УДК 517.925.7

О.Б.Скасків

ПРО РІСТ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ, ЯКА ЗАДОВОЛЬНЯЄ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ n -ГО ПОРЯДКУ З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ЗОБРАЖАЄТЬСЯ РЯДОМ ДІРІХЛЕ

Нехай $\{M_j\}$ – деяка множина векторів $M_j=(m_{0j}, m_{1j}, \ldots, m_{nj})$ така, що всі m_{ij} є цілими невід"ємними числами і $max\{m_{0j}+m_{1j}+\ldots+m_{nj} : j\}=N<\infty$. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\sum_{\{M_j\}} P_{M_j}(z)\, W^{m_{0j}} (W')^{m_{1j}} \ldots (W^{(n)})^{m_{nj}} = 0, \qquad /1/$$

де $P_{M_j}(z)=\sum_{k=0}^{K} a_{M_j,k}\, e^{z\lambda_k}$ – експоненціальні многочлени з одним і тим же набором показників $0\leq\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_K$, причому серед коефіцієнтів $a_{M_j,k}$ можуть траплятися рівні нулеві, але $P_{M_j}(z)\not\equiv 0$ для кожного j ; для кожних $j_1<j_2$ $\sum_{l=0}^{n} l m_{l,j_1} < \sum_{l=0}^{n} l m_{l,j_2}$. Припустимо, що ціла функція F, задана абсолютно збіжним у $\mathbb{C}$ рядом Діріхле

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k\, e^{\mu_k z}, \qquad /2/$$

де $0\leq\mu_0<\mu_1<\ldots<\mu_k\uparrow\infty$ $(k\to\infty)$ задовольняє рівняння /1/. Вкажемо її асимптотичні властивості. Така задача розв"язана Ш.І.Стрелицом [1] для випадку, коли рівняння /1/ лінійне, а для $n=1$, дослідження асимптотики росту функції /2/ проведене М.М.Шереметою [2]. Наступна теорема містить теорему, доведену у праці [2]. Метод її доведення близький до методів, використаних у працях [1, 2].

Т е о р е м а . Якщо функція /2/ є розв"язком рівняння /1/, то її R – порядок ρ_R і нижній R -порядок λ_R задовольняють співвідношення

$$\frac{h}{\gamma}\leq\lambda_R=\rho_R\leq\lambda_K, \qquad /3/$$

де $h = \min\{\lambda_k - \lambda_{k-1} : 1 \le k \le K\}$ і $\gamma = \max\{\sum_{\ell=0}^{n} \ell m_{\ell j} : j \in J\}$, J – така множина значень j, для яких $\sum_{\ell=0}^{n} m_{\ell j} = N$.

Зауважимо, що оцінки /3/, взагалі кажучи, поліпшити не можна. На це вказують наступні приклади. Функція $F(z) = e^{e^{\alpha z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{k\alpha z}}{k!}$ є одного боку, є розв"язком рівняння $W'' - \alpha e^{\alpha z} W' - \alpha e^{2\alpha z} W = 0$ і, отже, досягається верхня оцінка зі співвідношення /3/ : $\lambda_R = \rho_R = \lambda_K = \alpha$. З іншого боку, ця функція є розв"язком рівняння $W'' - \alpha W' - \alpha^2 e^{2\alpha z} W = 0$ і, таким чином, нижня оцінка теж досягається $h/\gamma = \alpha = \lambda_R = \rho_R$ $(h = 2\alpha, \gamma = 2)$.

Список літератури: I. С т р е л и ц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис, 1972. 2. Ш е р е м е т а М.Н. Асимптотика целых функций, заданных рядами Дирихле и удовлетворяющих дифференциальным уравнениям первого порядка с экспоненциальными коэффициентами. – Диф. уравн., 1981, т.17, № 6.

Стаття надійшла до редколегії 22.03.82

УДК 517.574

Я.В.Васильків

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ δ -СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ СКІНЧЕННОГО λ -ТИПУ

Дійснозначна функція $w(z)$ називається δ -субгармонічною в C, якщо існують субгармонічні в C функції $u(z)$ і $v(z)$ такі, що

1/ w – визначена на множині E точок C, де u і v не дорівнюють одночасно $-\infty$;

2/ $w = u - v$ на E /в розширеному сенсі, тобто для довільного скінченного дійсного a $a - (-\infty) = +\infty, -\infty - a = -\infty$/.