Нехай B – крайовий оператор і L_B – звуження оператора L_1 на многовид $D(L_B) \stackrel{def}{=} \{f \in D(L_1) : Bf = 0\}$.

Основний результат, який подаємо без доведення, є наступна теорема.

Т е о р е м а . Якщо крайовий оператор B задовольняє умову Я.Б.Лопатинського, то оператори L_B і L подібні.

Список літератури: I. А г м о н С., Д у г л и с А., Н и р е н б е р г Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. – М.: ИЛ, 1962. 2. Л о п а т и н с к и й Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. – Укр. мат. журн., 1953, т.5, №2.

Стаття надійшла до редколегії 29.03.82

УДК 517.535.4

М.М.Шеремета

РАЦІОНАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ШВИДКОГО ЗРОСТАННЯ

Нехай

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \; a_0 = 1, \; a_k > 0 \; (k \geq 1) \qquad /1/$$

ціла трансцендентна функція; Π_n – клас алгебраїчних многочленів степеня $\leq n$, а $\lambda_n(f) = \inf\{\|1/f - 1/p\|_{L_{[a,\infty)}} : p \in \Pi_n\}$. У праці [1] подані оцінки величини $\lambda_n(f)$ зверху. Зокрема, показано, що $\lambda_n(f) < \Lambda_n(f)$ для всіх $n \geq 0$, де $\Lambda_n(f) = (e-1)\{(e-1)f(e^{-1}f^*(e^n)) - 1\}^{-1}$, f^* – функція, обернена до f.

Доведемо оцінку $\lambda_n(f)$ знизу для функцій /1/ швидкого зростання. Для цього потрібна наступна лема.

Л е м а . Якщо функція /I/ задовольняє умову

$$x(\ln\ln f(x))' \geq 1 \quad (x \geq a \geq 0), \qquad /2/$$

то для кожного $\alpha \in [0,1)$ існує послідовність (n_j) така, що

$$a_n > \{\alpha / f^*(e^n)\}^n, \quad n = n_j. \qquad /3/$$

Дійсно, припустимо протилежне. Тоді існує $\alpha \in (0,1)$ таке, що для всіх $n \geq n_0 \geq \ln f(a)$ виконується нерівність $a_n \leq \{\alpha/f^*(e^n)\}^n$. Нехай $\alpha < \delta < 1$. При $x \to \infty$ маємо

$$f(x) \leq O(x^{n_0}) + \sum_{n \geq n_0} \{\delta x / f^*(e^n)\}^n (\alpha/\delta)^n \leq$$
$$\leq O(x^{n_0}) + \{\delta/(\delta-\alpha)\} \exp(\max\{\varphi(t) : t \geq \ln f(a)\}), \qquad /4/$$

де $\varphi(t) = t\{\ln \delta x - \ln f^*(e^t)$. Очевидно, що $\varphi'(t) = \ln\delta x - \ln f^*(e^t) - \varepsilon(t)$, де з огляду на /2/ $0 < \varepsilon(t) = t(\ln f^*(e^t))' \leq 1$ при $t \geq \ln f(a)$. Тому, якщо $t(x)$ – точка максимума функції φ, то при всіх досить великих x виконується нерівність $t(x) \geq \ln f(a)$ і $\ln f^*(e^{t(x)}) = \ln \delta x - \varepsilon_1(x)$, де $0 \leq \varepsilon_1(x) \leq 1$, тобто $t(x) = \ln f(\delta x e^{-\varepsilon_1(x)}) \leq \ln f(\delta x)$. Таким чином, з /4/ випливає, що $f(x) \leq O(x^{n_0}) + \{\delta/(\delta-\alpha)\}(f(\delta x))^{\varepsilon_1(x)} \leq$ $\leq \{2\delta/(\delta-\alpha)\} f(\delta x)$ при $x \geq x_0$, тобто, внаслідок трансцендентності функції f, виконується співвідношення $\ln\{2\delta/(\delta-\alpha)\} \geq$ $\geq \ln f(x) - \ln f(\delta x) \to \infty$ при $x \to \infty$, що неможливо. Лема доведена.

Т е о р е м а . Якщо функція /I/ задовольняє умову /2/, то для кожного $\alpha \in (0,1)$ існує послідовність (n_j) така, що

$$\lambda_n(f) > \left(\frac{\alpha}{4e}\right)^{n+1} f^{-2}(e^{-1} f^*(e^n)), \quad n = n_j. \qquad /5/$$

Д о в е д е н н я . Приймемо $x_n = f^*(\Lambda_n^{-1}(f))$; отже $f(x_n) = \Lambda_n^{-1}(f) < \lambda_n^{-1}(f)$. Нехай $p^* \in \Pi_n$ дає найкращу апроксимацію, тобто $\lambda_n(f) = \|1/f - 1/p^*\|_{[0,\infty]}$. Тоді за допомогою простих обчислень [2] одержуємо

$$-\frac{f^2(x)}{\lambda_n^{-1}(f) + f(x)} \leq p^*(x) - f(x) \leq \frac{f^2(x)}{\lambda_n^{-1}(f) - f(x)}, \quad 0 \leq x \leq x_n,$$

тобто

$$\| p^* - f \|_{[0,x_n]} \leq \frac{f^2(x_n)}{\lambda_n^{-1}(f) - f(x_n)} . \qquad /6/$$

Нехай $E_n(f) = \inf \{ \|p-f\|_{L_\infty[0,x_n]} : p \in \Pi_n \}$. За нерівністю С.Н.Бернштейна [2, 3] маємо

$$\frac{2a_{n+1} x_n^{n+1}}{4^{n+1}} \leq E_n(f) < \frac{f^2(x_n)}{\lambda_n^{-1}(f) - f(x_n)} = \frac{\Lambda_n^{-2}(f)}{\lambda_n^{-1}(f) - \Lambda_n^{-1}(f)} ,$$

звідки внаслідок леми та вибору x_n одержуємо нерівність

$$\frac{\Lambda_n^{-2}(f)}{\lambda_n^{-1}(f) - \Lambda_n^{-1}(f)} \geq \left\{ \frac{\alpha}{4} \frac{f^*(\Lambda_n^{-1}(f))}{f^*(e^{n+1})} \right\}^{n+1} , \quad n = \nu_j - 1 . \qquad /7/$$

Оскільки $\mathcal{E}(t) \leq 1$ при $t \geq \ln f(a)$, то для всіх досить великих n записуємо $\ln f^*(e^{n+1}) - \ln f^*(e^n) = \int_n^{n+1} \mathcal{E}(t) d \ln t \leq \frac{1}{n}$, тобто $f^*(e^{n+1}) \leq e^{1/n} f^*(e^n)$. Аналогічно, використовуючи трансцендентність функції f , можна показати, що $f^*(\Lambda_n^{-1}(f)) = e^{-1} f^*(e^n) + O(1)$ при $n \to \infty$. Тому з /7/

$$\frac{1}{\lambda_n(f)} \leq \frac{1}{\Lambda_n(f)} + \frac{1}{\Lambda_n^2(f)} \left\{ \frac{\alpha}{4} \frac{e^{-1} f^*(e^n) + O(1)}{e^{1/n} f^*(e^n)} \right\}^{-n+1} =$$

$$= (1 + o(1)) f^2(e^{-1} f(e^n)) \left\{ \frac{4e}{\alpha} (1 + o(1)) \right\}^{n+1} ,$$

звідки внаслідок довільності α одержуємо /5/.

Список літератури: I. Шеремета М.М. Рациональная аппроксимация на $[0, \infty)$ целых функций произвольного роста с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами. - Укр. мат. журн., 1979, т.3I, № 3. 2. Erdös P., Reddy A.R. Rational approximation on a positive real axis.- Proc. London Math. Soc., 1975, v.31, N4. 3. Bernstein S.N. Lesons sur le propriétés extrémales et la meileure approximation des fonctions analytiques d'une variable reélle. - Paris: Ganthier-Villars, 1926.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.8I