УДК 512.512

М.Я.Комарницький, О.Д.Артемович

ПРО ІДЕАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ КІЛЬЦЯ

Всі розглядувані кільця вважатимемо асоціативними, а всі модулі – лівими та унітарними. Через σ позначатимемо кільцевий ендоморфізм кільця R. Нагадаємо, що відображення $d: R \to R$ називається σ-диференціюванням кільця R, якщо для довільних $a, b \in R$

$$d(a+b) = da + db,$$
$$d(ab) = da \cdot b + \sigma(a)\, db.$$

Через Δ позначимо множину всіх σ-диференціювань, заданих на R, причому σ пробігає півгрупу всіх кільцевих ендоморфізмів кільця R. Якщо в кільці R виділена деяка множина Ω σ-диференціювань, то кільце R називатимемо Ω-диференціальним. Елемент c Ω-диференціального кільця R назвемо Ω-константою, якщо для кожного $d \in \Omega$ $dc = 0$. Абсолютними константами кільця R називатимемо Δ-константи. Очевидно, множина всіх Ω-констант диференціального кільця є підкільцем C_0 кільця R, а множина всіх абсолютних констант – підкільцем C, котре називатимемо підкільцем абсолютних констант. Ясно, що $C \subseteq C_0$.

Лівий /правий, двосторонній/ ідеал J Ω-диференціального кільця R називається Ω-диференціальним лівим /правим, двостороннім/ ідеалом, якщо для кожного елемента $a \in J$ і кожного σ-диференціювання $d \in \Omega$ елемент da належить до J.

Введемо поняття Ω-ідеально-диференціального кільця.

Ω-диференціальне кільце називаємо лівим Ω-ідеально-диференціальним кільцем /скорочено лівим Ω-ID-кільцем/, коли кожний лівий ідеал кільця R є Ω-диференціальним. Якщо $\Omega = \Delta$, то букву Ω у записі опускаємо.

Поняття ID-кільця у деякому сенсі дуальне поняттю диференціально простого кільця *.

---

* Posner E.C. Differentiably simple rings. - Proc. Amer. Math. Soc., 11, 3(1960), 337-343

Має місце очевидна теорема.

Теорема I. Нехай R - Ω - диференціальне кільце. Тоді наступні умови еквівалентні:

1/ кільце R - ліве Ω - ID - кільце;

2/ кожний головний лівий ідеал - Ω - диференціальний.

Нехай $d: R \to R$ - деяке σ - диференціювання кільця R. Відображення δ лівого R -модуля $\mathcal{M}$ в себе називають (σ, d) - диференціюванням, якщо для кожних $a \in R, m, n, k \in \mathcal{M}$ наявні рівності:

1/ $\delta(m+n) = \delta m + \delta n;$

2/ $\delta(ak) = da \cdot k + \sigma(a)\delta k.$

Припустимо, що для кожного σ -диференціювання $d \in \Omega$ задане (σ, d) - диференціювання δ лівого R -модуля $\mathcal{M}$, множину яких позначимо через Ω^*. Тоді модуль $\mathcal{M}$ називають Ω^* - диференціальним модулем.

Лема I. Нехай $\sigma \in End\, R$. Тоді для кожного $x \in R$ відображення $\partial_x : R \to R$, задане за правилом $\partial_x(a) = \sigma(a)x - xa$, є σ - диференціюванням кільця R. Крім того, $\sigma - I$, де I - тотожній ендоморфізм кільця R, також є σ -диференціювання.

Доведення проводять безпосередньою перевіркою властивостей диференціювань.

Відображення $\partial_x : R \to R$, задане за правилом $\partial_x(a) = \sigma(a)x - xa$ для кожного $a \in R$, називаємо σ - внутрішнім диференціюванням кільця R. Якщо $\sigma = I$ - тотожній ендоморфізм, то таке диференціювання називаємо внутрішнім.

Відображення τ модуля $\mathcal{M}$ в себе називаємо σ - ендоморфізмом, якщо для кожних $m, n, k \in \mathcal{M}$ і будь-якого $\lambda \in R$ мають місце рівності

$$\tau(m+n) = \tau(m) + \tau(n);$$

$$\tau(\lambda k) = \sigma(\lambda)\tau(k).$$

Л е м а 2. Нехай R – кільце, σ – його кільцевий ендоморфізм і $\mathcal{M}$ – лівий R-модуль. Тоді для кожного σ-ендоморфізму τ модуля $\mathcal{M}$ відображення $d:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$, визначене за правилом

$$d(m)=\tau(m)-m,$$

є (σ,δ) – диференціюванням, де δ – диференціювання $\sigma-I$.

Доведення проводять безпосередньою перевіркою.

Л е м а 3. Нехай J – інваріантний відносно ендоморфізму $\sigma\in End\,R$ ідемпотентний двосторонній ідеал кільця R. Тоді для кожного σ – диференціювання d кільця R $d(J)\subseteq J$, тобто J – d-диференціальний ідеал кільця R.

Доведення випливає з того факту, що кожний елемент ідеала J зображається у вигляді суми добутків елементів із J.

Л е м а 4. Головний лівий ідеал Ra кільця R є σ-$Inn(R)$- диференціальним тоді і лише тоді, коли $Ra\supseteq\sigma(a)R$.

Д о в е д е н н я. Лівий ідеал Ra σ-$Inn(R)$ – диференціальний тоді і лише тоді, коли для кожного σ-внутрішнього диференціювання ∂_x $\partial_x(a)\in Ra$. Це рівнозначне тому, що для кожного елемента $x\in R$ $\sigma(a)x-xa\in Ra$, яке має місце тоді і лише тоді, коли $\sigma(a)x\in Ra$. Лема доведена.

Т е о р е м а 2. Кільце R є лівим $Inn(R)$-ID – кільцем тоді і лише тоді, коли воно ліве дуо-кільце.

Д о в е д е н н я. У лемі 4 досить прийняти $\sigma=I$, де I – тотожній ендоморфізм кільця R.

Л е м а 5. Нехай $\sigma\in End\,R$ і J – лівий ідеал кільця R. Тоді для σ – диференціювання $d=\sigma-I$ $d(J)\subseteq J$ тоді і лише тоді, коли I – σ – інваріантний.

Д о в е д е н н я. Справді, $d(J)\subseteq J$ тоді і лише тоді, коли $\sigma(a)-a\in J$ для кожного $a\in J$, а це рівнозначне тому, що $\sigma(a)\in J$, тобто $\sigma(J)\subseteq J$. Лема доведена.

Н а с л і д о к I. Усі ліві ідеали лівого ID-кільця R є інваріантними відносно всіх кільцевих ендоморфізмів кільця R.

Т е о р е м а 3. Регулярне у сенсі Неймана кільце ідеально-диференціальне тоді і тільки тоді, коли воно строго регулярне.

Доведення безпосередньо випливає з леми 2 тому, що в строго регулярному кільці кожний лівий ідеал двосторонній та ідемпотентний.

Наведемо приклад правого ID-кільця, котре не є лівим ID-кільцем.

Розглянемо Q-алгебру A рангу 3, елементи бази якої задовольняють співвідношення:

$$e_1^2 = e_1, \quad e_1 e_2 = 0, \quad e_1 u = u,$$
$$e_2 e_1 = 0, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_2 u = 0,$$
$$u e_1 = 0, \quad u e_2 = u, \quad u^2 = 0.$$

Безпосередніми обчисленнями встановлюємо, що будь-яке диференціювання алгебри A можна отримати за допомогою співвідношень

$$e_1' = au, \quad e_2' = bu, \quad u' = cu,$$

при деяких $a, b, c \in Q$, $a = -b$.

Всі, крім (u), ідеали в A ідемпотентні, але ліві ідеали (e_1), (e_2) не будуть $Inn(A)$ - диференціальними ідеалами. Тому A не можна назвати лівою ID - алгеброю. Зауважимо, що в A всі праві ідеали двосторонні і Δ - диференціальні. Отже, A - права ID - алгебра.

Надалі вивчатимемо кільця, в яких не існує нетривіальних диференціювань.

Назвемо кільце абсолютно диференціально-тривіальним, якщо в ньому не можна задати нетривіальних $\mathfrak{G}$-диференціювань, і диференціально-тривіальним, якщо на ньому не можна задати нетривіальних звичайних диференціювань.

Очевидно, клас абсолютно диференціально-тривіальних кілець міститься головним чином у класі диференціально-тривіальних кілець і, отже, у класі ID-кілець. Зауважимо, що кожне абсолютно диференціально-тривіальне і кожне диференціально-тривіальне кільце комутативне. Крім цього, абсолютно диференціально-тривіальне кільце не має нетривіальних кільцевих ендоморфізмів. Зокрема, абсолютно диференціально-тривіальне кільце є нерозкладним.

Т е о р е м а 4. Нехай R – абсолютно диференціально-тривіальне кільце простої характеристики p. Тоді R ізоморфне полю із p елементів.

Д о в е д е н н я. Відображення $\sigma: R \to R$, визначене за правилом $a \longmapsto a^p$, є ендоморфізмом кільця R. Оскільки, як зазначено вище, R не володіє нетривіальними кільцевими ендоморфізмами і тому $\sigma(a)=a$, тобто $a^p=a$ для кожного $a \in R$. Тепер елемент a^{p-1} ідемпотент, оскільки $(a^{p-1})^2 = a \cdot a^{p-2} = a^{p-1}$. Якщо б $a^{p-1} \neq 1$, то наше кільце було б розкладне і мало нетривіальні ендоморфізми.

Наступна теорема показує, що обмеження, зв"язані з ендоморфізмами, суттєві.

Т е о р е м а 5. Кожне кільце характеристики n, що задовольняє поліноміальній тотожності $x^n - x = 0$, є диференціально-тривіальним.

Н а с л і д о к 2. Кожне булеве кільце диференціально-тривіальне.

Надалі множину всіх можливих I – диференціювань кільця R позначатимемо через $Der\, R$.

Т е о р е м а 6. Для комутативної області цілісності R характеристики нуль наступні твердження еквівалентні:

1/ R не диференціально-тривіальне /тобто $Der\, R \neq 0$/;

2/ розширення $R \supset C$, де C – підкільце $(Der\, R)$ – констант, не алгебраїчне.

Д о в е д е н н я. /1/$\Rightarrow$/2/. Нехай $Der\, R \neq 0$, але розширення $R \supset C$ є алгебраїчним. Тоді для кожного $z \in R$ існує

$f(x) \in C[x]$, такий, що $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$, причому $a_n \neq 0$ і n – найменше серед можливих. Оскільки $Der\, R \neq 0$, то існує $d \in Der\, R$ і $y \in R$ такі, що $dy \neq 0$. Тоді $(na_n y^{n-1} + \ldots + a_1)\, dy = 0$, звідки отримуємо $na_n y^{n-1} + \ldots + 2a_2 y + a_1 = 0$, причому $na_n \neq 0$, оскільки $Char\, R = 0$. Але це суперечить мінімальності n. Отже, y трансцендентний над C, і, таким чином, розширення $R \supset C$ не є алгебраїчним.

/2/ $\Rightarrow$ /1/. Якщо розширення $R \supset C$ не алгебраїчне, тоді існує елемент $y \in R$ трансцендентний над C, але із умови $dy = 0$ для всіх диференціювань $d \in Der\, R$ випливає, що $y \in C$. Отже, для деякого диференціювання $d \in Der\, R$ $dy \neq 0$, тобто $Der\, R \neq 0$. Теорема доведена.

Н а с л і д о к 3. Нехай R – комутативна область цілісності характеристики нуль і y – деякий елемент кільця. Тоді наступні твердження еквівалентні:

1/ $dy \neq 0$ при деякому диференціюванні $d \in Der\, R$ кільця R.

2/ Елемент у трансцендентний над підкільцем $(Der R)$- констант C кільця R. Якщо ці умови виконуються, тоді y трансцендентний над простим підкільцем P кільця R.

Стаття надійшла до редколегії 22.02.82