За цих же умов головні частини асимптотичних формул для перших похідних фундаментальної системи розв"язків одержуємо формальним диференціюванням головних частин формул /2/ – /5/.

Те ж саме вірне для похідних другого порядку цих розв"язків, якщо

$$\lim_{x\to\infty} (A(x) - p_1(x))\, \xi_1^2(x) = 0$$

і третього порядку, коли

$$\lim_{x\to\infty} (p_1'(x) - r(x))\, \xi_1^3(x) = 0$$

додатково.

Список літератури: I. К о с т е н к о Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. – Диф. уравн., 1974, т.10, № 10. 2. П а в л ю к І.А. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. – Вид-во Київ. ун-ту, 1970.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.82

УДК 517.956.2

В.Г.Костенко, М.Д.Коркуна

РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ПЛОСКОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Плоска крайова задача для системи рівнянь термопружності у випадку, коли на границі $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ двозв"язної області $H \setminus D$ задано лінійний диференціальний оператор першого порядку зі змінними коефіцієнтами, зведена [3, 4] за допомогою методики Я.Б.Лопатинського [5, 6] до регулярної системи інтегральних рівнянь. При цьому фундаментальна матриця відповідної однорідної системи рівнянь [3] і ядра інтегралів типу потенціалу [4] визначені в явній формі, що дало змогу справдати використання як внутрішньої, так і зовнішньої формули "стрибка" інтегралу типу потенціалу в точках границі області та знайти наближений розв"язок задачі на ЕОМ. Одержана [4] система регулярних інтегральних рівнянь у детальному записі набирає вигляду

$$\begin{cases} \mu_1(y) \pm \left\{ \int_{\mathcal{T}} \mathcal{Y}_1^{(1,1)}(y-z,\nu(z),z)\mu_1(z)d_z\mathcal{T} + \int_{\mathcal{T}} \mathcal{Y}_1^{(1,2)}(y-z,\nu(z),z)\mu_2(z)d_z\mathcal{T} \right\} = \psi_1(y), \\ \mu_2(y) \pm \left\{ \int_{\mathcal{T}} \mathcal{Y}_1^{(2,1)}(y-z,\nu(z),z)\mu_1(z)d_z\mathcal{T} + \int_{\mathcal{T}} \mathcal{Y}_1^{(2,2)}(y-z,\nu(z),z)\mu_2(z)d_z\mathcal{T} \right\} = \psi_2(y), \end{cases} \quad /I/$$

де $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$ - густини потенціалів; $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ - відомі вільні члени [3]. У системі рівнянь /I/ перед інтегралом треба брати знак "плюс", коли $y \in \mathcal{T}_2$, і знак "мінус", якщо $y \in \mathcal{T}_1$.

Оскільки вихідна задача розглядається у двозв"язній області, то для забезпечення єдиності розв"язку вона повинна бути доповнена трьома умовами однозначності [2]. Умова однозначності для кута повороту

$$\int_{\mathcal{T}_1} d\left(\frac{dU_1}{dx_2}\right) = \int_{\mathcal{T}_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)dx_2 \right\} = 0 \quad /2/$$

і умови однозначності для переміщень U_1, U_2

$$\int_{\mathcal{T}_1} dU_1 = \int_{\mathcal{T}_1} \left\{ \frac{\partial U_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2}dx_2 \right\} = 0, \quad /3/$$

$$\int_{\mathcal{T}_1} dU_2 = \int_{\mathcal{T}_1} \left\{ \frac{\partial U_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}dx_2 \right\} = 0, \quad /4/$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \tilde{u} + v; \quad \tilde{u} = \iint_{H \setminus D} \varphi(x_1, x_2; y_1, y_2)\mathcal{F}(y_1, y_2)dy_1dy_2;$$

$$v = \int_{\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2} \mathcal{Y}_0(x-z,\nu(z),z)\mu(z)d_z\mathcal{T}; \quad \varphi(x_1, x_2; y_1, y_2)$$

– фундаментальна матриця [3] ; $\mathcal{Y}_0(x-z, \nu(z), z)$ – ядро інтеграду типу потенціалу [4]. Таким чином, отримуємо систему інтегральних рівнянь /І/ з додатковими умовами на густину /2/ – /4/.

Для розв"язування системи інтегральних рівнянь використаємо метод Боголюбова-Крилова [І]. Для цього в системі інтегральних рівнянь /І/ і в умовах /2/–/4/ криволінійні інтеграли зведемо до означених введенням заміни

$$\begin{rcases} x_1 = R_c \sin\omega \\ x_2 = R_c \cos\omega \end{rcases}, \quad \begin{rcases} y_1 = r\sin\varphi \\ y_2 = r\cos\varphi \end{rcases}, \quad \begin{rcases} z_1 = \rho\sin\theta \\ z_2 = \rho\cos\theta \end{rcases},$$

а криву $\mathcal{T}_1 (T(x,y) = 343^\circ C)$ апроксимуємо тригонометричним поліномом

$$r = r(\varphi) = R_0 + \varepsilon R_1 \sin\varphi + \varepsilon^2 R_2 \sin^2\varphi + \varepsilon^3 R_3 \sin^3\varphi,$$

де R_0 = І,9І2; R_1 = –3,747; R_2 = І9,658; R_3 = –5І,787; ε = 0,2803 /за $\mathcal{T}_2$ взято коло радіуса A /.

Припустивши, що густини $\mu_i(\theta)$ можна наближено замінити постійними, і вибравши точки на кривій $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$

$$\theta_i = \theta_0 + (i-1)\Delta\theta, \quad i = \overline{1, M}$$

$$\varphi_j = \varphi_0 + (j-1)\Delta\varphi, \quad j = \overline{1, M},$$

зводимо систему /І/ і умови /2/–/4/ до перевизначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв"язок останньої знаходимо методом найменших квадратів і тим самим одержуємо наближений розв"язок системи інтегральних рівнянь /І/.

Розподіл температурних напружень по осі x_1

x_1, см	$\sigma_{x_1x_1}$, кг/мм^2	$\sigma_{x_2x_2}$, кг/мм^2
І,267	–97,36	–ІІ,90
І,927	–2І,02	24,37
2,587	І9,27	30,86
3,247	І0,02	29,І9
9,І87	7,35	9,6

Оскільки в кінцевому результаті при розв"язуванні цієї задачі нас цікавитимуть напруження $\sigma_{x_1 x_1}$, $\sigma_{x_2 x_2}$, $\sigma_{x_1 x_2}$, які з переміщеннями зв"язані співвідношеннями [3], то потрібно мати похідні $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ $(i,j=1,2)$, знаходження яких не становить труднощів, а також $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ $(i,j=1,2)$. Останні знаходимо зі співвідношень

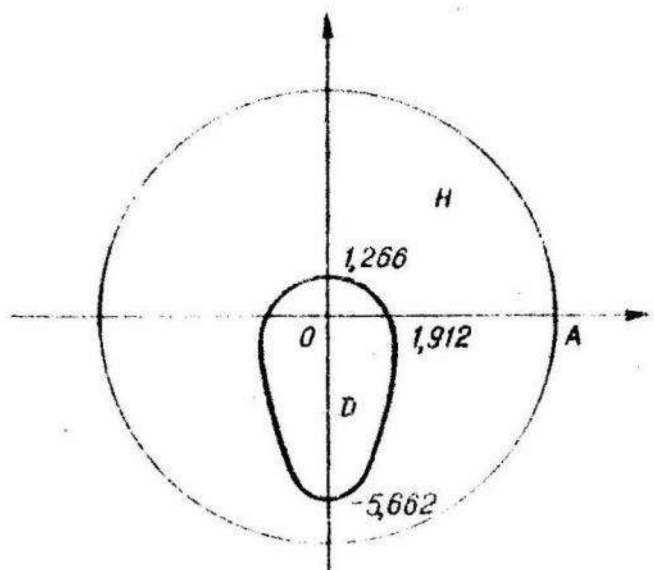
$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=\int_\Gamma \gamma^{(1,1)}_{0x_1}(x-z,\nu(z),z)\mu_1(z)\,d_z\Gamma+\int_\Gamma \gamma^{(1,2)}_{0x_1}(x-z,\nu(z),z)\mu_2(z)\,d_z\Gamma,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1}=\int_\Gamma \gamma^{(2,1)}_{0x_1}(x-z,\nu(z),z)\mu_1(z)\,d_z\Gamma+\int_\Gamma \gamma^{(2,2)}_{0x_1}(x-z,\nu(z),z)\mu_2(z)\,d_z\Gamma,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2}=\int_\Gamma \gamma^{(1,1)}_{0x_2}(x-z,\nu(z),z)\mu_1(z)\,d_z\Gamma+\int_\Gamma \gamma^{(1,2)}_{0x_2}(x-z,\nu(z),z)\mu_2(z)\,d_z\Gamma,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=\int_\Gamma \gamma^{(2,1)}_{0x_2}(x-z,\nu(z),z)\mu_1(z)\,d_z\Gamma+\int_\Gamma \gamma^{(2,2)}_{0}(x-z,\nu(z),z)\mu_2(z)\,d_z\Gamma,$$

де через $\gamma^{(i,j)}_{0x_k}(x-z,\nu(z),z),(i,j=1,2;\ k=1,2)$ позначено похідні ядер інтегралів типу потенціалу.



Деякі результати обчислень вихідної задачі наводимо в таблиці для області, що зображена на рисунку.

Список літератури: I. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. - М.; Л.: Физматгиз, 1962. 2. Коваленко А.Д. Термоупругость. - К.: Вища школа, 1975. 3. Костенко В.Г., Коркуна М.Д. Фундаментальна матриця розв"язків однієї лінійної еліптичної системи рівнянь в частинних похідних. - Вісн. Львів ун-ту, сер. мех.-мат., 1982, вип. 20. 4. Костенко В.Г., Коркуна М.Д. Зведення однієї крайової задачі до системи регулярних інтегральних рівнянь. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1982, вип. 20. 5. Лопатинский Я.Б. Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений. - Укр. мат. журн., 1951, т. 3, № 1. 6. Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр. мат. журн., 1953, т.5, № 2.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.82

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ЗМІШАНА СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Інтегродиференціальні гіперболічні рівняння використовуються у багатьох прикладних галузях науки [9, 10]. Якщо у вивченні сингулярно збурених гіперболічних рівнянь в останній час досягнуто певного прогресу [2, 11], то сингулярно збурені інтегродиференціальні гіперболічні рівняння практично не досліджувалися.

Вивчимо змішану задачу для сингулярно збуреного гіперболічного інтегродиференціального рівняння другого порядку.

В області $D=\{(x,t): 0\leq x\leq l, 0\leq t\leq T\}$ розглянемо задачу