УДК 517.512

Я.Г.Притула, М.М.Яцимірський

# ОЦІНКИ НАБЛИЖЕНЬ $B^2$ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $f(x)$ – майже періодична функція Безіковича класу $B^2$ /$B^2$ м.п. функція/, показники Фур"є якої мають єдину точку згущення на нескінченності. Ряд Фур"є її запишемо у такій формі:

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\lambda_j x}, \qquad /1/$$

де $\lambda_{-j} = -\lambda_j$; $|A_j| + |A_{-j}| > 0, j \neq 0; \lambda_j > 0, \lambda_{j+1} > \lambda_j$ для $j > 0$.

Приймемо

$$E_{\lambda_n}(f) = \inf_{g \in G_{\lambda_n}} \left[ M\{|f(x) - g(x)|^2\} \right]^{1/2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

де $G_{\lambda_n}$ – множина $B^2$ м.п. функцій, показники Фур"є яких лежать в інтервалі $]-\lambda_n, \lambda_n[$ . Нехай

$$\omega(\delta, f) = \sup_{|h \leq \delta|} \left[ M\{|f(x+h) - f(x)|^2\} \right]^{1/2}$$

і

$$\sigma_{\lambda_n}(x, f) = \sum_{|j| < n} \left(1 - \frac{|\lambda_j|}{\lambda_n}\right) A_j e^{i\lambda_j x} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Теорема I. Нехай $f(x)$ – $B^2$ м.п. функція з рядом Фур"є /1/. Тоді має місце нерівність

$$\left[ M\{|f(x) - \sigma_{\lambda_n}(x, f)|^2\} \right]^{1/2} \leq 2^{-1/2} \left[ \frac{\lambda_n}{2} \int_0^{\pi/\lambda_n} \omega^2(t, f) \sin \lambda_n t \, dt \right]^{1/2}. \qquad /2/$$

Доведення. З рівності Парсеваля випливає, що

$$M\{|f(x)-\sigma_{\lambda_n}(x,f)|^2\} = \sum_{|j|\le n}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^2|A_j|^2 + \sum_{|j|>n}|A_j|^2 \qquad /3/$$

і

$$M\{|f(x+h)-f(x)|^2\} = 2\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|^2(1-\cos\lambda_j h).$$

Звідки маємо нерівність

$$\omega^2(t,f) \ge 2\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|^2(1-\cos\lambda_j h). \qquad /4/$$

З /3/ і /4/ одержуємо

$$M\{|f(x)-\sigma_{\lambda_n}(x,f)|\} \le \sum_{|j|\le n}\left[\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^2-1\right]|A_j|^2 + \sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|^2\cos\lambda_j t + 1/2\,\omega^2(t,f).$$

Помножимо обидві сторони нерівності на $\sin\lambda_n t$ і проінтегруємо по відрізку $[0, \pi/\lambda_n]$. Маємо

$$\int_0^{\pi/\lambda_n}\sin\lambda_n t\,dt = 2/\lambda_n$$

$$\int_0^{\pi/\lambda_n}\cos\lambda_j t\sin\lambda_n t\,dt = \begin{cases}\dfrac{\lambda_n}{\lambda_n^2-\lambda_j^2}\left(1+\cos\dfrac{\pi\lambda_j}{\lambda_n}\right) & \text{для } j \ne n,\\ 0 & \text{для } j = n.\end{cases}$$

Звідси, враховуючи, що другий інтеграл при $|j| > n$ від"ємний, одержуємо

$$M\{|f(x)-\sigma_{\lambda_n}(x,t)|^2\} \le \frac{\lambda_n}{4}\int_0^{\pi/\lambda_n}\omega^2(t,f)\sin\lambda_n t\,dt + \sum_{|j|\le n}|A_j|^2\left\{\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^2-1+\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2-\lambda_j^2}\cos^2\frac{\pi\lambda_j}{2\lambda_n}\right\}. \qquad /5/$$

Покажемо, що множники

$$\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^2 - 1 + \frac{1}{1-(\lambda_j/\lambda_n)^2} \cos^2 \frac{\pi \lambda_j}{2\lambda_n} = F\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)$$

при $|j| < n$ від"ємні. Для цього розглянемо функцію

$$F(x) = (1-x^2)^{-1} \left[\cos^2 \frac{\pi}{2} x - (1-x^2)^2\right].$$

$$0 < x < 1$$

Оскільки $\cos \frac{\pi x}{2} < 1 - x^2$ для $x \in ]0,1[$ , одержуємо $F(x) < 0$ для $x \in ]0,1[$ . Таким чином, сума в правій частині нерівності /5/ від"ємна і ми приходимо до нерівності /2/.

Н а с л і д о к  I. Нехай $f(x)$ – $B^2$ м.п. функція з рядом Фур"є /I/. Тоді має місце нерівність

$$E_{\lambda_n}(f) \leq 2^{-1/2} \left(\frac{\lambda_n}{2} \int_0^{\pi/\lambda_n} \omega^2(t,f) \sin \lambda_n t \, dt\right)^{1/2}. \qquad /6/$$

Доведення випливає з нерівностей /2/ і

$$E_{\lambda_n}(f) \leq \left[M\{|f(x) - \sigma_{\lambda_n}(x,t)|^2\}\right]^{1/2}.$$

У випадку коли $f(x)$ – періодична функція, нерівність /6/ отримано у праці [2].

Н а с л і д о к  2. Нехай $f(x)$ – $B^2$ м.п. функція з рядом Фур"є /I/, $f(x) \neq const$. Тоді має місце нерівність

$$E_{\lambda_n}(f) < 2^{-1/2} \omega(\pi/\lambda_n, f). \qquad /7/$$

Нерівність /7/ випливає з /6/ внаслідок монотонності $\omega(t,f)$.

Остання нерівність для періодичних функцій одержана у праці [3], а для майже періодичних – у праці [I]. У нерівності /7/ постійна найліпша. Звідси випливає, що і в нерівностях /2/ і /6/ постійна $2^{-1/2}$ найліпша.

Т е о р е м а  2. Нехай $f(x)$ – $B^2$ м.п. функція з рядом Фур"є /I/ і її похідна $f^{(r)}(x)$ також $B^2$ м.п. функція. Тоді має місце нерівність

$$E_{\lambda_n}(f) \leq 2^{-1/2} \lambda_n^{-r} \left\{ \frac{\lambda_n}{2} \int_0^{\pi/\lambda_n} \omega^2(t, f^{(r)}) \sin \lambda_n t \, dt \right\}^{1/2}.$$

Для доведення потрібно використати наслідок I.

Т е о р е м а  3. Нехай $f(x)$ – $B^2$ м.п. функція з рядом Фур"є /I/. Тоді мають місце нерівності

$$\pi^{-1} \omega\left(\frac{\pi}{\lambda_n}, f\right) \leq \left[ M\left\{ |f(x) - \sigma_{\lambda_n}(x,f)|^2 \right\} \right]^{1/2} \leq 2^{-1/2} \omega(\pi/\lambda_n, f). \qquad /8/$$

Д о в е д е н н я . Права нерівність, враховуючи монотонність $\omega(t,f)$, випливає з /2/. Доведемо нерівність, яка є зліва. З рівності Парсеваля маємо

$$\omega^2(\pi/\lambda_n, f) = \sup_{|h| \leq \pi/\lambda_n} M\left\{ |f(x+h) - f(x)|^2 \right\} =$$

$$= \sup_{|h| \leq \pi/\lambda_n} \sum_{|j| \leq n} 4|A_j|^2 \sin^2 \frac{\lambda_j h}{2} + \sup_{|h| \leq \pi/\lambda_n} \sum_{|j| > n} 4|A_j|^2 \sin \frac{\lambda_j h}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{|j| \leq n} \left( \frac{\pi \lambda_n}{\lambda_n} \right)^2 |A_j|^2 + \sum_{|j| > n} 4|A_j|^2.$$

Тому

$$\frac{1}{\pi^2} \omega^2(\pi/\lambda_n, f) \leq \sum_{|j| \leq n} \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_n} \right)^2 |A_j|^2 + \sum_{|j| > n} \frac{4}{\pi^2} |A_j|^2.$$

Внаслідок рівності /3/ одержуємо

$$\frac{1}{\pi^2} \omega^2\left(\frac{\pi}{\lambda_n}, f\right) \leq M\left\{ |f(x) - \sigma_{\lambda_n}(x,f)|^2 \right\}.$$

Нерівність /8/ для випадку періодичних функцій доведена у праці [4], причому показано, що постійна $1/\pi$ – найліпша. Тому у нерівностях /8/ постійні найліпші.

Подамо без доведення ще одну теорему.

Нехай

$$\omega_m(\delta,f)=\sup_{|h|\le\delta}\left[M\{|\Delta_h^{(m)}f(x)|^2\}\right]^{1/2},$$

де

$$\Delta_h^{(m)}f(x)=\sum_{\ell=0}^{m}(-1)^{\ell}C_m^{\ell}f(x+\ell h)\qquad m=1,2,\dots$$

Теорема 4. Для будь-яких натуральних $m$ і $n$ та будь-якої $f(x)$ – $B^2$ м.п. функції з рядом Фур'є /I/ має місце нерівність

$$E_{\lambda_n}(f)\le K_{n,m}\left\{\int_0^{2\pi/\lambda_n}\omega_m^2(t,f)\,\varphi_n(t)\,dt\right\}^{1/2},$$

де

$$\varphi_n(t)=\sin\frac{\lambda_n t}{2}+\frac{1}{2}\sin\lambda_n t$$

$$K_{n,m}=\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n\,(C_{2m}^{m})^{-1}}$$

і для будь-яких фіксованих $m$ і $n$ при $m<n$ константа $K_{n,m}$ найліпша.

Аналогічна теорема для періодичних функцій доведена у праці [2].

Список літератури: I. Притула Я.Г. О неравенстве Джексона для $B^2$ – почти периодических функций.-Изв. вузов, сер. мат., 1972, № 8 /123/. 2. Черных Н.И. О наилучших приближениях периодических функций тригонометрическими полиномами в $L_2$. – Мат. заметки, 1967, т.2, вып.5. 3. Черных Н.И. О неравенстве Джексона в $L_2$. – Тр. мат. ин-та АН СССР, 1967, т.88. 4. Chin-Hung Chung, Charles K. Chui. Some inequalites in trigonometric approximation - Bull. Austral. - Math, Soc. 1973, v.8.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.82