Звідси на основі /8/-/10/ знаходимо зусилля герметизації

$$P = \pi b^2 p + \frac{8\pi n D d}{b^2 S}, \qquad /14/$$

де
$$S = A_n\left(\frac{b}{R}\right)^{n} + B_n\left(\frac{b}{R}\right)^{-n} + C_n\left(\frac{b}{R}\right)^{n+2} + D_n\left(\frac{b}{R}\right)^{-n+2},$$

а сталі A_n, B_n, C_n, D_n визначено формулами /11/, /12/.

Одержані результати легко перенести на випадок, коли функція f, яка визначає відхилення опори від плоскої форми, зображена рядом Фур"є загального вигляду.

На рис. 2 показана залежність величини $\frac{P}{Ehd}$ від відношення h/R, при $p=0;\ \nu=0,3;\ b/R=0,95$. Криві 1-3 відповідають випадкам $n=2,3,4$.

Список літератури: 1. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. - М.; Л., Гостехиздат, 1950. 2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966.

Стаття надійшла до редколегії 05.04.82

УДК 539.377

В.З.Дідик, Б.М.Кордуба

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У НАПІВБЕЗМЕЖНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ ПРИ КУСКОВО-СТАЛОМУ КОЕФІЦІЄНТІ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Розглянемо вільно оперту та теплоізольовану по краю $\alpha=0$ циліндричну оболонку, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла потужністю $q_0 = const$ або зовнішнім середовищем температури $t_0 = const$, які діють на відстані d від її краю відповідно по областях $d \le \alpha \le c,\ |\gamma| \le \delta$ і $d \le \alpha \le c,\ \gamma = \pm\delta$. Через поверхні $\gamma = \pm\delta$ оболонки здійснюється конвективний теплообмін зі зовнішнім середовищем нульової температури при нагріванні внутрішніми джерелами тепла і температури $t_c = t_0 N(\alpha)$ при нагріванні зовнішнім середовищем. Тут $c=d+2b$, $N(\alpha)=S_-(\alpha-d)-S_+(\alpha-c)$, $S_\pm(\xi)$ – асиметричні одиничні функції.

Усталене температурне поле в оболонці знаходимо з рівняння теплопровідності [1] при граничних умовах

$$\frac{dT}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}=0; \qquad T\Big|_{\alpha\to\infty}=0. \qquad /1/$$

Температурне поле в цій оболонці має вигляд

$$\begin{aligned}T=\frac{q}{\lambda k_0^2}\Big\{&\Big(ch2k_0b+\frac{k_0}{k_1}sh2k_0b-1\Big)ch k_1\alpha\,[1-S_-(\alpha-d)]+\\&+\Big[sh2k_0b\Big(\frac{k_1}{k_0}sh k_1d+\frac{k_0}{k_1}ch k_1d\Big)+e^{k_1d}ch2k_0b-\\&-ch k_1d\,ch k_0(\alpha-d)-\frac{k_1}{k_0}sh k_1d\,(sh k_0(\alpha-d)-sh k_0(\alpha-c))-\\&-sh k_1d\,ch k_0(\alpha-c)\Big]N(\alpha)+\Big[ch2k_0b(ch2k_0b-1)(ch k_1(\alpha-b)-\\&-e^{k_1d}ch k_1(\alpha-c))+sh2k_0b\,(sh k_1d\,sh2k_0b+\\&+\frac{k_0}{k_1}ch k_1d)\,e^{-k_1(\alpha-c)}\Big]S_+(\alpha-c)\Big\}\times\\&\times\Big[sh2k_0b\Big(\frac{k_1}{k_0}sh k_1d+\frac{k_0}{k_1}sh k_1d\Big)+e^{k_1d}ch2k_0b\Big]^{-1}, \qquad /2/\end{aligned}$$

де $q=q_0$ при нагріванні внутрішніми джерелами тепла; $q=t_0\alpha_0/\delta$ при нагріванні зовнішнім середовищем; $k_i^2=\alpha_i/\lambda\delta$ $(i=0,1)$; $\lambda, \alpha_0, \alpha_1$ – відповідно коефіцієнти теплопровідності, тепловіддачі з поверхонь області нагрівання та за її межами.

Температурні напруження в оболонці знаходимо за відомими формулам [2].

Задовільняючи граничні умови

$$\{W, N_1, M_1\}\Big|_{\alpha=0}=0; \quad \{N_1, N_2, M_1\}\Big|_{\alpha\to\infty}=0, \qquad /3/$$

одержуємо компоненту вектора переміщень

$$W = Q\Big\{f(\alpha)(\sin n\alpha + \cos n\alpha) - f_1(\alpha)\sin n\alpha + \frac{1}{4n^4+k_1^4}\Big[4n^2 f_2(\alpha) + m_1\Big(k_1 sh(k_1 d)p_1^- + ch(k_1 d)\frac{\partial p_1^-}{\partial \xi}\Big)\Big|_{\xi=d} - m_2\Big(k_1 p_1^+ - \frac{\partial p_1^+}{\partial \xi}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big] +$$

$$+ \frac{1}{4n^4+k_0^4}\Big[mn^{-2}(4n^4+k_0^4)N(\alpha) - 4n^2 f_3(\alpha) - \Big(m_3 p_0^- - m_4\frac{\partial p_0^-}{\partial \xi}\Big)\Big|_{\xi=d} + \Big(k_1 m_2 p_0^+ - m_5\frac{\partial p_0^+}{\partial \xi}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big] + f_4(\alpha) - \varphi(\alpha)\Big\}, \qquad /4/$$

де

$$f(\alpha) = \frac{1}{4n^4+k_1^4}\Big\{m_1\Big[4n^2(S_-(-d)-1)e^{-n\alpha} - \Big(k_1 sh(k_1 d)q_1^- + ch(k_1 d)\,sign_-(-d)\frac{\partial q_1^-}{\partial \xi}\Big)\Big|_{\xi=d}\Big] + m_2\Big(k_1 q_1^- + \frac{\partial q_1^-}{\partial \xi}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big\} + \frac{1}{4n^4+k_0^4}\times$$

$$\times\Big\{4n^2\Big[ch\,k_1 d\; ch\,k_0 d + sh\,k_1 d\; ch\,k_0 c + \frac{k_1}{k_0} sh\,k_1 d\,(sh\,k_0 c - sh\,k_0 d)\Big]\times$$

$$\times S_-(-d)e^{-n\alpha} + \Big(m_3 q_0^- - m_4\,sign_-(-d)\frac{\partial q_0^-}{\partial \xi}\Big)\Big|_{\xi=d} - \Big(k_1 m_2 q_0^- + m_5\frac{\partial q_0^-}{\partial \xi}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big\} +$$

$$+ \frac{m}{2n^2}\Big[\cos(nd)\,sign_-(-d)e^{-n(\alpha+d)} - 2S_-(-d)e^{-n\alpha} + \cos(nc)e^{-n(\alpha+c)}\Big];$$

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{n(4n^4+k_1^4)}\Big\{m_1\Big(k_1 sh(k_1 d)\,sign_-(-d)\frac{\partial q_1^-}{\partial \xi} + ch(k_1 d)\frac{\partial^2 q_1^-}{\partial \xi^2}\Big)\Big|_{\xi=d} +$$

$$+ m_2\Big(k_1\frac{\partial q_1^-}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 q_1^-}{\partial \xi^2}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big\} + \frac{1}{4n^4+k_0^4}\Big\{4n\Big[k_1 sh\,k_1 d\,(ch\,k_0 c -$$

$$- ch\,k_0 d) + k_0(ch\,k_1 d\; sh\,k_0 d + sh\,k_1 d\; sh\,k_0 c)\Big]S_-(-d)e^{-n\alpha} -$$

$$-\frac{1}{n}\Big[\Big(m_3\,sign_-(-d)\frac{\partial q_0^-}{\partial \xi} - m_4\frac{\partial^2 q_0^-}{\partial \xi^2}\Big)\Big|_{\xi=d} - \Big(k_1 m_2\frac{\partial q_0^-}{\partial \xi} + m_5\frac{\partial^2 q_0^-}{\partial \xi^2}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big]\Big\} +$$

$$+ \frac{m}{2n^2}\Big[(\sin nd + \cos nd)e^{-n(\alpha+d)} - (\sin nc + \cos nc)e^{-n(\alpha+c)}\Big].$$

$$f_2(\alpha) = m_1\big[1 - S_-(\alpha-d)\big]ch\,k_1\alpha + \big[m_6\,ch\,k_1(\alpha-2b) - m_7\,sh\,k_1(\alpha-c) +$$

$$- m_8\,ch\,k_1(\alpha-c)\big]S_+(\alpha-c);$$

$$f_3(\alpha)=\{ch\,k_1d\,ch\,k_0(\alpha-d)+sh\,k_1d\;ch\,k_0(\alpha-c)+$$

$$+\frac{k_1}{k_0}sh\,k_1d[sh\,k_0(\alpha-d)-sh\,k_0(\alpha-c)]\}\,N(\alpha);$$

$$f_4(\alpha)=\frac{m}{2n^2}[\cos n|\alpha-c|_+e^{-n|\alpha-c|_+}sign_+(\alpha-c)-\cos n|\alpha-d|_-\times$$

$$\times e^{-n|\alpha-d|_-}sign_-(\alpha-d)];\quad \varphi(\alpha)=f(\alpha)-f_1(\alpha)-f_5(\alpha);$$

$$f_5(\alpha)=\frac{1}{4n^4+k_1^4}\{m_1[2k_1^2(1-S_-(-d))e^{-n\alpha}-(k_1sh(k_1d)q_1^++$$

$$+ch(k_1d)\;sign_-(-d)\frac{\partial q_1^+}{\partial\xi})\Big|_{\xi=d}+m_2(k_1q_1^++\frac{\partial q_1^+}{\partial\xi})\Big|_{\xi=c}\}+$$

$$+\frac{1}{4n^4+k_0^4}\{2k_0\;[k_1sh\,k_1d(sh\,k_0d-sh\,k_0c)-$$

$$-k_0(ch\,k_1d\,ch\,k_0d+sh\,k_1d\,sh\,k_0c)]\;S_-(-d)e^{-n\alpha}+$$

$$+(m_3q_0^+-m_4\,sign_-(-d)\frac{\partial q_0^+}{\partial\xi})\Big|_{\xi=d}-(k_1m_2q_0^++$$

$$+m_5\frac{\partial q_0^+}{\partial\xi})\Big|_{\xi=c}\}-\frac{m}{2n^2}[\sin(nd)\,sign_-(-d)\,e^{-n(\alpha+d)}+$$

$$+\sin(nc)\,e^{-n(\alpha+c)}];$$

$$q_i^{\mp}=\frac{1}{2n}[(2n^2\pm k_i^2)\sin n\xi\mp(2n^2\mp k_i^2)\cos n\xi]\,e^{-n(\alpha+\xi)};$$

$$P_i^{\pm}=\frac{1}{2n}[(2n^2+k_i^2)\sin n|\alpha-\xi|_\pm-(2n^2-k_i^2)\cos n|\alpha-\xi|_\pm e^{-n|\alpha-\xi|_\pm};$$

$$(i=0,1);$$

$$m=\left(\frac{k_1}{k_0}\,sh\,k_1 d+\frac{k_0}{k_1}\,ch\,k_1 d\right)sh\,2k_0 b+(sh\,k_1 d+ch\,k_1 d)\,ch\,2k_0 b;$$

$$m_1=ch\,2k_0 b+\frac{k_0}{k_1}\,sh\,2k_0 b-1;\quad m_2=sh\,k_1 d\,(1-ch\,2k_0 b)-$$

$$-\frac{k_0}{k_1}\,ch\,k_1 d\,sh\,2k_0 b;\quad m_3=sh\,k_1 d\,[k_1(ch\,2k_0 b-1)+k_0\,sh\,2k_0 b];$$

$$m_4=sh\,k_1 d\left(\frac{k_1}{k_0}\,sh\,2k_0 b+ch\,2k_0 b\right)+ch\,k_1 d;\quad m_5=\left(1+\frac{k_1}{k_0}\,sh\,2k_0 b\right)\times$$

$$\times\,sh\,k_1 d+ch\,k_1 d\,ch\,2k_0 b;\quad m_6=ch\,2k_0 b\,(ch\,2k_0 b-1);$$

$$m_7=\left(sh\,k_1 d\,sh\,2k_0 b+\frac{k_0}{k_1}\,ch\,k_1 d\right)sh\,2k_0 b;\quad m_8=m_7-$$

$$-(sh\,k_1 d+ch\,k_1 d)\,m_6;\quad Q=\frac{\alpha_t\,q n^2 R}{\lambda m R_0^2};\quad n^2=\sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{4\delta^2 R^2}};$$

$$|\xi|_{\pm}=\xi\,sign_{\pm}\,\xi;\qquad sign_{\pm}\,\xi=2S_{\pm}(\xi)-1;$$

R – радіус середньої поверхні циліндричної оболонки; ν – коефіцієнт Пуассона.

Температурні напруження, викликані температурним полем /1/, для цієї оболонки мають вигляд

$$\sigma_{\alpha\alpha}=Q_1\Big\{f(\alpha)(\cos n\alpha-\sin n\alpha)-f_1(\alpha)\cos n\alpha-\frac{1}{4n^4+k_1^4}\,\times$$

$$\times\Big[2k_1^2 f_2(\alpha)-m_1\Big(k_1\,sh(k_1 d)\,\tilde{P}_1^-+ch(k_1 d)\frac{\partial\tilde{P}_1^-}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=d}+$$

$$+m_2\Big(k_1\tilde{P}_1^+-\frac{\partial\tilde{P}_1^+}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big]+\frac{1}{4n^4+k_0^4}\,\Big[2k_0^2 f_3(\alpha)-$$

$$-\Big(m_3\tilde{P}_0^- - m_4\frac{\partial\tilde{P}_0^-}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=d}+\Big(k_1 m_2\tilde{P}_0^+ - m_6\frac{\partial\tilde{P}_0^+}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big]-$$

$$-f_6(\alpha)-\varphi(\alpha)\Big\};$$

$$\sigma_{\beta\beta} = Q_2 \Big\{ f(\alpha)(\sin n\alpha + \cos n\alpha) - f_1(\alpha)\sin n\alpha -$$

$$- \frac{1}{4n^4 + k_1^4} \Big[k_1^4 n^{-2} f_2(\alpha) - m_1 \Big(k_1 \operatorname{sh}(k_1 d)\rho_1^- + \operatorname{ch}(k_1 d)\frac{\partial \rho_1^-}{\partial \xi} \Big)\Big|_{\xi = d} +$$

$$+ m_2 \Big(k_1 \rho_1^+ - \frac{\partial \rho_1^+}{\partial \xi} \Big)\Big|_{\xi = c} \Big] + \frac{1}{4n^4 + k_0^4} \Big[k_0^4 n^{-2} f_3(\alpha) -$$

$$- \Big(m_3 \rho_0^- - m_4 \frac{\partial \rho_2^-}{\partial \xi} \Big)\Big|_{\xi = d} + \Big(k_1 m_2 \rho_0^+ - m_5 \frac{\partial \rho_0^+}{\partial \xi} \Big)\Big|_{\xi = c} \Big] +$$

$$+ f_4(\alpha) - \varphi(\alpha) \Big\} + \nu \big[\sigma_{\alpha\alpha} + Q_1 \psi(\alpha) \big],$$

де $$\tilde{\rho}_i^{\pm} = \frac{1}{2n} \Big[(2n^2 - k_i^2) \sin n|\alpha - \xi|_{\pm} + (2n^2 + k_i^2) \times$$

$$\times \cos n|\alpha - \xi|_{\pm} \, e^{-n|\alpha - \xi|_{\pm}} \qquad (i = 0, 1);$$

$$f_6(\alpha) = \frac{m}{2n^2} \Big[\sin n|\alpha - c|_+ \, e^{-n|\alpha - c|_+} \operatorname{sign}_+(\alpha - c) -$$

$$- \sin n|\alpha - d|_- \, e^{-n|\alpha - d|_-} \operatorname{sign}_-(\alpha - d) \Big];$$

$$Q_1 = \frac{2QEn^2\gamma}{1 - \nu^2}; \quad Q_2 = \frac{QE}{R}; \quad E$$ – модуль Юнга.

Список літератури: 1. К о л я н о Ю.М., Д и д ы к В.З. Установившиеся напряжения в бесконечной цилиндрической оболочке с теплообменом, обусловленные локальным нагревом. – Математические методы и физико-механические поля, 1978, вып. 8. 2. П і д с т р и г а ч Я.С., Я р е м а С.Я. Температурні напруження в оболонках. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.82