УДК 531.8

С.В.Дениско

ПРО ДЕЯКІ ВІДТВОРЕННЯ ПАР ПЛОСКИХ КРИВИХ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕХАНІЗМІВ

Нехай між точками двох кривих встановлена відповідність так, що відношення довжин відповідних дуг величина стала. Таку відповідність називатимемо відповідністю S .

Нехай криві (Δ) , (Δ^*) , що розміщені у площинах /на положення цих площин у просторі ніяких обмежень не накладається/, визначаються рівняннями

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \rho^* = \rho^*(k\varphi),$$

де $k = const$; φ і $k\varphi$ - полярні кути; ρ , ρ^* - полярні радіуси. Відповідність між точками цих кривих, для якої відповідні точки мають одне і те ж значення φ , називаємо відповідністю T .

Очевидно, для того щоб відповідність T була також відповідністю S , необхідно і достатньо

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2 = m^2\left[\left(\frac{d\rho^*}{d\varphi}\right)^2 + k^2\rho^{*2}\right], \qquad /1/$$

де m - додатна стала.

Т е о р е м а 1. Нехай криві $(\Delta), (\Delta^*)$ - супутниці циссоїд Діоклеса, а полярні рівняння кривих $(\Delta), (\Delta^*)$ мають відповідно вигляд

$$\rho = a\frac{1+\cos^2\varphi}{\cos\varphi}, \quad \rho^* = a^*\frac{1+\cos^2 k\varphi}{\cos k\varphi}. \qquad /2/$$

де a, a^* - додатні сталі. Тоді відповідність T між точками кривих (Δ) , (Δ^*) буде відповідністю S в тому і тільки тому випадку, коли

$$k = \pm 1, \quad a = ma^*.$$

Доведення. З огляду на /2/ умову /1/ запишемо таким чином

$$a^2(\cos^4\varphi+1+2\cos 2\varphi\cos^2\varphi)\cos^4 k\varphi =$$
$$= m^2 a^{*2} k^2(\cos^4 k\varphi+1+2\cos 2k\varphi\cos^2 k\varphi)\cos^4\varphi. \qquad /3/$$

Розклавши в ряд ліву і праву частину цієї рівності, матимемо

$$a^2\left[4-8(k^2+1)\varphi^2+\left(\frac{23}{3}+16k^2+\frac{20}{3}k^4\right)\varphi^4+\ldots\right]=$$
$$=m^2a^{*2}k^2\left[4-8(k^2+1)\varphi^2+\left(\frac{23}{3}k^4+16k^2+\frac{20}{3}\right)\varphi^4+\ldots\right].$$

Звідси знаходимо

$$k=\pm 1,\quad a=ma^*. \qquad /4/$$

Умови /4/ необхідні та достатні. Справді, /4/ задовольняє /3/. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай криві (Δ), (Δ^*) – криві, супровідні цисоїдам Діоклеса, а полярні рівняння кривих (Δ), (Δ^*) мають відповідно вигляд

$$\rho=a\frac{1+\sin^2\varphi}{\cos\varphi},\quad \rho^*=a^*\frac{1+\sin^2 k\varphi}{\cos k\varphi}, \qquad /5/$$

де a, a^* – додатні сталі. Для того щоб відповідність T між точками цих кривих була відповідністю S, необхідно і достатньо

$$k=\pm 1,\quad a=ma^*.$$

Доведення. Згідно з /5/ умову /1/ перепишемо у такому вигляді:

$$a^2(\cos^4\varphi+4-4\cos 2\varphi\cos^2\varphi)\cos^4 k\varphi =$$
$$= m^2a^{*2}k^2(\cos^4 k\varphi+4-4\cos 2k\varphi\cos^2 k\varphi)\cos^4\varphi.$$

Розклавши в ряд ліву та праву частину цієї рівності, матимемо

$$a^2\left[1+(10-2k^2)\varphi^2+\dots\right]=m^2a^{*2}k^2\left[1+(10k^2-2)\varphi^2+\dots\right],$$

звідки

$$k=\pm1,\quad a=ma^*.$$

Очевидно, ці умови будуть необхідні та достатні.

Т е о р е м а 3. Нехай криві (Δ), (Δ^*) є прямими строфоїдами, а полярні рівняння кривих (Δ), (Δ^*) мають відповідно вигляд

$$\rho=a\frac{\cos2\varphi}{\cos\varphi},\quad \rho^*=a^*\frac{\cos2k\varphi}{\cos k\varphi}, \qquad /6/$$

де a, a^* – додатні сталі. Тоді відповідність T між точками кривих (Δ), (Δ^*) буде відповідністю S тоді і тільки тоді, коли

$$k=\pm1,\quad a=ma^*.$$

Д о в е д е н н я . Підставивши /6/ в /1/, матимемо

$$a^2\left[(\cos2\varphi\sin\varphi-2\sin2\varphi\cos\varphi)^2+\cos^2 2\varphi\cos^2\varphi\right]\cos^4 k\varphi=$$

$$=m^2a^{*2}k^2\left[(\cos2k\varphi\sin k\varphi-2\sin2k\varphi\cos k\varphi)^2+\right.$$

$$\left.+\cos^2 2k\varphi\cos^2 k\varphi\right]\cos^4\varphi. \qquad /7/$$

Розклавши в ряд ліву та праву частину рівності /7/, дістанемо

$$a^2\left[1+(4-2k^2)\varphi^2+\dots\right]=m^2a^{*2}k^2\left[1+(4k^2-2)\varphi^2+\dots\right].$$

Звідси маємо

$$k=\pm1,\quad a=ma^*.$$

Оскільки ці умови задовольняють /7/, то необхідність і достатність доведено.

З а у в а ж е н н я . Будемо говорити, що механізм відтворює дану відповідність між точками двох кривих, якщо він відтворює відповідні точки в один і той же момент часу. Розглянуті в теоремах I – 3 відповідності T можна відтворити за допомогою механізмів [1, 2].

Список літератури: I. А р т о б о л е в с к и й И.И. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. 2. А р т о б о л е в с к и й И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1975.

Стаття надійшла до редколегії 22.02.82

УДК 517.913

К.С.Костенко

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)} + p_1(x)\, y'' + \left(p_2(x) + r(x)\right) y' + p_3(x)\, y = 0 \qquad /1/$$

доведена наступна теорема.

Т е о р е м а . Нехай у рівнянні /1/ $p_3(x)$ неперервна, а $r(x)$, $p_1(x)$ і $p_2(x) = \lambda z_1^{-3}(x) \neq 0$ неперервно диференційовані функції відповідно один, два і три рази на інтервалі $x_0 \leq x < \infty$. Нехай також

$$A(x) = z_1^2(x)\left(\mu - 5 z_1''(x) z_1(x) + \frac{5}{2} z_1'^2(x)\right), \quad B(x) = \lambda z_1^{-3}(x) + A'(x),$$

$$C(x) = \left(\nu - 0{,}09\mu^2 - \frac{3}{2}\lambda z_1'(x)\right) z_1^{-4}(x) + 0{,}3A''(x) + \left(0{,}3A(x)\right)^2,$$

$\beta_0 \neq 0$ – дійсний розв"язок системи рівнянь

$$20\beta^3 + 2\mu\beta - \lambda = 0, \quad 21\beta^4 + 3\mu\beta^2 + \nu = 0,$$

результант якої дорівнює нулеві, причому $6\beta_0^2 + \mu = 0$. Тоді за умов

$$\beta_0 z_1(x) > 0, \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x, x_0) = \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} b_1(x)\, dx < \infty, \quad \lim_{x \to \infty} P_4(x) z_1^2(x) = 0,$$