Taylor B.A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions. - Bull. Soc. Math. France, 1968, v. 96, p. 53-96.

Стаття надійшла до редколегії 20.08.81

УДК 517.535.4

А.А.Кондратюк

ЛІНІЙНІ КОМБІНАЦІЇ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ

Нехай Λ^0 – клас мероморфних функцій цілком регулярного зростання [5] відносно функції зростання λ, $\lambda(2r)=O(\lambda(r))$, $r\to\infty$. Добуток чи частка двох функцій з цього класу належить до нього [1], лінійна комбінація, взагалі кажучи, – ні. Для цілих функцій цілком регулярного зростання в сенсі Левіна-Пфлюгера [2] зростання лінійних комбінацій таких функцій вивчені у працях [3, 4]. Наступна теорема є узагальненням для класів Λ^0 відповідних результатів цих праць.

Через $h(\theta,f)$ позначимо індикатор [5] функції $f\in\Lambda^0$.

Т е о р е м а. Нехай $f,g\in\Lambda^0$. Якщо число $-a$ не належить до множини валіронівських виняткових значень [3 , с. 147] функції f/g, то $f+ag\in\Lambda^0$ і $h(\theta,f+ag)=\max\{h(\theta,f),h(\theta,g)\}$.

Д о в е д е н н я. Маємо

$$f+ag=g(f/g+a). \qquad /1/$$

Позначимо $f/g=w$. Тоді $w\in\Lambda^0$. Для доведення першого твердження теореми досить доказати [7], що

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\frac{\ln|w(re^{i\theta})+a|}{\lambda(r)}-h^+(\theta,w)\right\|_1=0, \qquad /2/$$

коли число $-a$ не належить до множини валіронівських виняткових значень функції w. У /2/ $\|\cdot\|_1$ означає норму в просторі Лебега $L_1[0,2\pi]$, $h^+=\frac{1}{2}(|h|+h)$.

Запишемо нерівність

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln|w(re^{i\theta})+a|}{\lambda(r)}-h^+(\theta,w)\right|d\theta\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln^+|w+a|}{\lambda(r)}-h^+(\theta,w)\right|d\theta+ \qquad /3/$$

$$+\frac{1}{\lambda(r)}\int_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{|w+a|}\,d\theta. \qquad /3/$$

Якщо число $-a$ – не валіронівське виняткове значення функції w, то за його означенням $m(r,-a,w)/T(r,w)\to 0$ при $r\to\infty$ /користуємось загальноприйнятими позначеннями [3] неванліннівської теорії розподілу значень/. Оскільки $w\in\Lambda^0$, то і $m(r,-a,w)/\lambda(r)\to 0$ при $r\to\infty$. Отже, другий доданок у правому боці нерівності /3/ прямує до нуля при $r\to\infty$.

Оскільки $w\in\Lambda^0$, то [7]

$$\frac{\ln|w(z)|}{\lambda(r)}\to h(\theta,w),\quad re^{i\theta}=z\to\infty,$$

зовні деякої C_0^0 – множини [I]. Звідси та з нерівності $|\ln^+|w+a|-\ln^+|w||\leq \ln^+|a|+\ln 2$ випливає, що

$$\frac{\ln^+|w+a|}{\lambda(r)}\to h^+(\theta,w),\quad re^{i\theta}=z\to\infty \qquad /4/$$

зовні тієї ж C_0^0 – множини.

Нехай $C_r=\{\theta: re^{i\theta}\in C_0^0\cap\{z:|z|=r\}\}$. Використовуючи теорему 7.3 з праці [3, с. 58], одержуємо

$$\int_{C_r}\left|\frac{\ln^+|w(re^{i\theta})+a|}{\lambda(r)}-h^+(\theta,w)\right|d\theta\leq$$

$$\leq C(d,\operatorname{mes}C_r)\frac{T(dr,w)}{\lambda(r)}+\max_\theta h^+(\theta,w)\operatorname{mes}C_r,$$

де $d>1$, $0<C(d,\operatorname{mes}C_r)\to 0$ при $\operatorname{mes}C_r\to 0$. Звідси з означення C_0^0 – множини та з /4/ випливає, що і перший доданок в правому боці нерівності /3/ прямує до нуля при $r\to\infty$. Таким чином, справедливе співвідношення /2/, і перше твердження теореми доведено.

Зі співвідношення /2/ випливає [7], що $h(\theta,w+a)=h^+(\theta,w)$. Звідси, враховуючи співвідношення /I/ і рівність $h(\theta,w)=h(\theta,f)-h(\theta,g)$, одержуємо друге твердження теореми.

Множина валіронівських винятковмх значень мероморфної функції має логарифмічну ємність нуль [9, с.280]. Більш тонкий результат належить Хіллентрену [II].

Означення [3,II]. Множина $E \subset \mathbb{C}$ називається H-множиною, якщо вона є не більш ніж злічечним об"єднанням множин G, кожна з яких має наступну властивість (H) : існують $\gamma > 0$ і нескінченна послідовність $\{a_n\}$ комплексних чисел такі, що кожен елемент $a \in G$ задовольняє нерівність $|a-a_n|< exp\{-exp \gamma n\}$ для безмежної множини значень n.

Зауважимо, що h -міра Хаусдорфа [I0, с.238] H -множини дорівнює нулеві [II] для довільної функції h, яка задовольняє умову

$$\int\limits_0 h(t) t^{-1} (-\ln t)^{-1} dt < \infty .$$

Відомо [II], що множина скінченних валіронівських виняткових значень довільної мероморфної функції скінченного порядку є H -множиною. Враховуючи цей факт і використовуючи доведену вище теорему, одержуємо наступний результат.

Наслідок. Нехай $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Lambda^0$. Існує H-множина $E = E(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ така, що для довільної раціональної функції R від n змінних, коефіцієнти якої не належать до E, виконується $R(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \Lambda^0$.

При $\lambda(r) = r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ - уточнений порядок [2, 8] одержано наступний результат. Якщо H -множина E є об"єднанням скінченного числа множин з властивістю (H) або об"єднанням нескінченної кількості замкнених множин з властивістю (H), то існують такі цілі функції $f, g \in \Lambda_0$, коли $f + ag \notin \Lambda^0$ при $-a \in E$.

У зв"язку з теоремою, доведеною в цій статті, виникає питання /яке поставлене О.Е.Еременком/: чи справедливе $f + ag \in \Lambda^0$ при $f, g \in \Lambda^0$, коли дефект в сенсі Неванлінни $\delta(-a, f/g)$ збігається з відмінним від нуля дефектом у сенсі Валірона $\Delta(-a, f/g)$?

Відповідь на нього дає наступний контрприклад, запропонований А.А.Гольдбергом.

Приклад. Нехай $f_1 \in \Lambda^\circ$, функція $\lambda(r)$ опукла відносно $\ln r$, f_1 ціла, $h(\theta, f_1) = 2$ для всіх $\theta \in R$. Згідно з працею [5], така функція існує. Візьмемо також цілу функцію $f_2 \notin \Lambda^\circ$ таку, що $\max\{\ln|f_2(z)| : |z| = r\} \leq \lambda(r)$ і

$$N(r, \frac{1}{f_2}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f_2(re^{i\theta})|d\theta = b\lambda(r) + o(\lambda(r)),\ r \to \infty$$

при деякому b, $0 \leq b \leq 1$. Зауважимо, що при $\lambda(r) = r^n$, $n \in N$, можна взяти $b = 0$.

Вважаємо без втрати загальності, що f_1 і f_2 не мають спільних нулів. Тоді за формулою Картана

$$T(r, \frac{f_2}{f_1}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max\{\ln|f_1(re^{i\theta})|, \ln|f_2(re^{i\theta})|\}d\theta + const.$$

Використовуючи згадані вище асимптотичне поводження $\ln|f_1|$ зовні деякої C_0° - множини і теорему 7.3 з [3, с.58], одержуємо

$$T(r, \frac{f_2}{f_1}) = (2 + o(1))\lambda(r),\ r \to \infty.$$

З аналогічних міркувань

$$m(r, \frac{f_1}{f_2}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|\frac{f_1(re^{i\theta})}{f_2(re^{i\theta})}\right|d\theta = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} \ln|f_1| - \right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi} \ln|f_2|d\theta\right\} + o(\lambda(r)) = (2 - b + o(1))\lambda(r),\ r \to \infty.$$

Таким чином, $\delta(0, f_2/f_1) = \Delta(0, f_2/f_1) = \frac{2-b}{2}$. Приймемо $f = f_1 + f_2$, $g = f_1$, $a = -1$. Оскільки $\ln|f_1 + f_2| = \ln|f_1| + \ln|1 + f_2/f_1|$ і $|\ln|1 + f_2/f_1|| < \ln 2$ зовні деякої C_0° -множини, то [7] $f \in \Lambda^\circ$. Крім того, $f/g - 1 = f_2/f_1$, тому $\delta(1, f/g) = \Delta(1, f/g) = \delta(0, f_2/f_1)$. Однак $ag + f \notin \Lambda^\circ$.

Список літератури: 1. Азарин В.С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка. - Мат. сб., 1979, т.108, № 2. 2. Гольдберг А.А., Єременко О.Е., О с т р о в с ь к и й Й.В. Про суму цілих функцій цілком регулярного зростання. – ДАН УРСР, сер. А, 1982, № 2. 3. Г о л ь д б е р г А.А., О с т р о в с к и й И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. 4. Г о л ь д б е р г А.А., О с т р о в с ь к и й Й.В. Про зростання цілих ермітово-позитивних функцій скінченного порядку. – ДАН УРСР, сер. А, 1981, № 4. 5. К о н д р а т ю к А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. – Мат. сб., 1978, т. 106, № 3. 6. К о н д р а т ю к А.А. Применение теоремы о компактности семейств субгармонических функций к мероморфным. – Усп. мат. наук, 1982, вып. 4 /226/. 7. К о н д р а т ю к А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. II. – Мат. сб., 1980, т.113, № 1. 8. Л е в и н Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. 9. Н е в а н л и н н а Р. Однозначные аналитические функции. – М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 10. Х е й м а н У., К е н н е д и П. Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. 11. Hyllengren A. Valiron deficient values for meromorphic functions in the plane – Acta math., 1970, v. 124.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.82

УДК 539.3

Р.М.Бурда, Д.Г.Хлебніков

ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЛЯ ГЕРМЕТИЗАЦІЇ ДЛЯ УЩІЛЬНЮЮЧОГО ЕЛЕМЕНТА У ВИГЛЯДІ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ СЕРЕДНЬОЇ ТОВЩИНИ

Розглянемо ущільнююче з"єднання, що складається з ущільнюючого клапана, який моделюється круглою пластинкою середньої товщини, і жорсткої опори /рис. 1/. Внаслідок недосконалого виготовлення та інших випадкових факторів між клапаном і сідлом /опорою/ є щілини. Для їх усунення і забезпечення герметичності з"єднання клапан притискається до опори деяким зусиллям. Те мінімальне зусилля, яке забезпечує повний контакт пластини з опорою, вважатимемо зусиллям герметизації.