)},$$

$$J_0^{(21)}(x-z,\nu(z))=2\nu_2(z)\lg r(x,z)+(\nu-1)\nu_1(z)\operatorname{arctg}\frac{x_1-z_1}{x_2-z_2}-\frac{(\nu+1)(x_2-z_2)[(x_1-z_1)\nu_1(z)+(x_2-z_2)\nu_2(z)]}{r^2(x,z)};$$

$$J_0^{(22)}(x-z,\nu(z))=-2\nu_1(z)\lg r(x,z)+(\nu-1)\nu_2(z)\operatorname{arctg}\frac{x_1-z_1}{x_2-z_2}+\frac{(\nu+1)(x_2-z_2)[(x_2-z_2)\nu_1(z)-(x_1-z_1)\nu_2(z)]}{r^2(x,z)},$$

Якщо в /6/ y^0 ототожнити з z і підставити туди $R(\tau,\nu(z),z)$ з /9/, одержуємо можливість застосувати формулу "стрибка" [2] при $x\to y\in\mathcal{T}$ і одночасно задовольнити умову /2/, що й приводить до системи регулярних інтегральних рівнянь

$$\mu(y)+\int_{\mathcal{T}} J_1(y-z,\nu(z),z)\,\mu(z)\,d_z\mathcal{T}=\Psi(y).$$

Обчислення формули /6/ за правилом лишків при цьому дає

$$J_1(y-z,\nu(z),z)=\frac{2}{\pi\nu_2(z)}\begin{pmatrix} J_1^{(11)}(y-z,\nu(z),z) & J_1^{(12)}(y-z,\nu(z),z) \\ J_1^{(21)}(y-z,\nu(z),z) & J_1^{(22)}(y-z,\nu(z),z)\end{pmatrix},$$

де

$$J_1^{(11)}(y-z,\nu(z),z)=\frac{[(y_1-z_1)\sin\gamma+(y_2-z_2)\cos\gamma]^2(y-z,\nu(z))}{r^4(y,z)};$$

$$J_1^{(12)}(y-z,\nu(z),z)=\frac{[(y_1-z_1)\sin\gamma+(y_2-z_2)\cos\gamma]^2[(y_1-z_1)\nu_2(z)-(y_2-z_2)\nu_1(z)]}{r^4(y,z)};$$

$$J_1^{(21)}(y-z,\nu(z),z)=\frac{[[(y_1-z_1)^2-(y_2-z_2)^2]\sin\gamma\cos\gamma+(y_1-z_1)(y_2-z_2)(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)](y-z,\nu(z))}{r^4(y,z)},$$

$$J_1^{(22)}(y-z,\nu(z),z)=\frac{[[(y_1-z_1)^2-(y_2-z_2)^2]\sin\gamma\cos\gamma-(y_1-z_1)(y_2-z_2)(\sin^2\gamma-\cos^2\gamma)][(y_1-z_1)\nu_2(z)-(y_2-z_2)\nu_1(z)]}{r^4(y,z)},$$

γ – кут між дотичною в точці $y(y_1,y_2)$ до $\mathcal{T}$ з віссю Ox_1. Зауважимо, що $\sin\gamma=-\cos(\nu(y),x_1)=-\nu_1(y)$, $\cos\gamma=-\cos(\nu(y),x_2)=-\nu_2(y)$ / $\nu(y)$ – внутрішня нормаль у точці $y\in\mathcal{T}$ /.

Список літератури: 1. Костенко В.Г., Коркуна М.Д. Фундаментальна матриця розв"язків однієї лінійної еліптичної системи рівнянь у частинних похідних. - Вісн. Львів. ун-ту, сер.мех.-мат., вип. 20, 1982. 2. Лопатинський Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. - Укр. мат. журнал, 1953, т.5, № 2.

Стаття надійшла в редколегію 12.03.81

УДК 517.944

В.Г.Костенко, М.Д.Коркуна

ФУНДАМЕНТАЛЬНА МАТРИЦЯ РОЗВ"ЯЗКІВ ОДНІЄЇ ЛІНІЙНОЇ ЕЛІПТИЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

При зварюванні металічних пластин за допомогою рухомого локального джерела тепла в зоні зварного шва виникають залишкові напруження, які негативно впливають на якість зварювання. Їх можна зменшити, провівши додатково належний вибірковий підігрів зварених пластин. Таким чином, для успішного розв"язання цієї проблеми необхідно спочатку визначити напруження, які залишаються у зварених металічних пластинах, що дасть змогу знайти оптимальний додатковий підігрів, який би максимально зменшив залишкові напруження.

У найбільше математично спрощеному варіанті [2] перша задача полягає в знаходженні розв"язку системи рівнянь

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \sum_{k,\ell=1}^{2} A_{k\ell}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_\ell} = \mathcal{F}(x_1, x_2) \qquad /1/$$

в області $H\setminus D$, неперервно диференційованого, включаючи і границю $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ області $H\setminus D$, причому на $\mathcal{T}$

$$B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \sum_{k=1}^{2} B_k(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_k} = f(x_1, x_2), \qquad /2/$$

де

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 1-4A \end{pmatrix}; \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \\ \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} & 0 \end{pmatrix} = A_{21};$$

$$A_{22}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{2}{1-\nu}\end{pmatrix};\quad B_1(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\nu}(\sin^2\gamma+\nu\cos^2\gamma) & \sin\gamma\cos\gamma\\ \sin\gamma\cos\gamma & \frac{1}{2}(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)\end{pmatrix};$$

$$B_2(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\sin\gamma\cos\gamma & \frac{1}{1-\nu}(\nu\sin^2\gamma+\cos^2\gamma)\\ \frac{1}{2}(\cos^2\gamma-\sin^2\gamma) & -\sin\gamma\cos\gamma\end{pmatrix};\quad u=\begin{pmatrix}u_1(x_1,x_2)\\ u_2(x_1,x_2)\end{pmatrix};$$

$$\mathcal{F}(x_1,x_2)=2\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\begin{pmatrix}\frac{\partial T}{\partial x_1}\\ \frac{\partial T}{\partial x_2}\end{pmatrix};\quad f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T\\ 0\end{pmatrix};$$

$u_1(x_1,x_2), u_2(x_1,x_2)$ – компоненти зміщень точок пластин; $A=\frac{\rho v_0^2}{2E}(1+\nu)\geq 0;$ ν – коефіцієнт Пуассона / $0\leq\nu<1$ /; E – модуль пружності; ρ – густина речовини пластин; v_0 – швидкість рухомого джерела тепла в напрямку осі Ox_1; $T(x_1,x_2)$ – відоме температурне поле точкового джерела тепла для усталеного режиму в пластинці; α – коефіцієнт лінійного розширення; γ – кут між дотичною до $\mathcal{T}$ і віссю Ox_1; $\mathcal{T}_1$ – деяка фіксована ізотерма теплового поля $T(x_1,x_2)=const$; $\mathcal{T}_2$ – частина границі пластин, яка не підлягає зварюванню.

Компоненти напружень і зміщень зв"язані залежностями

$$\sigma_{x_1,x_1}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-(1+\nu)\alpha T\right],$$

$$\sigma_{x_2,x_2}=\frac{E}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-(1+\nu)\alpha T\right],$$

$$\sigma_{x_1,x_2}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right).$$

Легко переконатись, що /I/ – система рівнянь еліптичного типу, якщо $0\leq A<\frac{1}{4}$.

Знайдемо в явній формі фундаментальну матрицю розв"язків, яка дає змогу визначити частинний розв"язок системи /I/ і тим самим звести задачу /I/, /2/ до аналогічної задачі для однорідної системи рівнянь /I/.

Дещо модифікуючи відповідні формули Я.Б.Лопатинського [2], виражаємо фундаментальну матрицю розв"язків з особливістю в нулі відповідної однорідної системи /I/ у вигляді

$$\varphi(x_1,x_2;0,0)=\frac{|y|}{8\pi^2}\left\{\int_{-\infty+\varepsilon i}^{\infty+\varepsilon i} lg\left[-\frac{(x,\bar\eta)^2}{(\eta',\bar\eta')}\right]\overset{-1}{A}(\beta y+\tau)\,d\beta\Big|_{\tau=\left(\frac{-y_2}{|y|},\frac{y_1}{|y|}\right)}+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty+\varepsilon i}^{\infty+\varepsilon i} lg\left[-\frac{(x,\bar\eta)^2}{(\eta',\bar\eta')}\right]\overset{-1}{A}(\beta y+\tau)\,d\beta\Big|_{\tau=\left(\frac{y_2}{|y|},\frac{-y_1}{|y|}\right)}\right\},$$

$$\overset{-1}{A}(\beta y+\tau)=\frac{\begin{pmatrix}(1-4A)(\beta y_1+\tau_1)^2+\frac{2}{1-\nu}(\beta y_2+\tau_2)^2 & \frac{\nu+1}{\nu-1}(\beta y_1+\tau_1)(\beta y_2+\tau_2)\\ \frac{\nu+1}{\nu-1}(\beta y_1+\tau_1)(\beta y_2+\tau_2) & \left(\frac{2}{1-\nu}-4A\right)(\beta y_1+\tau_1)^2+(\beta y_2+\tau_2)^2\end{pmatrix}}{\frac{2}{1-\nu}Q_1Q_2(\beta-\beta_1)(\beta-\bar\beta_1)(\beta-\beta_2)(\beta-\bar\beta_2)};$$

$$\eta_j=\beta y_j+\tau_j,\ (j=1,2),\ \eta'=\eta_1,\ (y,\tau)=y_1\tau_1+y_2\tau_2=0,\quad (\tau,\tau)=1;$$

$$Q_1=y_2^2-i\sqrt{2}y_1y_2\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}+y_1^2B^2;\ Q_2=y_2^2+i\sqrt{2}y_1y_2\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}+y_1^2B^2,$$

$$B^4=8A^2(1-\nu)-2A(3-\nu)+1;$$

β_1, β_2 і β_1^*, β_2^* – корені рівняння

$$(\eta_2^2-i\sqrt{2}\eta_1\eta_2\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}+\eta_1^2B^2)(\eta_2^2+i\sqrt{2}y_1y_2\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}+\eta_1^2B^2)=0,$$

що лежать у верхній β – комплексній півплощині при $\tau=\left(\frac{-y_2}{|y|},\frac{y_1}{|y|}\right)$ і $\tau=\left(\frac{y_2}{|y|},\frac{-y}{|y|}\right)$ відповідно.

У результаті проведених обчислень знаходимо фундаментальну матрицю

$$\varphi(x_1,x_2;0,0)=\begin{pmatrix}U_1^{(1)}(x_1,x_2;0,0) & U_1^{(2)}(x_1,x_2;0,0)\\ U_2^{(1)}(x_1,x_2;0,0) & U_2^{(2)}(x_1,x_2;0,0)\end{pmatrix}, \qquad /3/$$

де

$$U_1^{(1)}=\frac{1-\nu}{16\sqrt{2}\,\pi(1+\nu)AB^2}\Big\{\Big[\big(1-4A+\frac{2}{1-\nu}B^2\big)\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}+\big(1-4A-\frac{2}{1-\nu}B^2\big)\sqrt{1-A(3-\nu)+B^2}\Big]\times$$

$$\times\lg[x_1^2+(1-4A)x_2^2]+\Big[\big(1-4A+\frac{2}{1-\nu}B^2\big)\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}-\big(1-4A-\frac{2}{1-\nu}B^2\big)\times$$

$$\times\sqrt{1-A(3-\nu)+B^2}\Big]\lg[x_1^2+(1-2A(1-\nu))x_2^2]\Big\};$$

/4/

$$U_2^{(1)}=-\frac{1}{8\pi A}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,x_1x_2\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}}{x_1^2+x_2^2B^2}=U_1^{(2)};$$

$$U_2^{(2)}=\frac{1-\nu}{16\sqrt{2}\,\pi(1+\nu)AB^2}\Big\{\Big[\big(\frac{2}{1-\nu}-4A+B^2\big)\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}+\big(\frac{2}{1-\nu}-4A-B^2\big)\times$$

$$\times\sqrt{1-A(3-\nu)+B^2}\,\lg[x_1^2+(1-4A)x_2^2]+\Big[\big(\frac{2}{1-\nu}-4A+B^2\big)\sqrt{1-A(3-\nu)-B^2}-$$

$$-\big(\frac{2}{1-\nu}-4A-B^2\big)\sqrt{1-A(3-\nu)+B^2}\Big]\lg[x_1^2+(1-2A(1-\nu))x_2^2]\Big]\Big\}.$$

Зокрема, якщо $V_0=0$, тоді $A=0$, $B=1$ і, розкриваючи невизначеність в /4/ за правилом Лопіталя, знаходимо фундаментальну матрицю однорідної системи /I/ при $A=0$ у вигляді

$$U_1^{(1)}=\frac{1}{8\pi}\Big\{\frac{(\nu+1)x_2^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{3-\nu}{2}\lg(x_1^2+x_2^2)\Big\},$$

$$U_2^{(1)}=-\frac{\nu+1}{8\pi}\,\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}=U_1^{(2)},$$

$$U_2^{(2)}=\frac{1}{8\pi}\Big\{\frac{-(\nu+1)x_2^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{3-\nu}{2}\lg(x_1^2+x_2^2)\Big\}.$$

Фундаментальну матрицю з особливістю в точці $y(y_1,y_2)$ визначаємо за допомогою /4/ з залежності $\varphi(x_1,x_2;y_1,y_2)=\varphi(x_1-y_1,x_2-y_2;0,0)$.

Частинний розв"язок системи /I/ дає формула

$$\tilde{U}(x_1,x_2)=\iint\limits_{H\setminus D}\varphi(x_1,x_2;y_1,y_2)\mathcal{F}(y_1,y_2)\,dy_1dy_2,$$

якщо $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_1}$ і $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_2}$ притаманні властивості, що забезпечують рівномірну збіжність останнього інтеграла та його частинних похідних до другого порядку включно.

Шукаючи тепер розв"язок задачі /I/, /2/ у вигляді $u(x_1, x_2) = V(x_1, x_2) + \hat{u}(x_1, x_2)$, зводимо її до визначення $V(x_1, x_2)$ як розв"язку однорідної системи рівнянь

$$\sum_{k,l=1}^{2} A_{kl} \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_l} = 0$$

в області $H \setminus D$, який би на Γ задовольняв умови

$$\lim_{x \to y \in \Gamma} B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) V = \lim_{x \to y \in \Gamma} \sum_{k=1}^{2} B_k(y_1, y_2) \frac{\partial V}{\partial x_k} = \Psi(y_1, y_2),$$

де

$$\Psi(y_1, y_2) = f(y_1, y_2) - B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \hat{u}(y_1, y_2).$$

Список літератури: I. Лопатинський Я.Б. Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений. - Укр. мат. журн., 1951, т.3, № I. 2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. - К.: Наукова думка, 1972.

Стаття надійшла в редколегію 12.03.81

УДК 517.913

К.С.Костенко

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)} + p_1(x) y'' + (p_2(x) + r(x)) y' + p_3(x) y = 0 \qquad /I/$$

доведена така теорема.

Теорема. Нехай у рівнянні /I/ $p_3(x)$ неперервна, а $r(x)$, $p_1(x)$ і $p_2(x) = \lambda \xi_?^{-1}(x) \neq 0$ неперервно диференційовані функції відповідно один, два і три рази на інтервалі $x_0 \leqslant x < \infty$. Нехай також

$$A(x) = \mathfrak{z}^{-2}(x)\left(\mu - 5\mathfrak{z}''(x)\mathfrak{z}(x) + \frac{5}{2}\mathfrak{z}'^2(x)\right),\quad B(x) = \lambda\mathfrak{z}^{-3}(x) + A'(x),$$

$$C(x) = \left(\nu - 0{,}09\mu^2 - \frac{3}{2}\lambda\mathfrak{z}'(x)\right)\mathfrak{z}^{-4}(x) + 0{,}3A''(x) + (0{,}3A(x))^2,$$

$\beta_0 \neq 0$ – дійсний розв"язок системи рівнянь

$$20\beta^3 + 2\mu\beta - \lambda = 0,\quad 21\beta^4 + 3\mu\beta^2 + \nu = 0,$$

результант якої дорівнює нулеві, причому $6\beta_0^2 + \mu = -a^2 < 0$.

Тоді за умов

$$\beta_0\mathfrak{z}(x) > 0,\ \lim_{x\to\infty}\varphi(x, x_0) = \infty,\ \int_{x_0}^{\infty} b(t)\,dt < \infty,\ \lim_{x\to\infty}\mathcal{P}_i(x)\mathfrak{z}^2(x) = 0,\ (i = 2, 3, 4),$$

або

$$\beta_0\mathfrak{z}(x) < 0,\ \lim_{x\to\infty}\varphi(x, x_0) = \infty,\ \int_{x_0}^{\infty} b(t)\,dt < \infty,\ \lim_{x\to\infty}\mathcal{P}_i(x)\mathfrak{z}^2(x) = 0,\ (i = 1, 2, 3),$$

де

$$\mathcal{P}_1(x) = 4a\beta_0(a - 4\beta_0)\Big[\left(\frac{3}{2}\mathfrak{z}''\mathfrak{z} + \frac{3}{4}\mathfrak{z}'^2 - 2(\beta_0 + a)\mathfrak{z}' + (\beta_0 + a)^2\right)(A(x) - p_1(x)) +$$

$$+ 2\mathfrak{z}\left(\frac{3}{2}\mathfrak{z}' - \beta_0\ a\right)\left(\frac{A'(x) + r(x)}{2} - p_1'(x)\right) + \mathfrak{z}^2\left(C(x) + r'(x) - p_3(x) - p_1''(x)\right)\Big]W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_2(x) = 4a\beta_0(a + 4\beta_0)\Big[\left(\frac{3}{2}\mathfrak{z}''\mathfrak{z} + \frac{3}{4}\mathfrak{z}'^2 - 2(\beta_0 - a)\mathfrak{z}' - (\beta_0 - a)^2\right)(A(x) - p_1(x)) +$$

$$+ 2\mathfrak{z}\left(\frac{3}{2}\mathfrak{z}' - \beta_0 + a\right)\left(\frac{A'(x) + r(x)}{2} - p_1'(x)\right) + \mathfrak{z}^2\left(C(x) + r'(x) - p_3(x) - p_1''(x)\right)\Big]W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_3(x) = 2a(16\beta_0^2 - a^2)\Big[\left(\frac{3}{2}\mathfrak{z}''\mathfrak{z} + \frac{3}{4}\mathfrak{z}'^2 - 2\beta_0\mathfrak{z}' + \beta_0^2\right)(A(x) - p_1(x)) +$$

$$+ 2\mathfrak{z}\left(\frac{3}{2}\mathfrak{z}' - \beta_0\right)\left(\frac{A'(x) + r(x)}{2} - p_1'(x)\right) + \mathfrak{z}^2\left(C(x) + r'(x) - p_3(x) - p_1''(x)\right)\Big]W^{-1};$$

$$\mathcal{P}_4(x) = 2a^3\Big[\left(\frac{3}{2}\mathfrak{z}''\mathfrak{z} + \frac{3}{4}\mathfrak{z}'^2 + 6\beta_0\mathfrak{z}' + 9\beta_0^2\right)(A(x) - p_1(x)) + 2\mathfrak{z}\left(\frac{3}{2}\mathfrak{z}' + 3\beta_0\right)\left(\frac{A'(x) + r(x)}{2} -\right.$$

$$\left. - p_1'(x)\right) + \mathfrak{z}^2\left(C(x) + r'(x) - p_3(x) - p_1''(x)\right)\Big]W^{-1};$$

$$b(x) = 4|\mathfrak{z}(x)|\max_x{}^3\left[|\mathcal{P}_1(x)|, |\mathcal{P}_2(x)|, |\mathcal{P}_3(x)|, |\mathcal{P}_4(x)|\right];$$

$$W = -8\beta_0 a^3(22\beta_0^2 + \mu),\quad \varphi(x, x_0) = \int_{x_0}^{x}\mathfrak{z}^{-1}(t)\,dt,$$

рівняння /I/ має фундаментальну систему розв"язків, асимптотичне зображення яких за $x \to \infty$ дають формули

$$y_1(x, x_0) = \mathfrak{z}^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[(\beta_0 + a)\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)),\ x \to \infty, \quad /2/ .$$

$$y_2(x,x_0)=\mathfrak{z}_{\varphi}^{\frac{3}{2}}(x)\exp[(\beta_0-a)\varphi(x,x_0)](1+o(1)),\ x\to\infty, \quad /3/$$

$$y_3(x,x_0)=\mathfrak{z}_{\varphi}^{\frac{3}{2}}(x)\exp[\beta_0\varphi(x,x_0)](1+o(1)),\ x\to\infty, \quad /4/$$

$$y_4(x,x_0)=\mathfrak{z}_{\varphi}^{\frac{3}{2}}(x)\exp[-3\beta_0\varphi(x,x_0)](1+o(1)),\ x\to\infty. \quad /5/$$

За цих же умов головні частини асимптотичних формул для перших похідних фундаментальної системи розв"язків одержуємо формальним диференціюванням головних частин /2/ – /5/.

Те ж саме наявне для похідних другого порядку цих розв"язків, якщо

$$\lim_{x\to\infty}(A(x)-p_{\varphi}(x))\mathfrak{z}_{\varphi}^{2}(x)=0,$$

і третього порядку, коли

$$\lim_{x\to\infty}(p_{\varphi}'(x)-r(x))\mathfrak{z}_{\varphi}^{3}(x)=0,$$

додатково.

Список літератури: І. К о о т е н к о Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. – Дифференциальные уравнения, 1974, т.10, № 10. 2. П а в л ю к І.А. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. Вид-во Київ. ун-ту, 1970.

Стаття надійшла в редколегію 15.03.81

УДК 517.947

В.Г.Костенко, О.О.Веселовська

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ"ЯЗОК КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У монографії [1] і статті [2] наведена детальна схема побудови асимптотичних розв"язків у першому наближенні для еліптичних рівнянь другого порядку з постійними та змінними коефіцієнтами.

Мета цього дослідження – побудова асимптотичного розв"язку рівняння четвертого порядку з повільно змінними коефіцієнтами у вигляді деякої неплоскої хвилі.

Спочатку знайдемо умови, за яких існує розв"язок рівняння

$$\frac{1}{\omega_1^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}+\frac{2}{\omega_1\omega_2}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{1}{\omega_2^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}+$$
$$+\frac{2^5 tg(\ln(\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2))\varkappa(\tau)}{\omega_1^2\,\omega_2^2\,(\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2)^2}u=0 \qquad /1/$$

у формі

$$u_0=u_0(\ln(\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2),\tau)=u_0(\ln\xi,\tau). \qquad /2/$$

Підставляючи /2/ в /1/, одержуємо звичайне диференціальне рівняння

$$u_0^{IV}-2u_0'''+u_0''+\frac{2^5 tg(\ln\xi)\,\varkappa(\tau)}{a_{44}(\tau)\,\omega_1^2\cdot\omega_2^2}u=0,$$

з відомим 2π – періодичним по $\ln\xi$ розв"язком

$$u_0=A\cos(\ln(\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2)+h), \qquad /3/$$

якщо при цьому виконується умова

$$a_{44}(\tau)\,\omega_1^2(\tau)\,\omega_2^2(\tau)-\varkappa^2(\tau)=0, \qquad /4/$$

то "хвильовий" розв"язок квазілінійного рівняння

$$\frac{1}{\omega_1^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}+\frac{2}{\omega_1\omega_2}\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{1}{\omega_2^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}+$$
$$+\frac{2^5 tg(\ln(\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2))\,\varkappa^2(\tau)}{\omega_1^2\omega_2^2\,(\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2)^2}u= \qquad /5/$$
$$=\varepsilon f\left(\tau,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j},\varepsilon\right),\ (i,j=1,2)$$

шукаємо у вигляді

$$u=a(x_1,x_2,\varepsilon)\cos(\Psi(x_1,x_2,\varepsilon)), \qquad /6/$$

де a і ψ – нові невідомі функції. При $\varepsilon=0$ цей розв"язок перетворюється в /3/, якщо $a(x_1,x_2,0)=A$ і

$\psi(x_1,x_2,0)=\ln(\omega_1 x_1^2+\omega_2 x_2^2)+h.$

Коефіцієнти у рівнянь /I/ і /5/ залежать від усіх "повільних" координат $\tau=(\tau_1,\tau_2)=(\varepsilon x_1,\varepsilon x_2)$,

$\frac{d\tau_i}{dx_i}=\varepsilon\ (i=1,2)$; $\varepsilon>0$ — малий параметр.

Припустимо, що функції f і $\varkappa$ достатньо гладкі в заданій області.

Розклад

$$\varepsilon f=\varepsilon f_1+\varepsilon^2 f_2+\varepsilon^3\ldots,\ f\nu\left(\tau,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial^3 u}{\partial x_i\,\partial x_j^2},0\right)$$

$(\nu=1,2,3,\ldots)$ розуміємо як асимптотичний, тобто при малих ε

$$\left|f-\sum_{\nu=1}^{p}\varepsilon^{\nu-1}f\nu\right|<C_p\varepsilon^p,\qquad C_p=const.$$

Щоб однозначно визначити нові невідомі функції a і ψ, задамо додаткові співвідношення

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=-\frac{\partial \ln\xi}{\partial x_j}a(x_1,x_2,\varepsilon)\sin(\ln\psi(x_1,x_2,\varepsilon)),\qquad (j=1,2). \qquad /7/$$

Нехай функції a і $\ln\psi$ розкладаються по степенях ε

$$\begin{aligned} a&=\bar a(\tau,\varepsilon)+\varepsilon u_1(\tau,\bar a,\ln\bar\psi)+\varepsilon^2 u_2(\tau,\bar a,\ln\bar\psi)+\ldots,\\ \ln\psi&=\ln\bar\psi(\tau,\varepsilon)+\varepsilon v_1(\tau,\bar a,\ln\bar\psi)+\varepsilon^2 v_2(\tau,\bar a,\ln\bar\psi)+\ldots, \end{aligned} \qquad /8/$$

де $\bar a=\bar a(\tau)$ і $\ln\bar\psi$ – "усереднені" амплітуда й фаза; u_i та v_i обмежені, гладкі 2π – періодичні по $\ln\bar\psi$ функції, що відповідають малим вібраціям величин a і $\ln\psi$ близько їх перших наближень $\bar a$ і $\ln\bar\psi$.

Повна фаза „хвильового" розв"язку збуреного рівняння /5/ – нелінійна функція, градієнтно близька до повної фази $\ln\xi$ розв"язку рівняння /I/, тобто

$$\frac{\partial \ln\bar\psi}{\partial x_j}=\frac{\partial \ln\xi}{\partial x_j}+\varepsilon\frac{\partial h}{\partial \tau_j}\qquad (j=1,2), \qquad /9/$$

де $\bar{h}=\bar{h}(\tau)$ характеризує зміну повної фази по всіх координатах. Підставляючи /8/ в /6/ і /7/, у першому наближенні одержуємо

$$u=\bar{a}\cos(\ln\bar{\psi})+\varepsilon(u_1\cos(\ln\bar{\psi})-\bar{a}v_1\sin(\ln\bar{\psi})),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}=-\frac{\partial\ln\xi}{\partial x_j}\bar{a}\sin(\ln\bar{\psi})+\varepsilon(-u_1\sin(\ln\bar{\psi})- \qquad /10/$$

$$-\bar{a}v_1\cos(\ln\bar{\psi}))\cdot\frac{\partial\ln\xi}{\partial x_j}.$$

Далі, застосовуючи методику, викладену в праці [1], дістаємо систему рівнянь для визначення u_1 і v_1

$$\frac{\partial^3u_1}{\partial(\ln\psi)^3}+2(1-ctg(\ln\bar{\psi}))\frac{\partial^2u_1}{\partial(\ln\bar{\psi})^2}+(2ctg^2(\ln\bar{\psi})-$$

$$-2ctg(\ln\bar{\psi})+1)\frac{\partial u_1}{\partial(\ln\bar{\psi})}=\varphi_1(\tau,\bar{a},\ln\bar{\psi},f_1)=\varphi_1; \qquad /11/$$

$$\frac{\partial^3v_1}{\partial(\ln\bar{\psi})^3}+2(1-tg(\ln\bar{\psi}))\frac{\partial^2v_1}{\partial(\ln\bar{\psi})^2}+(2tg^2(\ln\bar{\psi})-$$

$$-2tg(\ln\bar{\psi})+1)\frac{\partial v_1}{\partial\ln\bar{\psi}}=\varphi_2(\tau,\bar{a},\ln\bar{\psi},f_1)=\varphi_2.$$

Усереднюючи ліві та праві частини системи /10/ з врахуванням залежності /9/ та умови /3/, одержуємо систему амплітудно-фазових рівнянь у частинних похідних

$$\bar{a}\left(6-\frac{9\xi}{2\omega_1x_1^2}+\frac{3\xi}{\omega_1x_1}-\frac{x_1}{4}-\frac{3\omega_1x_1^3}{2\xi}-\frac{\xi^2}{2\omega_1^2x_1^3}\right)\times$$

$$\times\frac{\partial\ln\bar{\Psi}}{\partial x_1}-\bar{a}\left(\frac{5x_2}{4}-\frac{3\omega_1x_1^2x_2}{2\xi}\right)\frac{\partial\ln\bar{\Psi}}{\partial x_2}+\left(-\frac{5\xi}{2\omega_1x_1}+\frac{5x_1}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega_2x_1x_2^2}{2\xi}-\frac{3\xi^3}{8x_1^5\omega_1^3}\right)\frac{\partial\bar{a}}{\partial x_1}+\left(\frac{5x_2}{4}+\frac{\omega_2x_2^3}{2\xi}\right)\frac{\partial\bar{a}}{\partial x_2}=$$

$$=\varepsilon\cdot\frac{\xi^2}{2^3}\langle f_1\sin(\ln\bar{\psi})\rangle;$$

$$\left(-\frac{5\xi}{2\omega_1x_1}+\frac{5x_1}{4}+\frac{x_1\omega_2x_2^2}{2\xi}-\frac{3\xi^3}{8\omega_1^3x_1^5}\right)\frac{\partial\ln\bar{\Psi}}{\partial x_1}+\left(\frac{5x_2}{4}+\frac{\omega_2x_2^3}{2\xi}\right)\frac{\partial\ln\bar{\Psi}}{\partial x_2}+$$

$$+\frac{1}{\bar{a}}\left(-6+\frac{9}{2\omega_1 x_1^2}-\frac{5\xi}{2\omega_1 x_1}-\frac{x_1}{4}+\frac{3\omega_1 x_1^3}{\xi}+\frac{\xi^2}{4\omega_1^2 x_1^3}\right)\frac{\partial\bar{a}}{\partial x_1}+$$

$$+\left(\frac{5x_2}{4}+\frac{3\omega_1 x_1^2 x_2}{2\xi}\right)\frac{\partial\bar{a}}{\partial x_2}=\varepsilon\,\frac{\xi^2}{2^3}<f_1\cos(\ln\bar{\psi})>. \quad /12/$$

Інтегруванням системи /II/ знаходимо

$$u_1(\tau,\bar{a},\ln\bar{\psi})=u_{10}(\tau,\bar{a})+\frac{1}{5}\int(2ctg(\ln\bar{\psi})-1)\varphi_1\,d(\ln\bar{\psi})-$$

$$-\cos(\ln\bar{\psi})\left(u_{20}(\tau,\bar{a})+\frac{1}{2}\int\frac{\varphi_1\,d(\ln\bar{\psi})}{\sin(\ln\bar{\psi})}\right)-\frac{1}{5}e^{-2\ln\bar{\psi}}\times$$

$$\times(2\sin(\ln\bar{\psi})+\cos(\ln\bar{\psi}))\left(\int\frac{\varphi_1\cdot e^{2\ln\bar{\psi}}d(\ln\bar{\psi})}{\sin(\ln\bar{\psi})}+u_0(\tau,\bar{a})\right);$$

$$v_1(\tau,\bar{a},\ln\bar{\psi})=\frac{1}{5}\int\varphi_2\cdot(2tg(\ln\bar{\psi})-1)\,d(\ln\bar{\psi})+$$

$$+v_{10}(\tau,\bar{a})-\sin(\ln\bar{\psi})\left(v_{20}(\tau,\bar{a})-\frac{1}{2}\int\frac{\varphi_2\,d(\ln\bar{\psi})}{\cos(\ln\bar{\psi})}\right)+$$

$$+\frac{1}{5}e^{2\ln\bar{\psi}}(\sin(\ln\bar{\psi})+2\cos(\ln\bar{\psi}))\left(\frac{1}{2}\int\frac{\varphi_2\,d(\ln\bar{\psi})}{e^{2\ln\bar{\psi}}\cos(\ln\bar{\psi})}+\right.$$

$$\left.+v_{30}(\tau,\bar{a})\right), \quad /13/$$

де $u_{10}, u_{20}, u_{30}, v_{10}, v_{20}, v_{30}$ – довільні функції. Отже, асимптотичний розв"язок квазілінійного рівняння /5/ у першому наближенні має вигляд /10/, де функції u_1 і v_1 зображаються виразами /13/, амплітуду $\bar{a}$ та повну фазу $\ln\bar{\psi}$ знаходимо з системи рівнянь першого наближення у частинних похідних /12/.

Список літератури: I. Митропольський Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Вища школа, Головное издательство, 1976.
2. Мосеенков В.Б. Асимптотика волновых решений эллиптических

уравнений с переменными коэффициентами. - В кн.: Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. Киев, 1975.

Стаття надійшла в редколегію 10.03.81

УДК 517.946

В.М.Цимбал

КУТОВИЙ ПРИМЕЖОВИЙ ШАР У ЗМІШАНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Деякі труднощі в побудові асимптотики розв"язків сингулярно збурених задач для різного типу рівнянь, зв"язані з наявністю кутових точок області, як показано у працях [1, 2], можна подолати, ввівши в асимптотику функції кутового примежового шару. Зокрема, В.Ф.Бутузов [1, 2] побудував асимптотику розв"язку змішаних задач для деяких гіперболічних рівнянь.

Методом примежового шару [3, 4] з застосуванням функцій кутового примежового шару будуємо асимптотичний розклад розв"язку змішаної задачі для гіперболічного рівняння другого порядку.

В області $D_T=\{(x,t): 0\le x\le l, 0\le t\le T\}$ розглянемо змішану задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}-b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+c(x,t)u=f(x,t), \quad /1/$$

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0, \quad /2/$$

$$u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0, \quad /3/$$

де $\varepsilon>0$ - малий параметр.

Нехай виконуються умови:

1/ $a(x,t)>0,\ b(x,t)>0,\ c(x,t)>0$ в D_T;

2/ функції $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ - достатньо гладкі для проведення подальших викладок;

3/ $f(q,0)=f_t(q,0)=f_x(q,0)=0 \quad q=0,l.$

Розклад розв'язку задачі /1/-/3/ шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}v_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}\Pi_i(x,\tau)+\sum_{i=0}^{2N+1}\varepsilon^{i/2}Q_i(\xi,t)+$$

$$+\sum_{i=0}^{2N+1}\varepsilon^{i/2}\tilde{Q}_i(\eta,t)+\sum_{i=0}^{2N+1}\varepsilon^{i/2}P_i(\xi,\tau)+\sum_{i=0}^{2N+1}\varepsilon^{i/2}\tilde{P}_i(\eta,\tau)+R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /4/$$

де $\tau=t/\varepsilon$, $\xi=x/\sqrt{\varepsilon}$, $\eta=(l-x)/\sqrt{\varepsilon}$: функції, що входять у /4/ визначимо далі. Для скорочення записів вважаємо $\varphi_i\equiv 0$ / $i<0$ або ж i не ціле/, де φ_i - функції будь-яких аргументів.

Регулярну частину асимптотики знаходимо за допомогою рівнянь

$$v_0(x,t)=\frac{f(x,t)}{c(x,t)},\ v_i(x,t)=-\frac{1}{c(x,t)}\Big[\frac{\partial v_{i-1}}{\partial t}-b(x,t)\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x^2}+$$

$$+\frac{\partial^2 v_{i-2}}{\partial t^2}-a(x,t)\frac{\partial^2 v_{i-2}}{\partial x^2}\Big]\quad (i=1,\dots,N). \qquad /5/$$

Функції $v_i(x,t)(i=0,\dots,N)$ визначаються рекурентно з /5/ і, взагалі кажучи, не задовольняють умовам /2/, /3/.

$\Pi(x,\tau)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^{i}\Pi_i(x,\tau)$ служить для того, щоб сумісно з регулярною частиною задовольнити /3/. $\Pi(x,\tau)$ шукаємо за допомогою рівняння

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\tau^2}+\frac{\partial\Pi}{\partial\tau}+c(x,0)\Pi=[c(x,0)-c(x,\varepsilon\tau)]\Pi+\varepsilon b(x,\varepsilon\tau)\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}+$$

$$+\varepsilon^2 a(x,\varepsilon\tau)\frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}.$$

Розкладаючи коефіцієнти у стрічки Тейлора в околі $t=0$ і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, одержуємо рівняння для визначення $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\dots,N)$

$$\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\tau^2}+\frac{\partial\Pi_i}{\partial\tau}+c(x,0)\Pi_i=\varphi_i(x,\tau), \qquad /6/$$

де $\varphi_0(x,\tau)\equiv 0$, $\varphi_i(x,\tau)$ легко можна записати та лінійно виразити через $\Pi_j(x,\tau)$ $(j<i)$ і їх похідні.

Рівняння для визначення усіх інших функцій з /4/ дістаємо аналогічно з використанням відповідного регуляризуючого перетворення і стандартної процедури асимптотичних збурень. Маємо

$$-B(0,t)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \xi^2}+c(0,t)Q_i=\psi_i(\xi,t) \quad (i=0,\ldots,2N+1), \qquad /7/$$

$$-B(\ell,t)\frac{\partial^2 \tilde{Q}_i}{\partial \eta^2}+c(\ell,t)\tilde{Q}_i=q_i(\eta,t) \quad (i=0,\ldots,2N+1), \qquad /8/$$

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial \tau^2}-B(0,0)\frac{\partial^2 P_i}{\partial \xi^2}+\frac{\partial P_i}{\partial \tau}+c(0,0)P_i=z_i(\xi,\tau)\,(i=0,\ldots,2N+1), \quad /9/$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}_i}{\partial \tau^2}-B(\ell,0)\frac{\partial^2 \tilde{P}_i}{\partial \eta^2}+\frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial \tau}+c(\ell,0)\tilde{P}_i=S_i(\eta,\tau)\ (i=0,\ldots,2N+1), \quad /10/$$

де усі функції $\psi(\xi,t)$, $q_i(\eta,t)$, $z_i(\xi,\tau)$, $S_i(\eta,\tau)$ легко записати в явному вигляді.

Додаткові умови одержуємо за допомогою /2/, /3/ і /4/

$$\Pi_i(x,0)=-v_i(x,0),\ \frac{\partial \Pi_i(x,0)}{\partial \tau}=-\frac{\partial v_{i-1}(x,0)}{\partial t} \quad (i=0,\ldots,N), \qquad /11/$$

$$Q_i(0,t)=-v_{i/2}(0,t),\ Q_i(\xi,t)\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0 \quad (i=0,\ldots,2N+1), \qquad /12/$$

$$\tilde{Q}_i(0,t)=-v_{i/2}(\ell,t),\ \tilde{Q}_i(\eta,t)\xrightarrow[\eta\to\infty]{}0 \quad (i=0,\ldots,2N+1), \qquad /13/$$

$$P_i(0,\tau)=-\Pi_{i/2}(0,\tau),\ P_i(\xi,0)=-Q_i(\xi,0),\ \frac{\partial P_i(\xi,0)}{\partial \tau}=-\frac{\partial Q_{i-2}(\xi,0)}{\partial t} \quad (i=0,\ldots,2N+1). \qquad /14/$$

$$\tilde{P}_i(0,\tau)=-\Pi_{i/2}(\ell,\tau),\ \tilde{P}_i(\eta,0)=-\tilde{Q}_i(\eta,0),\ \frac{\partial \tilde{P}_i(\eta,0)}{\partial \tau}=-\frac{\partial Q_{i-2}(\eta,0)}{\partial t} \quad (i=0,\ldots,2N+1). \qquad /15/$$

Отже, функції $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$, $\tilde{Q}_i(\eta,t)$ визначаємо як розв"язки відповідно задач /6/, /11/; /7/, /12/; /8/, /13/ для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Функції $P_i(\xi,\tau)$, $\widetilde{P}_i(\eta,\tau)$ знаходимо як розв"язки змішаних задач для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відповідно /9/, /I4/ і /I0/, /I5/. Добре видно, що усі функції з /4/ знаходяться рекурентно, якщо їх шукати у послідовності $V_0(x,t)$, $\Pi_0(x,\tau)$, $Q_0(\xi,t)$, $\widetilde{Q}_0(\eta,t)$, $P_0(\xi,\tau)$, $\widetilde{P}_0(\eta,\tau)$ і так далі. Аналогічними міркуваннями [4] легко показати, що всі функції $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$, $\widetilde{Q}_i(\eta,t)$ є функціями звичайного примежового шару. Розв"язки задач /9/, /I4/, і /I0/, /I5/ оцінюємо у явному вигляді за допомогою функції Рімана [5]. Використовуючи оцінки, аналогічні оцінкам з праці [I], переконуємося, що функції $P_i(\xi,\tau)$ і $\widetilde{P}_i(\eta,\tau)$ є функціями кутового примежового шару в околі відповідно точок $(0,0)$ і $(\ell,0)$.

Методом інтегралів енергії [5] одержана оцінка

$$\| R_N(x,t,\varepsilon) \|_{L_2(D_T)} = O(\varepsilon^{N+1/2}),$$

яка має місце для досить малих ε. Її наявність доводить асимптотичну коректність розкладу /4/.

Одержаний результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. При виконанні умов I/ – 3/ розв"язок задачі /I/–/3/ допускає асимптотичне представлення /4/, де $V_i(x,t)$ – регулярна частина асимптотики; $\Pi_i(x,\tau)$, $Q_i(\xi,t)$, $\widetilde{Q}_i(\eta,t)$ – функції звичайного примежового шару в околі відповідних сторін прямокутника D_T; $P_i(\xi,\tau)$, $\widetilde{P}_i(\eta,\tau)$ – функції кутового примежового шару в околі точок $(0,0)$ і $(\ell,0)$.

Список літератури: I. Бутузов В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. – Математический сборник, 1977, № 3. 2. Бутузов В.Ф. Угловой погранслой в сингулярно возмущенных задачах с частными производными.– Дифференциальные уравнения, 1979, т.I5, № I0. 3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. 4. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Успехи матем. наук, 1957, № 5. 5. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964.

Стаття надійшла в редколегію 20.09.80

УДК 517.946

В.М.Цимбал

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНЕ РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

В області $D_T = \{0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ розглянемо таку задачу:

$$L_\varepsilon u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t)u = f(x,t), \qquad /1/$$

$$u(0,t,\varepsilon) = 0, \ \frac{\partial u(0,t,\varepsilon)}{\partial x} = 0, \ u(l,t,\varepsilon) = 0, \ u(x,0,\varepsilon) = 0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр.

Умови однозначної розв"язності задачі /1/, /2/ без параметра встановлені у праці [ ].

Якщо в /1/ формально прийняти $\varepsilon = 0$, то одержимо гіперболічне рівняння. Виродження параболічного рівняння другого порядку в гіперболічне першого порядку, а також узагальнення на параболічне рівняння будь-якого парного порядку вже досліджено.

Побудуємо асимптотичний розклад до деякого порядку N по степенях малого параметра ε розв"язку задачі /1/, /2/. При цьому використовуємо метод примежового шару [1].

Припускаємо, що виконуються умови:

1/ $a(x,t) > 0$ в D_T;

2/ функції $a(x,t)$, $b(x,t)$, $f(x,t)$ достатньо гладкі в D_T для проведення подальших викладок;

3/ $\dfrac{\partial^{i+j} f(0,0)}{\partial x^i \partial t^j} = \dfrac{\partial^{i+j} f(l,0)}{\partial x^i \partial t^j}$ $(i=0,\dots,N+1;\ i+j=0,\dots,N+1)$.

Асимптотичний розклад розв"язку задачі /1/, /2/ шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)+\varepsilon\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(\xi,t)+\sum_{i=0}^{N+1}\varepsilon^i Q_i(\eta,t)+\varepsilon^{N+1}R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /3/$$

де $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$, $\eta=\frac{\ell-x}{\varepsilon}$. Всі функції, що входять у /3/, визначені нижче.

Рівняння для знаходження регулярної частини асимптотики $\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{u}_i(x,t)$ дістаємо, виконуючи стандартну процедуру методу збурень

$$\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial t}+a(x,t)\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x}+b(x,t)\bar{u}_i=f_i(x,t) \quad (i=0,\dots,N), \qquad /4/$$

де $f_0(x,t)\equiv f(x,t),\ f_1(x,t)\equiv 0,\ f_i(x,t)=\frac{\partial^3\bar{u}_{i-2}}{\partial x^3}\ (i=2,\dots,N)$.

Опишемо, як одержати рівняння для визначення $\Pi_i(\xi,t)$. В операторі L_ε зробимо регуляризуюче перетворення $\xi=\frac{x}{\varepsilon}$ і розкладемо всі коефіцієнти у скінченні строки Тейлора в околі $x=0$. Визначений таким чином оператор позначимо M_ε . Зрівнюючи в $M_\varepsilon(\varepsilon\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\Pi_i(\xi,t)=0$ коефіцієнти при однакових степенях ε , дістаємо рівняння для визначення $\Pi_i(\xi,t)\ (i=0,\dots,N)$.

$$\frac{\partial^3\Pi_i}{\partial\xi^3}-a(0,t)\frac{\partial\Pi_i}{\partial\xi}=F_i(\xi,t), \qquad /5/$$

де $F_0(\xi,t)\equiv 0$, $F_i(\xi,t)$ / $i=1,\dots,N$ / лінійно виражаються через Π_j та їх похідні $(j<i)$.

Рівняння для знаходження $Q_i(\eta,t)$ / $i=0,\dots,N+1$ / одержуємо аналогічно /регуляризуюче перетворення в околі $x=\ell,\ \xi=\frac{\ell-x}{\varepsilon}$/

$$\frac{\partial^3 Q_i}{\partial\eta^3}-a(\ell,t)\frac{\partial Q_i}{\partial\eta}=P_i(\eta,t), \qquad /6/$$

де $P_0(\eta,t)\equiv 0$, $P_i(\eta,t)$ / $i=1,\dots,N+1$ / явно виражаються через $Q_j(\eta,t)$ $(j<i)$ та їх похідні.

Для визначення умов, за яких слід розв"язувати /4/, /5/, /6/, враховуємо, що $u(x,t,\varepsilon)$, яке записується у вигляді /3/, повинна задовольняти граничним і початковим умовам /2/. Маємо

$$\bar{u}_i(0,t) = -\Pi_{i-1}(0,t),\ \bar{u}_i(x,0) = 0\ (i = 0,\dots,N), \qquad /7/$$

де

$$\Pi_{-1}(\xi,t) \equiv 0;$$

$$\frac{\partial \Pi_i(0,t)}{\partial \xi} = -\frac{\partial \bar{u}_i(0,t)}{\partial x};\ \Pi_i(\xi,t)\xrightarrow[\xi\to\infty]{} 0\ (i = 0,\dots,N); \qquad /8/$$

$$Q_i(0,t) = -\bar{u}_i(l,t),\ Q_i(\eta,t)\xrightarrow[\eta\to\infty]{} 0\ (i = 0,\dots,N+1); \qquad /9/$$

$$\bar{u}_{N+1} \equiv 0.$$

Зауважимо, тут ще враховано, що $\Pi_i(\xi,t)$ і $Q_i(\eta,t)$ – функції, які ліквідують нев"язку в околі відповідної сторони прямокутника D_T і, як легко далі безпосередньо перевірити, враховуючи умови 3/, $Q_i(\eta,0)=0$ / $i=0,\dots,N+1$ /, $\Pi_i(\xi,0)=0$/ $i=0,\dots,N$ /.

Отже, ми одержали рекурентний процес визначення функцій, що входять у /3/. Їх визначають у порядку $\bar{u}_0(x,t)$, $\Pi_0(\xi,t)$, $Q_0(\xi,t)$, $\bar{u}_1(x,t)$ і т.д. $\bar{u}_i(x,t)$ / $i=0,\dots,N$ / є розв"язками змішаних задач для гіперболічних рівнянь /4/, /7/. Задачу /4_0/, /7_0/ назвемо виродженою. Легко перевірити, що необхідні для однозначної розв"язності цих задач умови узгодженості у точці $(0,0)$ випливають з 3/; розв"язки можна одержати методом характеристик [4].

$\Pi_i(\xi,t)$ / $i=0,\dots,N$ / – розв"язки задач / 5/, /8/ для звичайних диференціальних рівнянь / t – параметр/. Серед коренів характеристичного рівняння $\lambda^3 - a(0,t)\lambda = 0$ наявний рівно один від"ємний корінь, а саме $\lambda = -\sqrt{a(0,t)}$. При переході до виродженої задачі на лівій границі прямокутника D_T випадає гранична умова. Отже, кількість коренів характеристичного рівняння з від"ємною дійсною частиною збігається з кількістю граничних умов, що випадає при переході до виродженої задачі, тобто виродження регулярне [I]. Міркуючи аналогічно [I], легко показати, що $\Pi_i(\xi,t)$– функції типу примежового шару в околі правої границі прямокутника D_T .

Для визначення $R_N(x,t,\varepsilon)$ одержуємо задачу, аналогічну задачі /I/, /2/. Методом інтегралів енергії [3] дістаємо оцінку

$$\| R_N(x,t,\varepsilon) \|_{L_2(D_T)} \leq C,$$

де константа C не залежить від ε. Що і доводить асимптотичну коректність розкладу /3/.

Результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. При виконанні умов I/ – 3/ розв"язок задачі /I/, /2/ допускає асимптотичний розклад /3/, де $\bar{U}_i(x,t)$, $\Pi_i(\xi,t)$, $Q_i(\eta,t)$ визначаються рекурентно і є розв"язками відповідно задач /4/, /7/; /5/, /8/; /6/, /9/. Π – функції – функції типу примежового шару в околі лівої границі прямокутника D_T, Q – функції – функції типу примежового шару в околі правої границі прямокутника D_T.

Список літератури: I. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Успехи матем. наук, 1957, т.12, № 5. 2. Д ж у р а е в Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. –Ташкент: Фан, 1979. 3. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. 4. П е т р о в с к и й И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.

Стаття надійшла в редколегію 9.09.80

УДК 517.917

Л.М.Лісевич

ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНОГО ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Відомо, що обмежений неозначений інтеграл від майже періодичної /м.п./ функції Бора є знову м.п. функцією Бора [2] і обмежений неозначений інтеграл від S^p – майже періодичної / S^p – м.п./ функції також м.п. функція Бора [I].

Розглянемо випадок, коли неозначений інтеграл від м.п. функції $f(x)$ має вигляд

$$\int_0^x f(t)dt = cx + g(x), \qquad /1/$$

де C - стала; $-\infty < x < +\infty$.

Лема. Якщо $f(x)$ S^p - м.п. і $g(x)$ обмежена на всій дійсній осі функція, то $g(x)$ м.п. функція Бора.

Доведення. Запишемо рівність /1/ у вигляді

$$\int_0^x [f(t) - c]\,dt = g(x). \qquad /2/$$

Функції $f(x) - C$ як сума двох S^p - м.п. функцій - це знову S^p - м.п. функція. Якщо тепер $g(x)$ - обмежена, то вона м.п. функція Бора, як обмежений неозначений інтеграл від S^p - м.п. функції.

Узагальнимо результат праці [3] на випадок рівняння

$$\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{dy}{dx}\right] = \varphi(x)y + \psi(x). \qquad /3/$$

Теорема. Нехай

1/ $K(x)$ - м.п. функція Бора така, що

$$0 < a^2 < K(x) < b^2, \qquad /4/$$

$$\int_0^x \frac{dt}{K(t)} = cx + g(x), \qquad /5/$$

де C - стала, а $g(x)$ - обмежена функція, $/ -\infty < x < +\infty /$;

2/ $\varphi(x)$ - м.п. функція Бора така, що

$$0 < \alpha^2 < \varphi(x) < \beta^2; \qquad /6/$$

3/ $\psi(x)$ - S^p - м.п. функція з обмеженим інтегралом

$$\omega(x) = \int_0^x \psi(t)dt. \qquad /7/$$

Тоді існує обмежений і м.п. за Бором розв"язок $y(x)$ рівняння /3/.

Доведення. Прийнявши

$$z = \int_0^x \frac{dt}{K(t)} = cx + g(x), \qquad /8/$$

$$\Phi(z) = K(x)\varphi(x), \quad \Psi(z) = K(x)\psi(x),$$

із /3/ отримуємо

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \Phi(z)y + \Psi(z). \qquad /9/$$

Вважатимемо, що $c > 0$.

У праці [3] показано, коли $\Phi(z)$ - м.п. функція Бора така, що $0 < A^2 < \Phi(z) < B^2$, а $\Psi(z)$ - S^p - м.п. функція з обмеженим неозначеним інтегралом

$$\int_0^z \Psi(t)\,dt,$$

то існує обмежений і м.п. розв"язок $y(z)$ рівняння /9/.

Нам залишилося довести, що із м.п. за Бором розв"язку $y(z)$ рівняння /9/ випливає м.п. розв"язку $y(x)$ рівняння /3/.

Як і в праці [3] , розв"язок рівняння /9/ шукаємо у вигляді ряду

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(z), \qquad /10/$$

де

$$y_0(z) = -\frac{1}{2B}\Big\{\int_z^{+\infty} e^{-B(u-z)}\Psi(u)\,du + \int_{-\infty}^{z} e^{B(u-z)}\Psi(u)\,du\Big\}, \qquad /11/$$

$$y_n(z) = -\frac{1}{2B}\Big\{\int_z^{+\infty} e^{-B(u-z)}F(u)y_{n-1}(u)\,du + \int_{-\infty}^{z} e^{B(u-z)}F(u)y_{n-1}(u)\,du\Big\};$$

$$F(u) = \Phi(z) - B^2, \ n = 1,2,\dots, \ (B^2 = \beta^2 b^2). \qquad /12/$$

Не порушуючи загальності, вважаємо, що $B>0$. Як показано у праці [3], ряд /10/ рівномірно збіжний для $-\infty < z < +\infty$.

Повертаючись тепер до змінної x, на основі співвідношення /8/ із /11/ отримуємо

$$y_0(x) = -\frac{1}{2B}\left\{\int_x^{+\infty} e^{-B[cv+g(v)-cx-g(x)]}\psi'(v)dv + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{x} e^{B[cv+g(v)-cx-g(x)]}\psi(v)dv\right\}.$$

Застосувавши тепер другу теорему про середнє значення, маємо

$$y_0(x) = -\frac{1}{2B}\left\{e^{Bg(x)}\int_x^{\theta_1} e^{-Bg(v)}\psi(v)dv + \right.$$

$$\left. + e^{-Bg(x)}\int_{\theta_2}^{x} e^{Bg(v)}\psi(v)dv. \right. \qquad /13/$$

Функції $g(x)$, $e^{Bg(x)}$, $e^{-Bg(x)}$ і $\omega(x)$ є м.п. за Бором функції, тому

$$\left|\int_0^x e^{Bg(t)}\psi(t)dt\right| \leq M|\omega(x)| < +\infty.$$

Звідси випливає м.п. за Бором інтегралів

$$\int_0^x e^{Bg(t)}\psi(t)dt, \quad \int_0^x e^{-Bg(t)}\psi(t)dt,$$

а, отже, м.п. за Бором $y_0(x)$.

Далі з /12/ при $n=1$ записуємо

$$y_1(z) = -\frac{1}{2B}\left\{\int_z^{+\infty} e^{-B(u-z)}F(u)y_0(u)du + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{z} e^{-B(u-z)}F(u)y_0(u)du. \right.$$

Повертаючись до змінної x , отримуємо

$$y_1(x) = -\frac{1}{2B}\left\{\int_x^{+\infty} e^{-B[cv+g(v)-cx-g(x)]} F(v) y_0(v) \frac{dv}{K(v)} + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{x} e^{B[cv+g(v)-cx-g(x)]} F(v) y_0(v) \frac{dv}{K(v)} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2B}\left\{ e^{Bg(x)} e^{Bcx} \int_x^{+\infty} e^{-Bcv}\left[e^{-Bg(v)}\varphi(v)\right] y_0(v)\,dv + \right.$$

$$+ e^{-Bg(x)} e^{-Bcx} \int_{-\infty}^{x} e^{Bcv}\left[e^{Bg(v)}\varphi(v)\right] y_0(v)\,dv +$$

$$+ \frac{B}{2}\left\{ e^{Bg(x)} e^{Bcx} \int_x^{+\infty} e^{-Bcv} e^{-Bg(v)} y_0(v) \frac{dv}{K(v)} + \right.$$

$$\left. + e^{-Bg(x)} e^{-Bcx} \int_{-\infty}^{x} e^{Bcv} e^{Bg(v)} y_0(v) \frac{dv}{K(v)} \right\}.$$

Приймемо

$$T_1(x) = e^{Bcx} \int_x^{+\infty} e^{-Bcv}\left[e^{-Bg(v)}\varphi(v)\right] y_0(v)\,dv,$$

$$T_2(x) = e^{-Bcx} \int_{-\infty}^{x} e^{Bcv}\left[e^{Bg(v)}\varphi(v)\right] y_0(v)\,dv,$$

$$T_3(x) = e^{Bcx} \int_x^{+\infty} e^{-Bcv} e^{-Bg(v)} y_0(v)\,dv,$$

$$T_4(x) = e^{-Bcx} \int_{-\infty}^{x} e^{Bcv} e^{Bg(v)} y_0(v)\,dv.$$

Довівши м.п. за Бором функцій $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$, покажемо цим м.п. за Бором $y_1(x)$.

$$P_1(x) = e^{-Bg(x)} \varphi(x) y_0(x),$$

$$P_2(x) = e^{Bg(x)} \varphi(x) y_0(x),$$

$$P_3(x) = e^{-Bg(x)} \frac{y_0(x)}{K(x)},$$

$$P_4(x) = e^{Bg(x)} \frac{y_0(x)}{K(x}$$

є м.п. функції Бора як добуток м.п. за Бором функцій. Нехай $\tau = \tau(\frac{\varepsilon}{4})$ їх спільний $\frac{\varepsilon}{4}$ – майже період. Тоді

$$|T_1(x+\tau) - T_1(x)| =$$

$$= |e^{Bc(x+\tau)} \int_{x+\tau}^{+\infty} e^{-Bcv} P_1(v)dv - e^{Bcx} \int_{x}^{+\infty} e^{-Bcv} P_1(v)dv| \leq$$

$$\leq e^{Bcx} \int_{x}^{+\infty} e^{-Bcv} |P_1(v+\tau) - P_1(v)| dv < \frac{\varepsilon}{4Bc},$$

тобто $T_1(x)$ – м.п. за Бором функція.

Аналогічно показуємо, що $T_2(x)$, $T_3(x)$, $T_4(x)$ м.п. функції Бора. Отже, $y_1(x)$ теж м.п. функція Бора.

Поступаючи аналогічно, можна показати, що $y_k(x)$ $/k=2,3,\ldots/$ м.п. функції Бора. Тоді рівномірно збіжний ряд

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

м.п. функція Бора, причому $y(x)$ є розв"язком рівняння /3/. Теорема доведена.

Список літератури: I. К о в а н ь к о А.С., Л и с е в и ч Л.Н. О некоторых свойствах интеграла и производной от S^p – почти периодической функции. – Вопросы математической физики и теории функций, I964, № 2. 2. Л е в и т а н Б.М. Почти периодические функции. М., I953. 3. Л і с е в и ч Л.М., К о с т ю к Я.П. Про майже періодичність розв"язків деяких звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з S^p – майже періодичною правою частиною. – ДАН УРСР, сер.А, I97I, № I.

Стаття надійшла в редколегію 20.03.8I

УДК 517.946

І.М.Колодій

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ГЕЛЬДЕРОМ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДУ З ВИРОДЖЕННЯМ

Доведемо неперервність за Гельдером узагальнених розв"язків рівнянь вигляду

$$u_t - \operatorname{div} A(x,t,u,u_x) = B(x,t,u,u_x), \qquad /1/$$

$$x=(x_1,\dots,x_n),\ u_x=(u_{x_1},\dots,u_{x_n}),$$

$$A(x,t,u,u_x)=(A_1(x,t,u,u_x),\dots,A_n(x,t,u,u_x)).$$

Цей результат міститься у праці [1]. Зауважимо, що неперервність за Гельдером можна отримати як наслідок з нерівності Харнака [3]. Доведемо неперервність за Гельдером безпосередньо, не використовуючи нерівності Харнака.

Нехай Ω обмежена область в n -мірному евклідовому просторі E^n векторів $x=(x_1,\dots,x_n)$. Кулю $(x\in E^n;\ |x|<r)$ запишемо як $K(r)$. У просторі E^{n+1} векторів (x,t) через Q і $Q(r)$ позначаємо відповідно циліндри $\Omega\times(T_1,T_2)$, $K(r)\times(-r^2,0)$. Припустимо, що вектор-функція $A(x,t,u,\bar{p})$ і функція $B(x,t,u,\bar{p})$ для всіх значень $(x,t)\in Q$ і всіх значень u і $\bar{p}=(p_1,\dots,p_n)$ задовольняють умови

$$A(x,t,u,\bar{p})\bar{p} \geq a_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|p_i|^2 - d(x,t)|u|^2 - g(x,t),$$

$$|A(x,t,u,\bar{p})| \leq a_2\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x,t)|p_i| + c(x,t)|u| + e(x,t), \qquad /2/$$

$$|B(x,t,u,\bar{p})| \leq \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)|p_i| + h(x,t)|u| + f(x,t),$$

де a_1, a_2 – додатні константи; $0\leq\lambda_i(x,t)\leq\mu_i(x,t)$; функції $d(x,t), g(x,t), e(x,t), b_i(x,t), h(x,t), f(x,t)$ – невід"ємні.

Вважаємо, що

$$\lambda_i^{-1}(x,t) \in L_{t_i,t_0}(Q), \qquad /3/$$

а функції

$$\mu_i(x,t),\ \mu_i^2(x,t)\lambda_i^{-1}(x,t),\ d(x,t),\ g(x,t),\ c^2(x,t)\mu_i^{-1}(x,t),$$

$$e^2(x,t)\mu_i^{-1}(x,t),\ b^2(x,t)\lambda_i^{-1}(x,t), h(x,t), f(x,t) \in L_{p,q}(Q), \qquad /4/$$

де

$$\frac{p}{q'} > \theta, \qquad /5/$$

$$\theta = \frac{n}{2-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}} \cdot \frac{t_0+1}{t_0};\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} < 2;\ n \geq 2,\ \frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1.$$

Надалі через p', q' позначаємо числа, спряжені за Гельдером, з числами p і q.

$$M(\tau) = \sum_{i=1}^{n}\|\mu_i^2\lambda_i^{-1}\|_{p,q,Q(\tau)};\ P(\tau) = \sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{-1}\|_{t_i,t_0,Q(\tau)};$$

$$\|u\|_{p,q,Q(\tau)} = \left(\tau^{-2}\int_{-\tau^2}^{0}\left(\tau^{-n}\int_{K(\tau)}|u|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

<u>Лема 1.</u> Нехай у функції $u(x,t)$, що належить $L_{2,2}(Q(\tau))$, існують узагальнені похідні u_{x_i}, $i=1,\dots,n$ такі, що $\lambda_i^{\frac{1}{2}}u_{x_i} \in L_{2,2}(Q(\tau))$.

Тоді

$$\|u\|_{q_1,q_2,Q(\tau)} \leq C\left(\tau P^{\frac{1}{2}}(\tau)\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{\frac{1}{2}}u_{x_i}\|_{2,2,Q(\tau)} + \left(\tau^{-2}\int_{-\tau^2}^{0}\left(\tau^{-n}\int_{N_t}u^2 dx\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}\right), \qquad /6/$$

де $mes\, N_t \geq c_0\, mes\, K(\tau)$, $c_0>0$; $q_2 = \frac{2t_0}{t_0+1}$; $q_1 = 2n\left(n-2+\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^{-1}\right)^{-1}$; $C = C(n,t_i)$, коли $n+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} > 2$; q_1 – довільне число ≥ 1, $C = C(n,t_i,q_1)$, коли $n+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} = 2$.

<u>Лема 2.</u> Нехай у функції $u(x,t)$, що належить $L_{2,\infty}(Q(\tau))$ існують узагальнені похідні u_{x_i}, $i=1,\dots,n$ такі, що

$\lambda_i^{\frac{1}{2}} u_{x_i} \in L_{2,2}(Q(\tau))$. Тоді

$$\|u\|_{2kp',2kq',Q(\tau)} \le \varepsilon_0 \|u\|_{2,\infty,Q(\tau)} + C\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)\left(\tau P(\tau)^{\frac{1}{3}} \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i^{\frac{1}{2}} u_{x_i}\|_{2,2,Q(\tau)} + \left(\tau^{-2}\int_{-\tau^2}^{0}\left(\tau^{-n}\int_{K_\tau} u^2 dx\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}\right), \qquad /7/$$

де $k = 1 + \left(\frac{p}{q'} - \theta\right)(p\theta)^{-1} > 1$, $C\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) = C\left(\frac{1}{\varepsilon_0}, n, t_i, t_0\right)$, якщо $n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} > 2$;

$k = 1 + \left(\frac{p}{q'} - \theta\right)(2p\theta)^{-1} > 1$, $C\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) = C\left(\frac{1}{\varepsilon_0}, n, t_i, t_0, p, q\right)$, якщо $n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} = 2$.

Узагальнений розв"язок розуміють у сенсі інтегральної тотожності, як і в праці [3].

Нехай $u(x,t)$ узагальнений розв"язок рівняння /I/ у циліндрі Q . Припустимо, що $Q(2\tau_0) \subset Q$. Тоді за теоремою 2.I праці [3] узагальнений розв"язок обмежений у $Q(\tau_0)$ деякою константою, яку запишемо M_0 . Якщо позначити $g_0(x,t) = d(x,t)|u|^2 + g(x,t)$, $e_0(x,t) = c(x,t)|u| + e(x,t)$, $f_0(x,t) = h(x,t)|u| + f(x,t)$, $\hat{A}(x,t,\bar{p}) = A(x,t,u,\bar{p})$, $\hat{B}(x,t,\bar{p}) = B(x,t,u,\bar{p})$, то рівняння /I/ і нерівності /2/ матимуть вигляд

$$u_t - \operatorname{div} \hat{A}(x,t,u_x) = \hat{B}(x,t,u_x), \qquad /8/$$

$$\hat{A}(x,t,\bar{p})\bar{p} \ge a_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x,t)|p_i|^2 - g_0(x,t),$$

$$|\hat{A}(x,t,\bar{p})| \le a_2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x,t)|p_i| + e_0(x,t), \qquad /9/$$

$$|\hat{B}(x,t,\bar{p})| \le \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)|p_i| + f_0(x,t),$$

причому норми функцій $g_0(x,t)$, $e_0^2(x,t)\mu_i^{-1}(x,t)$, $f_0(x,t)$ в просторі $L_{p,q}(Q(\tau_0))$ обмежені константою, що залежить від M_0 і норм функцій $d(x,t)$, $g(x,t)$, $c_i^2(x,t)\mu_i^{-1}(x,t)$, $e^2(x,t)\mu_i^{-1}(x,t)$, $h(x,t)$, $f(x,t)$ у просторі $L_{p,q}(Q(\tau))$.

Теорема I. Нехай $u(x,t)$ узагальнений розв"язок рівняння /I/ у циліндрі $Q(\tau)$, $\tau \le \tau_0$, причому $\operatorname{vrai\,max}_{Q(\tau_0)} |u| \le M_0$, і нехай існують такі додатні константи M_1, M_2 , що для довіль-

ного циліндра $Q(\rho)$, $\rho \le r_0$, $M(\rho) \le M_1$, $P(\rho) \le M_2$.
Тоді знаходимо такі постійні δ і ξ, які належать інтервалу /0,I/ і залежать тільки від n, a_1, a_2, M_0, M_1, M_2, що або

I/ $osc(u, Q(\delta r)) \le C r^{\gamma}$,

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2p'} + \frac{1}{q'} - \frac{n}{2}\right) > 0, \quad C = C(n, a_1, a_2, M_0, M_1, M_2),$$

або

2/ $osc(u, Q(\delta r)) \le \xi \, osc(u, Q(r))$.

Доведення. Не зменшуючи загальності викладу, можна вважати, що $\underset{Q(r)}{vrai\,max}\,(\pm u(x,t)) = \mathcal{M}$, оскільки після додавання до функції $u(x,t)$ будь-якої постійної нова функція знову є розв"язком рівняння, аналогічного рівнянню /8/ з тими ж умовами /9/, а її коливання (osc) на довільній множині збігаються з коливаннями функції $u(x,t)$. Маємо дві можливості: I/ $\mathcal{M} < r^{\gamma}$ або 2/ $\mathcal{M} \ge r^{\gamma} > 0$. У першому випадку при довільному $\delta \in (0,1)$ $osc(u, Q(\delta r)) \le osc(u, Q(r)) \le 2\mathcal{M} \le 2r^{\gamma}$. У другому при $r^{\gamma} < C$, де C - достатньо мале, буде доведено існування таких постійних δ і ξ з інтервалу /0,I/, що має місце пункт 2 теореми I. Якщо ж $r^{\gamma} \ge C$, то

$$osc(u, Q(\delta r)) \le osc(u, Q(r_0)) \le 2M_0 \le 2M_0 \frac{1}{C} r^{\gamma}.$$

Отже, достатньо розглянути випадок $\mathcal{M} \ge r^{\gamma} > 0$, де $r^{\gamma} < C$ і C - достатньо мале. Позначимо через $v(x,t)$ ту із функцій $1 \pm \frac{u}{\mathcal{M}}$, що не менша одиниці на множині, міра якої не менша $\frac{1}{2} mes\, Q(r)$ /зауважимо, що функція $u(x,t)$ невід"ємна або недодатна на множині, міра якої не менша $\frac{1}{2} mes\, Q(r)$ /. Тоді, як доведено у праці [2], у деякому циліндрі $Q(\delta r)$, $\delta \in (0,1)$ функція $v(x,t) > \varepsilon > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(n, a_1, a_2, M_0, M_1, M_2) \in (0,1)$. Звідси, як і в праці [4], випливає пункт 2 теореми I.

Теорема 2. Нехай $u(x,t)$ узагальнений розв"язок рівняння /I/ у циліндрі $Q(r)$, $r \le r_0$, причому $\underset{Q(r_0)}{vrai\,max}\,|u| \le M_0$, і нехай існують такі додатні константи M_1 і M_2, що для довільного

циліндра $Q(\rho)$, $\rho < r_0$, $M(\rho) < M_1$, $P(\rho) \leq M_2$.
Тоді при $0 < \rho \leq r_0$ і $\alpha = \min(\gamma, \log_\delta \xi)$ має місце оцінка

$$osc(u, Q(\rho)) \leq C(1 + r_0^\gamma)\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^\alpha, \qquad /10/$$

де постійні α і C залежать від $n, a_1, a_2, M_0, M_1, M_2$.

Доведення. Зрозуміло, що існує таке число $m \geq 0$, яке $\delta r_0 \leq \delta^{-m}\rho < r_0$. Для послідовності коливань функції $u(x,t)$ у циліндрах $Q(\rho)$, $Q(\delta^{-1}\rho), \ldots, Q(\delta^{-m}\rho)$ маємо дві можливості: або при переході від одного циліндра до наступного завжди має місце пункт 2 теореми I і тоді

$$osc(u, Q(\rho)) < \xi^m osc(u, Q(\delta^{-m}\rho)) \leq 2M_0 \xi^m = C\xi^m, \qquad /11/$$

або ж на деякому кроці $K < m$, має місце пункт I теореми I і тоді

$$osc(u, Q(\rho)) \leq \xi^K osc(u, Q(\delta^{-K}\rho)) \leq C\xi^K(\delta^{-K-1}\rho)^\gamma. \qquad /12/$$

Якщо має місце /11/, то, враховуючи, що $\delta^m \leq \rho(\delta r_0)^{-1}$, запишемо $osc(u, Q(\rho)) \leq C\xi^m \leq C\delta^{m\log_\delta \xi} \leq C\delta^{m\alpha} \leq C\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^\alpha$.
За умови /12/, користуючись тотожністю

$$(\delta^{-K-1}\rho)^\gamma \xi^K = \delta^{-\gamma}(\delta^{-K}\rho)^{\gamma-\alpha}(\xi\delta^{-\alpha})^K \rho^\alpha$$

і враховуючи, що $\delta^{-K}\rho \leq r_0$ і $\xi\delta^{-\alpha} \leq 1$, отримуємо оцінку

$$osc(u, Q(\rho)) \leq C\delta^{-\gamma} r_0^{\gamma-\alpha}\rho^\alpha \leq C r_0^\gamma \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^\alpha.$$

Список літератури: I. Колодий И.М. О некоторых свойствах обобщенных решений эллиптических и параболических уравнений. М., 1972. 2. Колодій І.М. Слабка форма нерівності Харнака для невід"ємних узагальнених розв"язків параболічних рівнянь з виродженням. – У цьому ж Віснику. 3. Кружков С.Н., Колодий И.М. Априорные оценки и неравенство Харнака для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений. – Сибирский математический журнал, 1977, т.18, № 3. 4. Кружков С.Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. – Математический сборник, 1964, т.65 /107/, № 4.

Стаття надійшла в редколегію 30.12.80

УДК 517.946

І.М.Колодій

СЛАБКА ФОРМА НЕРІВНОСТІ ХАРНАКА ДЛЯ НЕВІД"ЄМНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Ця праця тісно пов"язана з попередньою [1]. Позначимо через $v(x,t)$ ту із функцій $1\pm\frac{u}{\mathcal{M}}$ у праці [1], яка не менша одиниці на множині, міра якої не менша $\frac{1}{2}\operatorname{mes} Q(\tau)$. Легко бачити, що функція $v(x,t)$ є узагальненим розв"язком рівняння

$$v_t - \operatorname{div}\tilde{A}(x,t,v_x) = \tilde{B}(x,t,v_x) \qquad /1/$$

за умов

$$\begin{gathered}
\tilde{A}(x,t,v_x)v_x \geqslant a_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|v_{x_i}|^2 - \tilde{g}(x,t),\\
|\tilde{A}(x,t,v_x)| \leqslant a_2\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x,t)|v_{x_i}| + \tilde{e}(x,t),\\
|\tilde{B}(x,t,v_x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)|v_{x_i}| + \mathcal{F}(x,t),\\
\tilde{g} = \mathcal{M}^{-2}g_0,\ \tilde{e} = \mathcal{M}^{-1}e_0,\ \mathcal{F} = \mathcal{M}^{-1}f_0\\
\tilde{A}(x,t,v_x) = \mathcal{M}^{-1}(\pm\hat{A}(x,t,\pm\mathcal{M}v_x)),\ \tilde{B}(x,t,v_x) = \mathcal{M}^{-1}(\pm\hat{B}(x,t,\pm\mathcal{M}v_x)),
\end{gathered} \qquad /2/$$

де функції $g_0, e_0, f_0, \hat{A}, \hat{B}$ із праці [1].

Узагальнений розв"язок розуміють у сенсі інтегральної тотожності

$$\iint\limits_{Q(\tau)}(\varphi v_t + \tilde{A}\varphi_x - \tilde{B}\varphi)\,dx\,dt = 0 \qquad /3/$$

/означення узагальненого розв"язку у праці [2] /.

<u>Теорема 1.</u> Нехай функція $v(x,t)$, що не менша одиниці на множині, міра якої не менша $\frac{1}{2}\operatorname{mes} Q(\tau)$, є узагальненим розв"язком рівняння /1/ за умов /2/ в циліндрі $Q(\tau)$, де $0<\tau^{\gamma}<\mathcal{M}$, $\tau^{\gamma}< C$, причому C – достатньо мале /означення констант γ і

$\mathcal{M}$ див. у [1] /. Тоді в деякому циліндрі $Q(\delta r)$, $\delta\in(0,1)$ функція $v(x,t)>\varepsilon>0,\ \varepsilon=\varepsilon(n,a_1,a_2,M_0,M_1,M_2)\in(0,1)$

Спочатку доведемо лему. <u>Лема 1.</u> Нехай числа $\beta\in(\frac{1}{2},1)$ і $\omega\in(0,\frac{1}{2})$ пов"язані співвідношенням $\frac{1}{2(1-\omega)\beta^n}=\frac{2}{3}$. Тоді існує число $h=h(n,a_1,a_2,M_0,M_1)$, таке, що коли позначити множину $\{x\in K(\beta r):\ v(x,t)\geq h\}=N_t$, то для майже всіх $t\in(-\omega r^2,0)$

$$mes\, N_t\geq\frac{1}{4}\, mes\, K(\beta r). \tag{4}$$

<u>Доведення</u>. Позначимо $\mu(t)=mes\{x\in K(r):\ v(x,t)\geq 1\}$. Повторивши міркування праці [3], одержимо, що існує таке число $\tau\in(-r^2,-\omega r^2)$, при якому $v(x,\tau)$ визначена майже всюди в $K(r)$ і

$$\mu(\tau)\geq\left(\frac{1}{2}-\omega\right)\frac{mes\,K(r)}{1-\omega}. \tag{5}$$

Підставимо у /3/ функцію $\varphi(x,t)=\eta^2F'(v)\chi(t;\tau,\sigma)$, де $\chi(t;\tau,\sigma)$ – характеристична функція інтервалу (τ,σ), $\sigma\in(-\omega r^2,0)$, $\eta=\prod_{i=1}^{n}\eta_{\beta r,(1-\beta)r}(|x_i|)$ / див. [3] /. $w=F(v)=Z(v+h)$, а функція $Z(v)$ із леми [4, с. 57]. Тоді одержуємо

$$\int_{K(r)}\eta^2F(v)dx\Big|_{\tau}^{\sigma}+\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(r)}(\eta^2F''(v)\tilde{A}v_x+2\eta F'(v)\eta_x\hat{A}-\eta^2F'(v)\tilde{B})\,dx\,dt=0.$$

Враховуючи властивості функції $F(v)$, умови /2/ і нерівності Юнга та Гельдера, дістаємо, що для майже всіх $\sigma\in(-\omega r^2,0)$ має місце нерівність

$$\int_{K(r)}\eta^2w(\sigma,x)dx+\frac{a_1}{2}\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(r)}\eta^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|w_{x_i}|^2dx\,dt\leq C\Bigg(\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(r)}|\eta_x|^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}dx\,dt+$$

$$+\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(r)}\eta^2\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}dx\,dt+\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(r)}\eta^2\frac{g_0(x,t)}{\mathcal{M}^2h^2}dx\,dt+\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(r)}\eta^2\frac{1}{\mathcal{M}^2h^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{e_0^2(x,t)}{\mu_i(x,t)}dx\,dt+$$

$$+\int_{\tau}^{\sigma}\int_{K(r)}\eta^2\frac{f_0(x,t)}{\mathcal{M}h}dx\,dt+\int_{K(r)}\eta^2w(x,\tau)dx\leq Cr^n\Bigg(r^{-2}\int_{Q(r)}\Bigg(\int\Bigg(r^{-n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\Bigg)^p dx\Bigg)^{\frac{q}{p}}dt\Bigg)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\tau^{4\gamma}\left(\int\limits_{Q(\tau)}\left(\int\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\right)^{p}dx\right)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{\tau^{\frac{\gamma}{2}}}{h}\cdot\frac{\tau^{\gamma}}{\mu}\,\tau^{\frac{5}{2}\gamma}\left(\int\limits_{Q(\tau)}\left(\int f_0^{p}(x,t)\,dx\right)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}+$$

$$+\left(\frac{\tau^{\frac{\gamma}{2}}}{h}\cdot\frac{\tau^{\gamma}}{\mu}\right)^{2}\tau^{\gamma}\left(\int\limits_{Q(\tau)}\left(\int\left(g_0(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{l_0^2(x,t)}{\mu_i(x,t)}\right)^{p}dx\right)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}+\int\limits_{K(\tau)}w(x,\tau)\,dx. \qquad /6/$$

Звідси при достатньо малому τ /зауважимо, що вибір h робимо незалежно від τ / випливає

$$\int\limits_{K(\tau)}\eta^2 w(\sigma,x)\,dx\le C\operatorname{mes}K(\beta\tau)+\int\limits_{K(\tau)}w(x,\tau)\,dx. \qquad /7/$$

З цієї нерівності, як і в працях [3, 4], одержимо

$$\operatorname{mes}(K(\beta\tau)\setminus N_\sigma)\le\left(\frac{C}{Z(2h)}+\frac{2}{3}\frac{Z(h)}{Z(2h)}\right)\operatorname{mes}K(\beta\tau).$$

Враховуючи властивості функції $Z(h)$, оберемо h настільки малим, щоб

$$\operatorname{mes}(K(\beta\tau)\setminus N_\sigma)\le\frac{3}{4}\operatorname{mes}K(\beta\tau).$$

Зауважимо, що вибір h зроблено незалежно від τ. З останньої нерівності випливає оцінка /4/. Лема I доведена.

Доведемо тепер теорему I. Підставимо в інтегральну тотожність /3/ функцію $\varphi(x,t)=\eta^2\Psi(v)\chi(t;\tau,\sigma)$, де $z=\Psi(v)=Z\left(\frac{v+\varepsilon}{h}\right)$, $\varepsilon>0$ оберемо далі. Тоді так само, як і для функції $w(x,t)=F(v)=Z(v+h)$, виведемо нерівність

$$\int\limits_{K(\tau)}\eta^2 z(x,\sigma)\,dx+\int\limits_{\tau}^{\sigma}\int\limits_{K(\tau)}\eta^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|z_{x_i}|^2\,dx\,dt\le C\tau^{n}\left(\left(\tau^{-2}\int\limits_{Q(\tau)}\left(\tau^{-n}\int\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2}{\lambda_i}\right)^{p}dx\right)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}+\right.$$

$$\left.+\tau^{4\gamma}\left(\int\limits_{Q(\tau)}\left(\int\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\right)^{p}dx\right)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{\tau^{\frac{\gamma}{2}}}{\varepsilon}\,\frac{\tau^{\gamma}}{\mu}\,\tau^{\frac{5}{2}\gamma}\left(\int\limits_{Q(\tau)}\left(\int f_0^{p}(x,t)\,dx\right)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}+\right.$$

$$+\left(\frac{\tau^{\frac{\delta}{2}}}{\varepsilon}\frac{\tau^{\gamma}}{\mathcal{M}}\right)^{2}\tau^{\gamma}\left(\int_{Q(\tau)}\left(\int\left(g_0(x,t)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\ell_0^{(2)}(x,t)}{\mu_i(x,t)}\right)^{p}dx\right)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}+Z\left(\frac{\varepsilon}{h}\right).$$

Спрямуємо σ до нуля. При достатньо малому τ /зауважимо, що ε вибираємо незалежно від τ/ одержуємо

$$\int_{-\omega\tau^2}^{0}\int_{K(\beta\tau)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|Z_{x_i}|^2dxdt\le C\left(1+Z\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right)\tau^{n}. \qquad /8/$$

Приймаємо $\delta=\frac{1}{2}\min\ (\beta,\sqrt{\omega})$. . За теоремою 2.I праці [2] і лемою 2 праці [I] записуємо

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q(\delta\tau)} z^2\le C(\|z\|^2_{2kp',2kq',Q(2\delta\tau)}+1)\le C\Big(\varepsilon_0\|z\|^2_{2,\infty,Q(2\delta\tau)}+$$
$$+C\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)\Big(\tau^2\rho^{\frac{1}{2}}(\delta\tau)\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{\frac{1}{2}}z_{x_i}\|^2_{2,2\,Q(2\delta\tau)-(2\delta\tau)^2N_t}+\Big(\tau^{-2}\int^{0}\Big(\tau^{-n}\int z^2dx\Big)dt\Big)+1\Big). \qquad /9/$$

Об"єднаємо оцінки /8/, /9/, врахувавши, що $z = 0$ для майже всіх $t\in(-\omega\tau^2,0)$ на множині N_t . Тоді дістаємо

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q(\delta\tau)} z^2\le\varepsilon_1 Z^2\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)+C\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(1+Z\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right),\quad \varepsilon_1=C\cdot\varepsilon_0 .$$

Вибираємо $\varepsilon_1=\frac{1}{2}\,\dfrac{Z^2\left(\frac{2\varepsilon}{h}\right)}{Z^2\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)}$. Тоді

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q(\delta\tau)} z^2\le\frac{1}{2}Z^2\left(\frac{2\varepsilon}{h}\right)+C\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(1+Z\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right). \qquad /I0/$$

Візьмемо тепер $\varepsilon>0$ настільки малим, щоб

$$Z^2\left(\frac{2\varepsilon}{h}\right)>\frac{1}{2}Z^2\left(\frac{2\varepsilon}{h}\right)+C\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(1+Z\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right). \qquad /II/$$

Це можна зробити, враховуючи, що $Z(v)\sim-\ln v$ при $v\to+0$. Зауважимо, що вибір ε зроблено незалежно від τ . Покажемо, що $v\geqslant\varepsilon$ в $Q(\delta\tau)$. Справді, бо в протилежному разі, зважаючи на монотонність функції $Z(v)$ й оцінки /I0/,

$$Z^2\left(\frac{2\varepsilon}{h}\right)\le Z^2\left(\frac{v+\varepsilon}{h}\right)=z^2(x,t)\le\frac{1}{2}Z^2\left(\frac{2\varepsilon}{h}\right)+C\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(1+Z\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right),$$

що суперечить /II/. Теорема I доведена.

Список літератури: I. К о л о д і й І.М. Нерівність за Гельдером узагальнених розв"язків параболічних рівнянь дівергентного виду з виродженням.-У цьому ж Віснику. 2. К р у ж к о в С.Н., К о л о д и й И.М. Априорные оценки и неравенство Харнака для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений. - Сибирский математический журнал, 1977, т.18, № 3. 3. К р у ж к о в С.Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. - Математический сборник, 1964, т.65 /107/, № 4. 4. К р у ж к о в С.Н. Нелинейные уравнения с частными производными. Ч. I. М., 1969.

Стаття надійшла в редколегію 30.12.80

УДК 517.512.2

Б.В.Ковальчук

ПРО АБСОЛЮТНУ ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ ФУР"Є S^p - МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

Нехай $F(x) = [f_{jk}(x)] (-\infty < x < \infty) \in S^p$ - майже періодична /м.п./ матриця $(p > 1)$ з рядом Фур"є

$$F(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}, \qquad /1/$$

де $\{\lambda_n\}$ - спектр матриці $F(x)$; $A_n = A_{\lambda_n} = M\{F(x) e^{-i\lambda_n x}\}$ - її матричні коефіцієнти Фур"є [4].

Е.А.Бредихіна [1] знайшла достатні умови абсолютної збіжності рядів Фур"є м.п. функцій у термінах найліпших наближень.

Ми вивчаємо аналогічні питання для класу S^2 - м.п. матриць. При цьому для доведення достатніх умов абсолютної збіжності рядів Фур"є S^2 - м.п. матриць опираємось на результати праці [1].

Відомо [2], що для $F(x) \in S^2$ виконується рівність Парсеваля

$$\| F \|^2 = \sum_n \| A_{\lambda_n} \|^2. \qquad /2/$$

Позначимо $P_\lambda^{(2)} \in S^2$ і $Q_\lambda^{(2)} \in S^2$ - класи матриць, спектри яких належать відповідно інтервалу $]-\lambda, \lambda$ [і множині $]-\infty,-\lambda[\cup]\lambda,+\infty[$ $(\lambda > 0)$.

Прийнявши
$$E_\lambda^{(2)}(F) = \inf_{\psi(x)\in P_\lambda^{(2)}} \{\|F-\psi\|_{S^2}\}$$
і
$$\mathcal{E}_\lambda^{(2)}(F) = \inf_{\psi(x)\in Q_\lambda^{(2)}} \{\|F-\psi\|_{S^2}\} ,$$
на основі рівності Парсеваля /2/ знаходимо
$$E_\lambda^{(2)}(F) = \left\{\sum_{|\lambda_n|>\lambda} \|A_{\lambda_n}\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad /3/$$
і
$$\mathcal{E}_\lambda^{(2)}(F) = \left\{\sum_{|\lambda_n|\leq\lambda} \|A_{\lambda_n}\|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad /3'/$$
Тепер на основі результатів, одержаних у [3] , і рівності Парсеваля /2/ можна показати, що
$$\lim_{\lambda\to\infty} E_\lambda^{(2)}(F) = 0 \qquad /4/$$
і
$$\lim_{\lambda\to 0} \mathcal{E}_\lambda^{(2)}(F) = 0 . \qquad /4'/$$
Введемо
$$\omega^{(2)}(\delta, F) = \sup_{|t|\leq\delta} \|F(x+t)-F(x)\|_{S^2}$$
і приймемо $\tilde{\omega}^{(2)}(\delta, F) = \delta \left\|\int_0^\infty e^{-\delta t} F(x-t)\,dt\right\|_{S^2}$.

Позначимо через $\mathcal{L}(F) = \{\Lambda_n\}$ монотонну послідовність абсолютних величин показників Фур"є матриці $F(x)$.

Якщо показники Фур"є матриці $F(x)$ мають єдину граничну точку $\Lambda^* = \infty$ або $\Lambda^* = 0$, то ряд Фур"є такої матриці запишеться у симетричній формі
$$F(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x}. \qquad /I'/$$

Теорема I. Ряд Фур"є /I/ матриці $F(x) \in S^2$, спектр якої має єдину граничну точку $\Lambda^* = \infty$ або $\Lambda^* = 0$, збігається абсолют-

но, якщо
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E^{(2)}_{\Lambda_n}(F)}{\sqrt{n}} < \infty, \quad (\Lambda^* = \infty)$$
або
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{E}^{(2)}_{\Lambda_n}(F)}{\sqrt{n}} < \infty, \quad (\Lambda^* = 0).$$

Зауваження I. У випадку $\Lambda^* = \infty$ для матриці $F(x) \in S^2$ умову абсолютної збіжності її ряду Фур"є /I/ можна записати ще як
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{(2)}(\frac{1}{\Lambda_n}, F)}{\sqrt{n}} < \infty .$$

Нехай матриця $F(x)$ має скінченну множину скінченних граничних точок Λ^*_j $(j = 1,2,\ldots,m; m \geq 1)$. Зафіксуємо $\eta > 0$ так, щоб інтервали
$$\mathcal{I}_j =]\Lambda^*_j - 2\eta, \Lambda^*_j + 2\eta[\quad (j = 1,2,\ldots,m;\ m \geq 2)$$
не перетинались.

У випадку необмеженого спектра матриці $F(x)$ оберемо $B > 0$ таке, що $\mathcal{I}_j \in [-B, B]$ $(j = 1,2,\ldots m)$. Перенумеруємо тепер у порядку спадання точки множини $\{|\lambda_n - \Lambda^*_j|\}$ $(0 < |\lambda_n - \Lambda^*_j| < \eta;\ j = 1,2,\ldots,m)$ і одержану монотонно спадну послідовність позначимо через
$$\mathcal{L}_j(F) = \{\Lambda^{(j)}_n\} \quad (n = 1,2,3,\ldots;\ j = 1,2,\ldots,m)$$
Якщо спектр матриці $F(x)$ необмежений, то, перенумерувавши у порядку зростання точки множини $\{|\lambda_n|\}$, одержимо послідовність
$$\mathcal{L}_B(F) = \{\Lambda^{(B)}_n\} \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Теорема 2. Ряд Фур"є /I/ матриці $F(x) \in S^2$, спектр якої має скінченну множину скінченних граничних точок Λ^*_j $(j = 1,2,\ldots,m; m \geq 1)$, збігається абсолютно, якщо
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E^{(2)}_{\Lambda^{(B)}_n}(F)}{\sqrt{n}} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{E}^{(2)}_{\Lambda^{(j)}_n}(F_j)}{\sqrt{n}} < \infty \quad (j = 1,2,\ldots,m),$$
де
$$F_j(x) = F(x)\{e^{-i\Lambda^*_j x}\} \quad (j = 1,2,\ldots,m).$$

Зауваження 2. У випадку, коли спектр матриці $F(x) \in S^2$ обмежений і має скінченну множину граничних точок $\Lambda_j^* \ (j=1,2,\dots,m)$, умову абсолютної збіжності її ряду Фур"є /I/ можна записати ще як

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\omega}^{(2)}(\Lambda_n^{(j)}, F_j)}{\sqrt{n}} < \infty \quad (j=1,2,\dots,m).$$

Список літератури: I. Бредихина Е.А. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций. – ДАН СССР, 1967, 179, № 5. 2. Ковальчук Б.В., Лісевич Л.М. Теореми єдиності й апроксимації для S^p – майже періодичних матриць. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип. II, 1976. 3. Ковальчук Б.В., Середа Я.М. Повнота простору S^p – майже періодичних матриць. – Вісн. Львів.ун-ту, сер. мех.-мат., вип. I4, 1979. 4. Лісевич Л.М., Ковальчук Б.В. Середнє значення і поняття ряду Фур"є для S^p – майже періодичних матриць. – Вісн. Львів. ун-ту, сер.мех.-мат., вип. I0, 1975.

Стаття надійшла в редколегію I3.03.8I

УДК 5I9.2I

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ДОДАТНІ СТІЙКІ РОЗПОДІЛИ

Ми поставили собі за мету записати явний вираз густини розподілу ймовірностей для додатних стійких випадкових змінних. Досягаємо цього за допомогою співвідношення між відбиттям і зображенням додатної випадкової змінної та зворотної формули для відбиття.

Позначимо через $L(S)$ зображення додатної випадкової змінної ξ з функцією розподілу ймовірностей $F(t)$

$$L(S) = \int_0^\infty e^{-St} dF(t), \quad Re S \geq 0, \qquad /I/$$

а через $M(z)$, якщо існує її відбиття,

$$M(z) = \int_0^\infty t^{z-1} dF(t), \quad 1-A < Re z < 1+B, \ (A>0, B>0). \qquad /2/$$

Оскільки у випадку відбиття /2/ існує спільна смуга аналітичності зображення /I/ і відбиття /2/, то в цій спільній смузі аналітичності відбиття /2/ виражається за допомогою зображення /I/ співвідношенням

$$M(z)=\frac{-1}{\Gamma(2-z)}\int_0^\infty t^{1-z} L'(t)\,dt, \qquad /3/$$

$$\max(0,1-A)<\operatorname{Re} z<1+B.$$

Відомо [4], що зображення класу додатних стійких випадкових змінних дорівнює $e^{-2s^{\alpha}}$, $0<\alpha<1$. За формулою /3/ відбиття класу додатних стійких випадкових змінних

$$M(z)=\frac{2\alpha}{\Gamma(2-z)}\int_0^\infty t^{\alpha-z} e^{-2t^{\alpha}}dt=2^{\frac{z-1}{\alpha}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-z}{\alpha}+1\right)}{\Gamma(2-z)}, \qquad /4/$$

$$\operatorname{Re} z<1+\alpha.$$

Звідси, за оберненою формулою для відбиття [2] відповідна густина

$$p(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^{\frac{z-1}{\alpha}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-z}{\alpha}+1\right)}{\Gamma(2-z)}t^{-z}dz,\ c<1+\alpha.$$

Застосовуючи теорію лишок, одержуємо

$$p(t)=-\sum_{\ell=0}^{\infty}\operatorname*{res}_{1+(1+\ell)\alpha}\left\{2^{\frac{z-1}{\alpha}}\frac{\Gamma\left(\frac{1-z}{\alpha}+1\right)}{\Gamma(2-z)}t^{-z}\right\}$$

і [3]

$$\operatorname*{res}_{1+(1+\ell)\alpha}\Gamma\left(\frac{1-z}{\alpha}+1\right)=\frac{(-1)^{\ell}}{\ell!}\alpha,\ (\ell=0,1,2,\dots).$$

Отже, густина розподілу ймовірностей для додатних стійких випадкових змінних набуває вигляду

$$p(t)=-\frac{2\alpha}{t^{1+\alpha}}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-2)^{\ell}t^{-\ell\alpha}}{\ell!\,\Gamma[1-(1+\ell)\alpha]},\ t>0,\ 0<\alpha<1$$

або ж

$$p(t)=\frac{2\alpha}{\pi t^{1+\alpha}}\sum_{\ell=0}^{\infty}(-2)^{\ell}\{\sin\pi[(1+\ell)\alpha]\}\frac{\Gamma[(1+\ell)]}{\ell!}t^{-\ell\alpha}, \qquad /5/$$

$$t>0,\ 0<\alpha<1.$$

Зокрема, при $\alpha = \frac{1}{2}$ маємо

$$p(t) = \frac{1}{\pi} t^{-\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k} (-1)^k \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k)}{(2k)!} t^{-k} =$$

$$= \frac{t^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{t}\right)^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{t}} t^{-\frac{3}{2}}, \quad t>0$$

густину, приналежну до п"ятого типу сім"ї Пірсона [I, 4]. Якщо додатну стійку випадкову змінну з показником $\alpha = \frac{1}{2}$ помножити на імпульс у точці $a,\ a>0$, то густина нової випадкової змінної набуде вигляду

$$p(t) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-\frac{a}{t}} t^{-\frac{3}{2}}, \quad t>0,\ a>0, \qquad /6/$$

а відбиття

$$M(z) = a^{z-1} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}-z)}{\sqrt{\pi}}, \quad Re\, z < \frac{3}{2},\ a>0.$$

Густина /6/ при $a = \frac{1}{2}$ розглядається у праці [I], а при $a = \frac{c^2}{2}$ – в [4].

Список літератури. I. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.- М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 2. Квіт І.Д. Зворотна формула для відбиття. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., вип.I3, 1978. 3. Титчмарш Е. Теория функций.- М.:, Л.: Гостехиздат, 1951. 4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. - М.: Мир, 1967.

Стаття надійшла в редколегію I0.02.8I

УДК 512.513

О.Д.Артемович, О.Л.Горбачук

РОЗШИРЕННЯ ЛІУВІЛЛЯ ПОЛЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $\mathcal{M}$ – довільне диференціальне поле, а $\mathcal{K}$ – його диференціальне підполе. Диференціальну групу Галуа поля $\mathcal{M}$ відносно поля $\mathcal{K}$ позначимо через $DG(\mathcal{M},\mathcal{K})$

Означення та факти, зв"язані з диференціальними групами й полями, можна знайти у працях [1, 2].

Означення 1. Поле $\mathcal{K}(u)$ називають розширенням поля $\mathcal{K}$, яке одержують внаслідок приєднання інтеграла від елемента, коли

$$u = \int a\,dx,\ a \in \mathcal{K},\ u \notin \mathcal{K}.$$

Означення 2. Поле $\mathcal{K}(v)$ називають розширенням поля $\mathcal{K}$, що дістають внаслідок приєднання експоненти інтеграла, коли

$$v = e^{\int a\,dx},\ a \in \mathcal{K},\ v \notin \mathcal{K}.$$

Означення 3. Поле $\mathcal{M}$ називають розширенням Ліувілля поля $\mathcal{K}$, якщо існує такий ланцюг проміжних диференціальних полів $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{K}_n = \mathcal{M}$, коли для кожного i поле $\mathcal{K}_{i+1}$ є розширенням поля $\mathcal{K}_i$ за допомогою інтеграла або експоненти інтеграла.

Теорема. Диференціальне поле розкладу лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + y = 0$ над полем $R(x)$ дійсних раціональних функцій не буде розширенням Ліувілля.

Доведення. $\bar{\mathcal{M}} = R(x, \cos x, \sin x)$ – диференціальне поле розкладу даного рівняння. Знайдемо групу Галуа $DG(\bar{\mathcal{M}}, \mathbb{R}(x))$.

Нехай $f \in DG(\bar{\mathcal{M}}, \mathbb{R}(x)),\ f(\cos x) = \alpha,\ f(\sin x) = \beta$.

Тоді $-\beta = f(-\sin x) = (f(\cos x))' = \alpha'$,

$$\alpha = f(\cos x) = (f(\sin x))' = \beta',$$

тобто

$$\begin{cases} \alpha' + \beta = 0, \\ \beta' - \alpha = 0. \end{cases}$$

Звідси отримуємо, що

$$f:\ \cos x \longmapsto c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$
$$f:\ \sin x \longmapsto -c_2 \cos x + c_1 \sin x.$$

Диференціальна група Галуа рівняння $y'' + y = 0$ над $\mathbb{R}(x)$ є алгебраїчною матричною групою над полем констант поля $\mathbb{R}(x)$, тобто

$$DG(\bar{\mathcal{M}}, \mathbb{R}(x)) = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} c_1, c_2 \text{ – елементи} \\ \text{поля констант} \\ \text{поля } \mathbb{R}(x) \\ \text{/дійсні числа/} \end{array} \right\}$$

Матриці цієї групи Галуа $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{pmatrix}$ не зводяться до трикутного виду на- полем R дійсних чисел, оскільки корені характеристичного многочлена комплексні /клас матриць незвідний/. Тим більше їх не можна звести скінченним числом перетворень до спеціального трикутного та діагонального видів, тому розширення не є розширенням Ліувілля [I, с. 29].

Отже, розв"язки рівняння $y'' + y = 0$, а саме $\cos x$, $\sin x$, не можуть бути ні інтегралами, ні експонентами інтегралів над полем $R(x)$.

Зауважимо, що над полем комплексних чисел це не характерне.

Наслідок. Цілі функції $\cos x$, $\sin x$ не можна виразити за допомогою скінченної комбінації арифметичних операцій, інтегралів і експонент інтегралів від дійсних раціональних функцій.

Список літератури: I. К а п л а н с к и й И. Введение в дифференциальную алгебру. - М.: ИЛ 1959. 2. Kolchin E.R. Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear ordinary differential equations.- Ann. of Math., 1948, №49.

Стаття надійшла в редколегію 04.II.80

УДК 512.553

О.Л.Горбачук, Р.Б.Попович

РАДИКАЛИ, НАПІВПРОСТИЙ КЛАС ЯКИХ ЗАМКНЕНИЙ ВІДНОСНО ФАКТОР-МОДУЛІВ

Дослідимо радикали з напівпростим класом, замкненим відносно фактор-модулів. Опишемо точні справа ідемпотентні радикали. Як наслідок отримаємо відмінні від відомих характеризації кручень з напівпростим класом, замкненим відносно фактор-модулів. Розв"яжемо задачу про розщеплюваність точних справа радикалів. Опишемо кільця, над якими всі ідемпотентні радикали точні справа.

Кожне кільце, яке розглядатимемо, припускаємо асоціативним і з одиницею, а кожен модуль-правим і унітарним. Категорію правих модулів над кільцем R позначаємо $Mod\text{-}R$.

Нагадаємо [5], що в $Mod\text{-}R$ вважається заданим радикал, якщо виконуються наступні умови:

1. Кожному $M \in Mod\text{-}R$ ставлять у відповідність його підмодуль $\tau(M)$.

2. Для будь-якого гомоморфізму R - модулів $M \xrightarrow{f} N$ $f(\tau(M)) \subseteq \tau(N)$.

3. $\tau(M/\tau(M))=0$ для всіх модулів M. Якщо, крім того, виконується умова

4. $\tau(\tau(M))=\tau(M)$ для всіх модулів M, то радикал τ називають ідемпотентним. Кожен радикал τ однозначно задається напівпростим класом $F_\tau=\{M/\tau(M)=0\}$. Будь-який ідемпотентний радикал τ однозначно задається також радикальним класом $T_\tau = \{M/\tau(M)=M\}$. Ідемпотентний радикал τ з T_τ, замкненим відносно підмодулів називають крученням.

Твердження [5]. Для підфунктора τ тотожного функтора еквівалентні наступні умови:

а/ τ точний справа;

в/ $\tau(M)=M\cdot\tau(R)$ для кожного $M \in Mod\text{-}R$;

с/ τ радикал і F_τ, замкнений відносно фактор-модулів.

Нехай J довільний двосторонній ідеал кільця R. Позначимо через τ_J підфунктор, який кожному модулю M ставить у відповідність його підмодуль $\tau_J(M)=MJ$. Легко перевірити, що τ_J є точним справа радикалом. З твердження отримуємо наслідок.

Наслідок 1. Радикал τ точний справа тоді і тільки тоді, коли $\tau=\tau_J$ для деякого двостороннього ідеала J.

Лема 1. Радикал τ_J ідемпотентний тоді і тільки тоді, коли J ідемпотентний ідеал.

Доведення. Якщо τ_J ідемпотентний, то для всіх модулів M виконується умова $\tau_J(\tau_J(M))=\tau_J(M)$. Застосовуючи її до модуля R, маємо $J^2=(RJ)J=RJ=J$. Навпаки, коли J ідемпотентний ідеал, то $\tau_J(\tau_J(M))=(MJ)\cdot J=MJ^2=MJ=\tau_J(M)$.

Використовуючи наслідок I та лему I, одержуємо такий наслідок.

<u>Наслідок 2.</u> Ідемпотентний радикал τ точний справа тоді і тільки тоді, коли $\tau=\tau_J$ для двостороннього ідемпотентного ідеала J . J - радикалом, де J довільний двосторонній ідеал, називаємо ідемпотентний радикал з радикальним класом $T_J=\{M|MJ=M\}$ [I, 2].

<u>Лема 2.</u> Якщо J двосторонній ідемпотентний ідеал, то J - радикал є крученням в тому і тільки тому випадку, коли J задовольняє умову: a_1/ для довільних $i_1,\dots,i_k\in J$ $\bigcap_{l=1}^{k}(0:i_l)+J=R$.

<u>Доведення</u>. Д о с т а т н і с т ь . Нехай $M\in T_J$ та N - довільні підмодулі у M . Для довільного елемента $n\in N$ $n=\sum_{l=1}^{k}m_l i_l$, де $m_l\in M$, $i_l\in J$ для всіх $l=\overline{1,k}$. За умовою $1=\tau+j$, де $\tau\in\bigcap_{l=1}^{k}(0:i_l)$, $j\in J$. Тоді $n=n\cdot 1=n\cdot\tau+n\cdot j=n\cdot j$. Отже, $N=NJ$ та $N\in T_J$.

Н е о б х і д н і с т ь . Якщо J - радикал є крученням, то його радикальний фільтр E_J складається з тих ідеалів T , для яких $T+J=R$. Оскільки $J\cdot J=J$, то $J\in T_J$, отже, для довільних $i_1,\dots,i_k\in J$ $\bigcap_{l=1}^{k}(0:i_l)\in E_J$, тобто $\bigcap_{l=1}^{k}(0:i_l)+J=R$

<u>Зауваження</u>. У праці [2] отримані умови, за яких J - радикал є крученням для довільного двостороннього ідеала J . Лема 2 дає спрощену умову, при якій J - радикал є крученням для випадку, коли ідеал J ідемпотентний.

Враховуючи, що радикальний клас джансового кручення, радикальний фільтр якого має найменший ідеал J , є півпростим класом J-радикала, та лему 2, маємо наступний наслідок.

<u>Наслідок 3 [4].</u> Джансове кручення, найменший ідеал в радикальному фільтрі якого дорівнює J , стабільне тоді і тільки тоді, коли ідеал J задовольняє умову a_1 .

Наслідок 2 та лема 2 дають такі результати.

<u>Наслідок 4.</u> Кручення τ точне справа тоді і тільки тоді, коли $\tau = \tau_J$ для двостороннього ідемпотентного ідеала J з умовою a_1

<u>Наслідок 5.</u> Джансове кручення τ точне справа тоді і тільки тоді, коли $\tau = \tau_J$ для двостороннього ідеала J, який задовольняє умову a_2/ для довільної сім"ї $\{i_\alpha\}_{\alpha \in A}$ елементів із $J \bigcap\limits_{\alpha \in A} (0 : i_\alpha) + J = R$.

<u>Доведення</u>. Д о с т а т н і с т ь. За наслідком 4 $\tau = \tau_J$ є точним справа крученням. Покажемо, що воно джансове. Нехай $\{M_\beta\}_{\beta \in B}$ – довільна сім"я модулів з класу T_J. Розглянемо модуль $M = \prod\limits_{\beta \in B} M_\beta$. Нехай $(m_\beta)_{\beta \in B}$ довільний елемент з M. Для кожного $\beta \in B$ маємо $m_\beta = \sum\limits_{\alpha \in A_\beta} m_\alpha^{(\beta)} i_\alpha^{(\beta)}$, де $m_\alpha^{(\beta)} \in M_\beta$, $i_\alpha^{(\beta)} \in J$ для всіх $\alpha \in A_\beta$. Приймемо $A = \bigcup\limits_{\beta \in B} A_\beta$. За умовою $1 = \tau + j$, де $\tau \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} (0 : i_\alpha)$, $j \in J$. Тоді $(m_\beta)_{\beta \in B} = (m_\beta)_{\beta \in B} (\tau + j) = (m_\beta)_{\beta \in B}\, j$. Отже, $MJ = M$, клас T_J замкнений відносно прямих добутків і τ_J – джансове кручення [5].

Н е о б х і д н і с т ь. За наслідком 2 кручення τ задається ідемпотентним ідеалом J. Радикальний фільтр E_J кручення τ складається з тих ідеалів T, для яких $T + J = R$. Оскільки τ – джансове кручення, то E_J замкнений відносно довільних перетинів. Тоді для довільної сім"ї $\{i_\alpha\}_{\alpha \in A}$ елементів з $J \bigcap\limits_{\alpha \in A} (0 : i_\alpha) \in E_J$ і, отже, $\bigcap\limits_{\alpha \in A} (0 : i_\alpha) + J = R$.

<u>Зауваження.</u> Наслідки 4 і 5 дають характеризації точних справа кручень і джансових кручень, відмінні від наведених у праці [4].

<u>Теорема I.</u> Точний справа радикал τ розщеплюється тоді і тільки тоді, коли τ ідемпотентний з радикальним класом, замкненим відносно суттєвих розширень.

<u>Доведення.</u> Н е о б х і д н і с т ь. Якщо радикал τ розщеплюється, то $M = \tau(M) \oplus N$ для кожного модуля M. Застосовуючи до обох частин τ, отримуємо $\tau(M) = \tau(\tau(M)) \oplus \tau(N) = \tau(\tau(M))$. Отже, τ – ідемпотентний. Замкненість T_τ відносно суттєвих розширень очевидна.

Достатність. Нехай M – довільний модуль і $\tau(M)$ – його радикал. Існує такий підмодуль N модуля M, що $\tau(M) \cap N = 0$ та $\tau(M) \oplus N$ суттєві у M [5]. Тоді $[\tau(M) \oplus N]/N$ суттєвий у M/N. Оскільки $[\tau(M) \oplus N]/N \cong \tau(M) \in T_\tau$ і T_τ замкнений відносно суттєвих розширень, то $M/N \in T_\tau$. Таким чином, $M/[\tau(M) \oplus N] \in T_\tau \cap F_\tau = 0$ і, отже, $M = \tau(M) \oplus N$.

Теорема 2. Над кільцем R всі ідемпотентні радикали точні справа тоді і тільки тоді, коли R є скінченною прямою сумою повних матричних кілець над локальними досконалими зліва та справа кільцями.

Доведення. Необхідність. Кільце R є скінченною прямою сумою повних матричних кілець над локальними досконалими зліва [6]. Розглянемо над кільцем R_i $(i = \overline{1,n})$ ідемпотентний радикал, породжений простими R_i – модулями. За наслідком 2, він повинен задаватися ідемпотентним двостороннім ідеалом J. Тому що, $R_i/J(R_i)$ просте, то $J \subseteq J(R_i)$. Візьмемо довільний $a \in J$. З $J = J^2$ отримуємо $a = a_1 a_1'$, де $a_1, a_1' \in J$. У свою чергу a_1' розкладається: $a_1' = a_2 a_2'$, тобто $a = a_1 a_2 a_2'$ і т.д. Оскільки $J(R_i)T$ – нільпотентний зліва, то $a = 0$. Тоді розглянутий ідемпотентний радикал тривіальний, і кожний R_i – модуль має максимальний підмодуль. Отже, $J(R_i)$ T – нільпотентний справа [3].

Достатність. Вона випливає з того, що над матричним над локальним досконалим зліва і справа кільцем R_i всі ідемпотентні радикали тривіальні.

Автори висловлюють подяку М.Я.Комарницькому за обговорення роботи.

Список літератури: 1. Горбачук Е.Л. Радикалы в модулях над разными кольцами. – Математические исследования, 1972, 76, № 1. 2. Горбачук О.Л., Комарницький М.Я.

$\mathcal{J}$ - радикали та їх властивості. - УМЖ, 1978, 30, № 2. 3. Ф е й с К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. - М.: Мир, 1979. 4. Golan J. Localization of Noncommutative Rings. New York: Dekker, 1975. 5. Stenström B. Rings and Modules of Quotients.-Berlin: Springer, 1975. 6. Teply M. Homological dimension and splitting torsion theories.- Pacif. J. Math., 1970, 34.

Стаття надійшла в редколегію 23.12.80

УДК 5.4

С.В.Дениско

ПРО ДЕЯКІ СПОСОБИ ВІДТВОРЕННЯ РОЗГОРТНИХ ПОВЕРХОНЬ

На рисунку $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ - масштабні вектори правої прямокутної системи координат, $\bar{e}_1' = \bar{e}_1 \cos\alpha + \bar{e}_2 \sin\alpha$, $\bar{e}_2' = -\bar{e}_1 \sin\alpha + \bar{e}_2 \cos\alpha$, $\overline{OO'} = a^1\bar{e}_1 + a^2\bar{e}_2 + a^3\bar{e}_3$ $(a^3 \neq 0)$,

$$\overline{OA} = R_1(\bar{e}_1 \cos\varphi + \bar{e}_2 \sin\varphi),\ \overline{O'A'} = R_2(\bar{e}_1' \cos k\varphi + \bar{e}_2' \sin k\varphi),$$

причому α, a^1, a^2, a^3, R_1, R_2, k - сталі; φ - змінна.

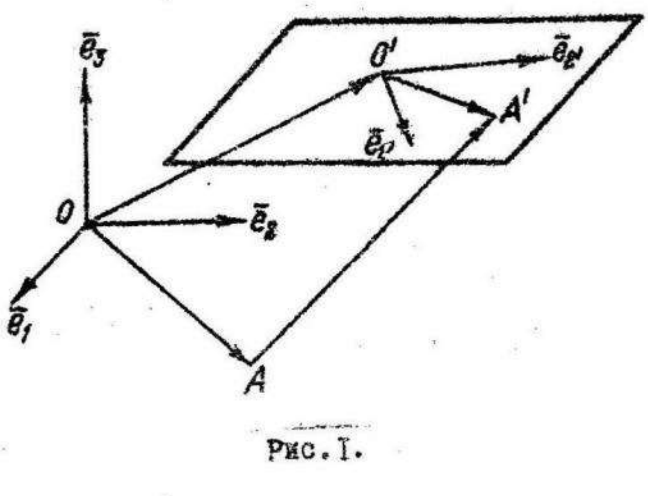

Рис.1.

Пряма (AA') описує лінійчасту поверхню, яку назвемо поверхнею S. Переміщення прямої (AA') можна здійснити за допомогою механізму.

Має місце таке твердження. Поверхня S розгортна тоді і тільки тоді, коли $K=1$, $\alpha=\pi n$, де n - будь-яке ціле число /додатне, від"ємне або нуль/. Легко збагнути, що в цьому разі поверхня S або циліндрична, або конічна.

<u>Доведення.</u> Як відомо, лінійчаста поверхня розгортна тоді і тільки тоді, коли

$$\left(\frac{d\bar{\rho}}{du}\,\bar{m}\,\frac{d\bar{m}}{du}\right)=0, \qquad /1/$$

де $\bar{\rho}=\bar{\rho}(u)$ - радіус-вектор точки напрямної; $\bar{m}=\bar{m}(u)$ - напрямний вектор твірної.

Для поверхні S

$$u=\varphi,\quad \bar{\rho}=\bar{e}_1 R_1\cos\varphi+\bar{e}_2 R_1\sin\varphi,$$
$$\bar{m}=\overline{AA'}=(a_1+R_2\cos(K\varphi+\alpha)-R_1\cos\varphi)\bar{e}_1+$$
$$+(a^2+R_2\sin(K\varphi+\alpha)-R_1\sin\varphi)\bar{e}_2+a^3\bar{e}_3.$$

Беручи це до уваги, умову /1/ для поверхні S запишемо в такому вигляді:

$$\sin[(1-K)\varphi-\alpha]=0.$$

Звідси знаходимо

$$(1-K)\varphi-\alpha=\pi n.$$

Оскільки у цій рівності φ може бути будь-яким, то маємо $K=1$, $\alpha=\pi n$, що і треба було довести.

На рис. 2 $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ - масштабні вектори правої прямокутної системи координат, $\bar{e}_{1'}=\bar{e}_1\cos\alpha+\bar{e}_2\sin\alpha$, $\bar{e}_{2'}=-\bar{e}_1\sin\alpha+\bar{e}_2\cos\alpha$, $\overline{OO'}=a^1\bar{e}_1+a^2\bar{e}_2+a^3\bar{e}_3$ $(a_3\neq 0)$, пряма (MN) паралельна вектору $\bar{e}_1$, $|OM|=a$, пряма $(M'N')$ паралельна вектору $\bar{e}_{1'}$, $|O'M'|=c'$ $\overline{OA}=\left(\frac{a}{\sin\varphi}\pm l\right)(\bar{e}_1\cos\varphi+\bar{e}_2\sin\varphi)$, $\overline{O'A'}=\left(\frac{a'}{\sin K\varphi}\pm l'\right)(\bar{e}_{1'}\cos K\varphi+\bar{e}_{2'}\sin K\varphi)$, причому $\alpha, a^1, a^2, a^3, a, a', \ell, \ell', k$ – сталі; φ – змінна $(0<\varphi\le\pi$ або $-\pi<\varphi<0)$.

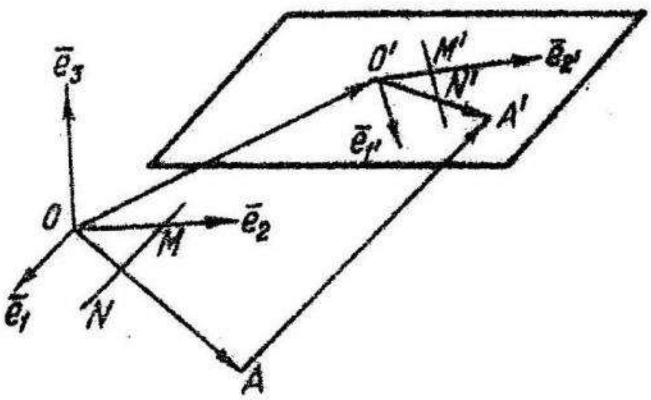

Рис.2.

Точки A, A' описують конхоїди Нікомеда, а пряма (AA') – лінійчасту поверхню, яку називаємо поверхнею T. Цей рух прямої (AA') можна реалізувати за допомогою механізму.

Доведемо таке твердження. Для того щоб поверхня T була розгортною, необхідно і достатньо, щоб точки A, A' знаходились тільки на нижніх або тільки на верхніх гілках конхоїд Нікомеда, $k=1$, $\frac{a}{a'}=\frac{\ell}{\ell'}$, $\alpha=\pi n$, де n – будь-яке ціле число /додатне, від"ємне або нуль/. Очевидно, в цьому разі поверхня T або циліндрична, або конічна.

<u>Доведення.</u> Скористаємось умовою /1/. Для поверхні T

$$u=\varphi,\quad \bar{\rho}=\left(\frac{a}{\sin\varphi}\pm\ell\right)(\bar{e}_1\cos\varphi+\bar{e}_2\sin\varphi),$$

$$\bar{m}=\overline{AA'}=\left[a^1+\left(\frac{a'}{\sin k\varphi}\pm\ell'\right)\cos(k\varphi+\alpha)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{a}{\sin\varphi}\pm\ell\right)\cos\varphi\right]\bar{e}_1+\left[a^2+\left(\frac{a'}{\sin k\varphi}\pm\ell'\right)\sin(k\varphi+\alpha)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{a}{\sin\varphi}\pm\ell\right)\sin\varphi\right]\bar{e}_2+a^3\bar{e}_3 .$$

Тому умову /I/ для поверхні T запишемо як:

$$\{-a'\ell\cos k\varphi\cos[(k-1)\varphi+\alpha]-(a'\sin k\varphi+$$
$$+\ell'\sin^2 k\varphi)\ell\sin[(k-1)\varphi+\alpha]\}\sin^2\varphi+[(a'\sin k\varphi+$$
$$+\ell'\sin^2 k\varphi)\cos(k\varphi+\alpha)-a'\cos k\varphi\sin(k\varphi+\alpha)]a=0. \qquad /2/$$

Підставивши у рівність /2/ $\varphi=0$, маємо $\sin\alpha=0$. Отже, $\alpha=\pi n$.

Розклавши у ряд ліву частину рівності /2/ по степенях φ і прирівнявши до нуля коефіцієнти при φ^2 та при φ^5, дістаємо $\frac{a}{a'}=\frac{\pm\ell}{\pm\ell'}$, $k=1$.

Таким чином, наше твердження доведене.

Стаття надійшла в редколегію 20.03.81

З М І С Т

УДК 517.53

Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик целой функции порядка $\rho<1$. Заболоцкий Н.В. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 3-7 /на укр.яз./.

Получен ряд неулучшаемых неравенств, связывающих верхние и нижние пределы отношений $T(r,f)/r^{\rho(r)}$ и $N(r,a,f)/r^{\rho(r)}$ для целых функций порядка $\rho<1$, где T и N – стандартные неванлинновские характеристики, $\rho(r)$ – уточненный порядок функции f. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.537.6

Аналоги теоремы Вимана для рядов Дирихле, задающих целые функции конечного нижнего R – порядка. Хомяк М.М. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 8-11 /на укр.яз./.

Для целой функции f конечного нижнего R – порядка, заданной рядом Дирихле с возрастающими показателями , даются оценки типа Вимана-Валирона. Эти оценки улучшаются в случае нулевого нижнего R – порядка. Для $\lambda_n = \ln n$ выделен подкласс функций, для которых выполняется аналог теоремы Вимана. Построены примеры на точность полученных оценок. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.535.4

О росте аналитических функций. Шеремета М.Н. – Вестн. Львов. ун-та, сер.мех-мат., вып.20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 11-13 /на укр. яз./.

Известно, что порядок ρ аналитической в $\{z:|z|<R$, $0<R\leq\infty$ функции $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ можно определить как $\limsup_{r\to R} \ln\ln M(r)/\ln\frac{rR}{R-r}$, где $M(r)=\max\{|f(z)|:|z|=r\}$ и $\frac{rR}{R-r}$ при $R=\infty$ понимается как r. Если $R=\infty$, то $\rho=\varkappa$, где $\varkappa=\limsup_{n\to\infty} \ln n/\ln\frac{1}{\alpha_n}$ и $\alpha_n=(\sqrt[n]{|a_n|}-1/R)^+$. Показано, что $\rho=(\varkappa-1)^+$ в случае, когда $0<R<\infty$. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513.88

Условия совпадения двух операторов. Л я н ц е В.Э., С т о р о ж О.Г. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 14-16 /на укр. яз./.

Установлены условия совпадения двух линейных операторов в гильбертовом пространстве в терминах абстрактных граничных условий. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.535.4

О нижнем порядке целой функции. В е с е л о в с к а я О.В. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 17-21 /на укр. яз./.

Исследуются свойства нижнего порядка целой функции в зависимости от ее рода и распределения нулей. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.946

Устойчивость по Ляпунову одной смешанной задачи для уравнения четвертого порядка. Л а в р е н ю к С.П. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 21-26 /на укр. яз.

Исследуется устойчивость по Ляпунову смешанной задачи для уравнений $\Delta^2 u + \operatorname{div}(B(x)\nabla u) + c(x)u + u_{tt} = f(x,t,u,u_t)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$ в классе обобщенных по пространственным переменным решений. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.946

Внешняя обобщенная задача Дирихле для уравнения $(\Delta^2 - K^4)u = 0$ Б е р е з о в с к а я Г.М., К о в а л и в А.Я., Л о п у ш а н с к а я Г.П.- Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 26-29 /на укр. яз./.

Получено представление единственного решения внешней задачи Дирихле для уравнения $(\Delta^2 - K^4)u(x) = 0$, когда на границе заданы обобщенные функции. Решение понимается в определенном смысле. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.946

Свойства фундаментального решения метагармонического уравнения четвертого порядка в римановом пространстве. Ш и п к а И.Г. Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып.20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 30-33 /на укр. яз./.

Вводится понятие фундаментального решения метагармонического уравнения четвертого порядка в n - листном римановом пространстве с гладкой линией ветвления и доказываются три свойства этого решения. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.944

Сведение одной краевой задачи к системе регулярных интегральных уравнений. К о с т е н к о В.Г., К о р к у н а М.Д. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып. 20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 34-38 /на укр. яз./.

Для одной важной, встречающейся в практических приложениях, системы линейных уравнений эллиптического типа краевая задача, содержащая в граничных условиях дифференциальный оператор с непрерывными коэффициентами, сведена к системе регулярных интегральных уравнений. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.944

Фундаментальная матрица решений одной линейной эллиптической системы уравнений в частных производных. К о с т е н к о В.Г., К о р к у н а М.Д. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып.20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 38-42 /на укр. яз./.

Найдена в явном виде фундаментальная система решений одной важной, встречающейся в практических приложениях системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.913

Асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. К о с т е н к о К.С. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып.20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с.42-44 /на укр.яз./.

При определенных условиях найдены асимптотические представления фундаментальной системы решений и их производных до третьего порядка включительно линейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Библиогр.: 2 назв.

УДК 514.947

Асимптотическое решение квазилинейного уравнения четвертого порядка с медленно меняющимися коэффициентами. К о с т е н к о В.Г, В е с е л о в с к а я А.А. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат. вып. 20., Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 44-49 /на укр. яз./.

Построено асимптотическое решение в первом приближении одного квазилинейного уравнения четвертого порядка с медленно меняющимися коэффициентами в виде некоторой неплоской волны. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.946

Угловой пограничный слой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. Ц и м б а л В.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 47-53 /на укр.яз./.

Методом погранслоя с использованием функций углового погранслоя построено асимптотическое разложение решения смешанной задачи для сингулярно возмущенного гиперболического уравнения второго порядка. Малый параметр входит множителем как при вторых, так и первых производных. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.946

Сингулярно возмущенное уравнение третьего порядка. Цимбал В.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып.20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 53-56 /на укр. яз./.

Методом пограничного слоя построено асимптотическое разложение решения смешанной задачи для уравнения в частных производных третьего порядка $\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,t)u = f(x,t)$, где $\varepsilon > 0$ - малый параметр. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.917

Существование почти периодического решения одного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Лисевич Л.Н.- Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып.20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 56-61 /на укр.яз./.

Доказывается существование почти периодического решения уравнения $\frac{d}{dx}\left[K(x)\frac{dy}{dx}\right] = \varphi(x)y + \psi(x)$ при условии, что $K(x)$ и $\varphi(x)$ равномерные почти периодические функции, а $\psi(x) - S^p$ - почти периодическая функция с ограниченным неопределенным интегралом. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.946

Непрерывность по Гельдеру обобщенных решений параболических уравнений дивергентного вида с вырождением. Колодий И.М. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с.62-66 /на укр. яз./.

Доказывается непрерывность по Гельдеру обобщенных решений параболического уравнения $u_t - \operatorname{div} A(x,t,u,u_x) = B(x,t,u,u_x)$, допускающего вырождение. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.946

Слабая форма неравенства Харнака для неотрицательных обобщенных решений параболических уравнений с вырождением. К о л о д и й И.М. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 67-71 /на укр. яз./.

Для неотрицательных обобщенных решений уравнения $u_t - \operatorname{div} A(x,t,u,u_x) = B(x,t,u,u_x)$ доказано неравенство Харнака в ослабленной форме. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.512.2

Об абсолютной сходимости рядов Фурье S^p – почти периодических матриц. К о в а л ь ч у к Б.В. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 71-74 /на укр. яз./.

Изучены условия абсолютной сходимости рядов Фурье S^2 – почти периодических матриц в терминах наилучших приближений. Библиогр.: 4 назв.

УДК 519.21

Положительные устойчивые распределения. К в и т И.Д., К о с а р ч и н В.Н. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1982, с. 74-76 /на укр. яз./.

На основании соотношения между изображением и отражением положительной случайной величины найдено явное выражение плотности распределения вероятностей для положительных устойчивых случайных величин. Библиогр.: 4 назв.

УДК 5I2.3I3

Расширение Лиувилля поля рациональных функций. А р т е м о в и ч О.Д., Г о р б а ч у к Е.Л. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, I982, с. 76-78 /на укр. яз./.

Доказана теорема о том, что целые функции не представляются при помощи конечной комбинации арифметических операций, итегралов и экспонент интегралов над полем вещественных рациональных функций. Библиогр.: 2 назв.

УДК 5I2.553

Радикалы, полупростой класс которых замкнут относительно фактор-модулей. Г о р б а ч у к Е.Л., П о п о в и ч Р.Б. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, I982, с. 78-83 /на укр. яз./.

Описываются точные справа идемпотентные радикалы. Как следствие получены отличные от известных характеризации точных справа кручений. Решен вопрос о расщепляемости точных справа радикалов. Библиогр.: 6 назв.

УДК 5I4

О некоторых способах отображения развертывающихся поверхностей. Д е н и с к о С.В. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 20. Вопросы математической физики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, I982, с. 83-86 /на укр. яз./.

Рассматриваются два пространственных механизма. Для каждого из них получены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы механизм воспроизводил развертывающуюся поверхность. Ил. 2.

Вестник Львовского университета

Выпуск 20

Серия механико-математическая

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

/На украинском языке/

Львов
Издательство при Львовском государственном
университете
издательского объединения "Вища школа"

Редактор В.В.Войтович

Художній редактор В.Д.Цейтін

Технічний редактор С.В.Копотюк

Коректор В.П.Короленко

Інформ. бланк № 7460

Підп. до друку 26.04.82. БГ 02551 . Формат 60x84 I/16.
Папір друк. № 3. Офс. друк. Умовн. друк. арк. 5,58
Обл.-вид. арк. 4,89 . Тираж 600 прим. Вид. № 1031 .
Зам. 3390 . Ціна 60 коп. Замовне

Видавництво при Львівському державному університеті
видавничого об"єднання "Вища школа", 290000, Львів,
вул.Університетська, I.

Львівська обласна книжкова друкарня, 290000, Львів,
вул. Стефаника, II.

60 коп.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1982, вип. 20, 1—96.