де $h = \min\{\lambda_k - \lambda_{k-1} : 1 \le k \le K\}$ і $\gamma = \max\{\sum_{l=0}^{n} l m_{lj} : j \in J\}$, J – така множина значень j, для яких $\sum_{l=0}^{n} m_{lj} = N$.

Зауважимо, що оцінки /3/, взагалі кажучи, поліпшити не можна. На це вказують наступні приклади. Функція $F(z) = e^{e^{\alpha z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{k\alpha z}}{k!}$ є одного боку, є розв"язком рівняння $W'' - \alpha e^{\alpha z} W' - \alpha e^{2\alpha z} W = 0$ і, отже, досягається верхня оцінка зі співвідношення /3/ : $\lambda_R = \rho_R = \lambda_K = \alpha$. З іншого боку, ця функція є розв"язком рівняння $W'' - \alpha W' - \alpha^2 e^{2\alpha z} W = 0$ і, таким чином, нижня оцінка теж досягається $h/\gamma = \alpha = \lambda_R = \rho_R$ $(h = 2\alpha, \gamma = 2)$.

Список літератури: І. С т р е л и ц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис, 1972. 2. Ш е р е м е т а М.Н. Асимптотика целых функций, заданных рядами Дирихле и удовлетворяющих дифференциальным уравнениям первого порядка с экспоненциальными коэффициентами. – Диф. уравн., 1981, т.17, № 6.

Стаття надійшла до редколегії 22.03.82

УДК 517.574

Я.В.Васильків

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ δ -СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ СКІНЧЕННОГО λ -ТИПУ

Дійснозначна функція $w(z)$ називається δ -субгармонічною в C, якщо існують субгармонічні в C функції $u(z)$ і $v(z)$ такі, що

1/ w – визначена на множині E точок C, де u і v не дорівнюють одночасно $-\infty$;

2/ $w = u - v$ на E /в розширеному сенсі, тобто для довільного скінченного дійсного a $a - (-\infty) = +\infty, -\infty - a = -\infty$/.

Функцію w δ - субгармонічну в $\mathbb{C}$ і визначену на E називають повною [3], якщо кожна δ -субгармонічна функція в $\mathbb{C}$, яка суміщається з w на E, має E своєю областю визначення.

Нехай:

1/ $\mu_w = \mu$ - розподіл мас асоційованих за Рісом з функцією w ; $\mu = \mu^+ - \mu^-$ - розклад Жордана [1, с. 12-13; 2, с.482, 584] і припустимо, що $0 \notin supp\, \mu^+$ і $0 \notin supp\, \mu^-$;

2/ $T(r,w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w^+(re^{i\theta})d\theta + N(r,w)$

характеристика Неванлінни функції w [7], де

$$N(r,w) = \int_0^r \Big\{\int_{|a|\le t} d\mu^-(a)\Big\} t^{-1} dt.$$

Застосувавши формулу Йенсена до функції v, отримаємо

$$T(r,w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(re^{i\theta})\,d\theta - v(0),$$

де $S = max\{u,v\}$; $w = u - v$; u, v - субгармонічні в $\mathbb{C}$ і $\mu_u = \mu^+, \mu_v = \mu^-$. Надалі вважаємо $u(0) = v(0) = 0$.

Позначимо через $\lambda(r)$ - додатну, неперервну на $]0,\infty[$ функцію, $\lambda(r)\uparrow\infty$ при $r\to\infty$, яка називається функцією росту.

Функція w δ - субгармонічна в $\mathbb{C}$ називається δ -субгармонічною функцією скінченного λ -типу, якщо існують сталі $A, B > 0$ такі, що нерівність $T(r,w) \le A\lambda(Br)$ має місце для довільного $r > 0$. Клас таких функцій w позначимо через Λ_δ, а підклас субгармонічних функцій з Λ_δ через Λ_s.

Класи Λ_δ введені П.Новеразом [5, 6]. Вони узагальнюють класи мероморфних функцій скінченного λ -типу, введених і досліджених методом рядів Фур"є Л.Рубелем і Б.Тейлором [8, 10] /див. також [4, 9]/.

Нехай

$$C_k(r,w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Формули, що виражають коефіцієнти Фур"є $C_k(r,w)$ через розподіл мас $\mu_w = \mu$, асоційованих за Рісом з функцією w, встановлені у працях [5, 6].

О з н а ч е н н я І. Розподіл мас μ має скінченну λ -щільність, якщо існують додатні сталі A, B такі, що для всіх $r>0$ виконується

$$N(r)=\int_0^r n(t)t^{-1}dt < A\lambda(Br), \quad n(t)=\int_{|a|\leq t}|d\mu(a)|.$$

О з н а ч е н н я 2. Розподіл мас $\mu \geq 0$ зі скінченною λ -щільністю називається λ -допустимим, якщо він λ -збалансований, тобто існують сталі $A, B>0$ такі, що

$$\left|k^{-1}\int_{r_1<|a|\leq r_2} a^{-k}d\mu(a)\right| \leq \frac{A\lambda(Br_1)}{r_1^k}+\frac{A\lambda(Br_2)}{r_2^k}$$

для довільних $r_1, r_2>0$ і $k\in N$.

О з н а ч е н н я 3. Нехай μ дійснозначний розподіл мас, $0\notin \operatorname{supp}\mu$, $\alpha=\{\alpha_k\}$, $k\in \mathbb{Z}$ – послідовність комплексних чисел. Послідовність $\{C_k(r;\mu,\alpha)\}$, $k\in\mathbb{Z}$, де

$$C_0(r;\mu,\alpha)=\int_0^r \nu(t)t^{-1}dt, \quad \nu(r)=\int_{|a|\leq r}d\mu(a);$$

$$C_k(r;\mu,\alpha)=\frac{r^k}{2}\alpha_k+\frac{r^k}{2k}\int_{|a|\leq r}a^{-k}d\mu(a)-$$

$$-\frac{1}{2kr^k}\int_{|a|\leq r}(\bar{a})^k d\mu(a), \quad k\in N;$$

$$C_k(r;\mu,\alpha)=\bar{C}_{-k}(r;\mu,\alpha), \quad k=-1,-2,\dots$$

називається послідовністю коефіцієнтів Фур'є пари (μ,α).

Т е о р е м а І. Нехай послідовність $\{C_k(r)\}=\{C_k(r;\mu,\alpha)\}$, $0\notin \operatorname{supp}\mu$ така, що

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|C_k(r)|^2<+\infty.$$

Тоді існує єдина повна δ -субгармонічна в $\mathbb{C}$ функція $w(z)$ така, що $w(0)=0$, $\mu_w=\mu$ і $C_k(r,w)=C_k(r)$ для довільних $k\in\mathbb{Z}$, $r>0$.

Доведення. За теоремою Фішера-Ріса функція $\Phi(\rho e^{i\theta}) = \sum C_k(\rho) e^{ik\theta}$ належить до $L^2[0, 2\pi]$, де $\rho > 0$. Нехай для довільного $\rho > 0$

$$B_\rho(z,a) = \ln\left|\frac{\rho(a-z)}{\rho^2 - \bar{a}z}\right|,$$

$$P_\rho(z) = \int_{|a|<\rho} B_\rho(z,a)\, d\mu(a),$$

$$Q_\rho(z) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|W|=\rho} \frac{W+z}{W-z}\,\Phi(W)\,\frac{dW}{W}\right\},$$

$$w_\rho(z) = P_\rho(z) + Q_\rho(z).$$

Провівши міркування, аналогічні наведеним у праці [10] і врахувавши теорему 9 з праці [3], отримаємо, що $w_\rho(z)$ повна δ-субгармонічна в крузі $|z| < \rho$ і $w_\rho(0) = 0$, $C_k(r, w_\rho) = C_k(r)$ для довільного $k \in \mathbb{Z}$, розподіл μ_{w_ρ} дорівнює звуженню μ на вказаний круг. Нехай $\rho' > \rho$. Розглянемо функцію $W(z) = w_{\rho'}(z) - w_\rho(z)$. Оскільки для $0 \le r < \rho$, $|z| = r$ $C_k(r, W) = C_k(r, w_{\rho'}) - C_k(r, w_\rho) = C_k(r) - C_k(r) = 0$ і $W(0) = 0$, то $W(z) = 0$ майже скрізь.

З іншого боку, оскільки функція

$$W(z) = \int_{\rho \le |a| < \rho'} B_{\rho'}(z,a)\, d\mu(a) + Q_{\rho'}(z) - Q_\rho(z) + \int_{|a|<\rho} \ln\left|\frac{(\rho^2 - \bar{a}z)\rho'}{((\rho')^2 - \bar{a}z)\rho}\right| d\mu(a)$$

неперервна δ-субгармонічна функція при $|z| < \rho$, то $W(z)$ тотожній нуль у цьому крузі. Таким чином, повна δ-субгармонічна в крузі $|z| < \rho'$ функція $w_{\rho'}(z)$ суміщається з $w_\rho(z)$ при $|z| < \rho$, тобто є δ-субгармонічним продовженням функції $w_\rho(z)$

Приймемо $w(z)=w_\rho(z)$ при $|z|<\rho$. Очевидно, функція w задовольняє умови теореми. Єдиність встановлюється аналогічно наведеним міркуванням про продовження.

Означення 4. Пара (μ,α), $\mu\geq 0$ називається λ-допустимою, якщо λ-допустима її послідовність коефіцієнтів Фур"є, тобто, коли існують $A,B>0$ такі, що

$$|C_k(r;\mu,\alpha)|\leq \frac{A\lambda(Br)}{|k|+1},\ r>0,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Теорема 2. Розподіл мас $\mu\geq 0$ λ-допустимий тоді і лише тоді, коли існує послідовність комплексних чисел α така, що пара (μ,α) λ-допустима.

Доведення аналогічне наведеному у праці [10].

Теорема 3. Для того щоб розподіл $\mu\geq 0$ був розподілом мас, асоційованих за Рісом з функцією $u\in\Lambda_s$, необхідно і достатньо, щоб μ був λ-допустимим.

Доведення. Якщо $\mu=\mu_u$ для деякої $u\in\Lambda_s$ то згідно з працею [6] /теорема 4.1/ пара (μ,α) λ-допустима. З огляду на теорему 2 розподіл мас μ λ - допустимий.

Навпаки, нехай дано λ-допустимий розподіл мас μ. За теоремою 2 знаходимо послідовність комплексних чисел $\alpha=\{\alpha_k\}$ $k\in\mathbb{Z}$ таку, що пара (μ,α) є λ-допустимою. На підставі теореми 1 існує єдина субгармонічна функція u, $u(0)=0$, для якої $\mu_u=\mu$ і $\{C_k(r,u)\}=\{C_k(r;\mu,\alpha)\}$. За теоремою 4.1 з праці [6] отримуємо $u\in\Lambda_s$.

Лема 1. Нехай розподіл мас $\mu\geq 0$ має скінченну λ-щільність. Тоді існує розподіл $\mu'\geq 0$, зосереджений на системі кіл $\{z:|z|=b2^n\}$ $n\in\mathbb{N}$, $b\in[1,2[$, такий, що розподіл $\mu+\mu'$ є λ-допустимим.

Зауваження. Розподіл мас $\mu+\mu'$ розуміємо в сенсі праці [2, с.440].

Доведення леми I. Розглянемо множини $E_n(b) = \{a \in \operatorname{supp}\mu : b2^n < |a| \le b2^{n+1}\}$, $b \in [1,2[$, $n \in N$. Тоді для $a \in E_n(b)$ має місце $a = |a|e^{i\theta}$, $|a| = b2^{n+\beta}$, $0 < \beta \le 1$, $\theta = \arg a$.

Приймемо

$$g_n(b,\varphi) = -2\int_{E_n(b)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(b2^{n-1}e^{i\varphi})^m}{a^m}\, d\mu(a),$$

$$f_n(b,\varphi) = \operatorname{Re} g_n(b,\varphi) + 2\mu(E_n(b)).$$

Провівши міркування, аналогічні до наведених у праці [10], отримаємо твердження леми I.

Теорема 4. $\Lambda_\delta = \Lambda_s - \Lambda_s$, тобто для довільної $w \in \Lambda_\delta$ існують $u, v \in \Lambda_s$ такі, що $w = u - v$.

Доведення. Включення $\Lambda_s - \Lambda_s \subset \Lambda_\delta$ випливає з властивостей характеристик Неванлінни /теорема 35 з праці [3]/.

Залишається показати, що $\Lambda_\delta \subset \Lambda_s - \Lambda_s$. Нехай $w \in \Lambda_\delta$, $\mu_w = \mu^+ - \mu^-$. Застосувавши лему I до μ^-, прийдемо до існування розподілу мас μ' такого, що розподіл мас $\mu^- + \mu'$ є λ-допустимий. За теоремою 3 він є розподілом мас деякої субгармонічної функції $v \in \Lambda_s$.

Оскільки функція $u = w + v$ субгармонічна і $T(r,u) \le T(r,w) + T(r,v)$, то $u \in \Lambda_s$. Теорема доведена.

Зауваження. Клас Λ_δ слід розуміти як лінійний простір, породжений підкласом субгармонічних функцій скінченного λ-типу Λ_s.

Означення 5. Розподіли мас $\mu, \nu \ge 0$ називають диз"юнктними, якщо єдиним невід"ємним розподілом мас, який одночасно мінорує μ і ν, є нуль. Іншими словами, міра ν зосереджена на множині, μ-міра якої дорівнює нулеві /див. [2], с.589 /.

Теорема 5. Для того щоб розподіл мас $\mu \ge 0$ був додатною /від"ємною/ варіацією розподілу мас деякої δ-субгармонічної функції скінченного λ-типу, необхідно і достатньо, щоб він мав скінченну λ-щільність.

Д о в е д е н н я . Необхідність випливає з нерівності $N(r,\mu) \leq T(r,w)$. Для доведення достатності застосуємо лему I до μ. Тоді розподіл має $\mu + \mu'$ є λ-допустимим. Застосуємо знову лему I, але вже до μ'. Отримуємо λ-допустимий розподіл $\mu' + \mu''$. При цьому вибираємо число b з цієї леми так, щоб розподіли μ і μ'' були диз"юнктними. Це можливо, оскільки $\mu(K(0,r)) = 0$, за винятком щонайбільше зліченної множини J дійсних чисел $r > 0$, де $K(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. На основі теореми 3 існують субгармонічні функції u і v в класу Λ_s такі, що $\mu_u = \mu + \mu'$, $\mu_v = \mu' + \mu''$.

За теоремою 4 функція $w = u - v$ шукана і $\mu^+_w = \mu$. Для функції $w_1 = -w$, $\mu^-_{w_1} = \mu$.

Висловлюємо вдячність А.А.Кондратюку за постійну увагу до роботи.

Список літератури: I. Л а н д к о ф Н.С. Основы современной теории потенциала. - М.: Наука, 1966. 2. Ш в а р ц Л. Анализ. - М.: Наука, 1972. Т.I. 3. Arsove M. Functions representable as differences of subharmonic functions.- Trans. Amer. Math. Soc., 1953, v. 75. 4. Miles J.B. Quotient representations of meromorphic functions.- J. d'Analyse. Math., 1972, v.XXV, p. 371-388. 5. Noverraz P. Extensions d'une methode de series de Fourier aux fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques. - Seminaire P. Lelong, 6-eme anne. 1965-1966, Expose n. 3. 6. Noverraz P. Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes. - Ann. Inst. Fourier, 1969, v. 19, n.2 p. 419-493. 7. Rao N.V., Shea D. Growth problems for subharmonic functions of finite order in space.- Trans. Amer. Math. Soc., 1977, v. 230. p. 347-370. 8. Rubel L.A. Croissance et zeros des fonctions meromorphes. Espace duals de fonctions entieres - Publ. Seminaire Math, d'Orsay, 1965-1966. 9. Rubel L.A. A survey of a Fourier series method for meromorphic functions.- Lecture Notes in Math., 336, Springer Verlag, 1973, p. 51-62. 10. Rubel L.A., Taylor B.A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions. - Bull. Soc. Math. France, 1968, v. 96, p. 53-96.

Стаття надійшла до редколегії 20.08.81

УДК 517.535.4

А.А.Кондратюк

ЛІНІЙНІ КОМБІНАЦІЇ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ

Нехай Λ^0 – клас мероморфних функцій цілком регулярного зростання [5] відносно функції зростання λ, $\lambda(2r)=O(\lambda(r)), r\to\infty$. Добуток чи частка двох функцій з цього класу належить до нього [1], лінійна комбінація, взагалі кажучи, – ні. Для цілих функцій цілком регулярного зростання в сенсі Левіна-Пфлюгера [2] зростання лінійних комбінацій таких функцій вивчені у працях [3, 4]. Наступна теорема є узагальненням для класів Λ^0 відповідних результатів цих праць.

Через $h(\theta,f)$ позначимо індикатор [5] функції $f\in\Lambda^0$.

Т е о р е м а . Нехай $f,g\in\Lambda^0$. Якщо число $-a$ не належить до множини валіронівських винятків значень [3 , с. 147] функції f/g, то $f+ag\in\Lambda^0$ і $h(\theta,f+ag)=\max\{h(\theta,f),h(\theta,g)\}$.

Д о в е д е н н я . Маємо

$$f+ag=g(f/g+a). \qquad /1/$$

Позначимо $f/g=w$. Тоді $w\in\Lambda^0$. Для доведення першого твердження теореми досить доказати [7], що

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\frac{\ln|w(re^{i\theta})+a|}{\lambda(r)}-h^+(\theta,w)\right\|_1=0, \qquad /2/$$

коли число $-a$ не належить до множини валіронівських виняткових значень функції w. У /2/ $\|\cdot\|_1$ означає норму в просторі Лебега $L_1[0,2\pi]$, $h^+=\frac{1}{2}(|h|+h)$.

Запишемо нерівність

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln|w(re^{i\theta})+a|}{\lambda(r)}-h^+(\theta,w)\right|d\theta\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln^+|w+a|}{\lambda(r)}-h^+(\theta,w)\right|d\theta+ \qquad /3/$$