Деякі результати обчислень вихідної задачі наводимо в таблиці для області, що зображена на рисунку.

Список літератури: I. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. - М.; Л.: Физматгиз, I962. 2. Коваленко А.Д. Термоупругость. - К.: Вища школа, I975. 3. Костенко В.Г., Коркуна М.Д. Фундаментальна матриця розв"язків однієї лінійної еліптичної системи рівнянь в частинних похідних. - Вісн. Львів ун-ту, сер. мех.-мат., I982, вип. 20. 4. Костенко В.Г., Коркуна М.Д. Зведення однієї крайової задачі до системи регулярних інтегральних рівнянь. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., I982, вип. 20. 5. Лопатинский Я.Б. Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений. - Укр. мат. журн., I95I, т. 3, № I. 6. Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр. мат. журн., I953, т.5, № 2.

Стаття надійшла до редколегії I6.03.82

УДК 5I7.946

В.М.Цимбал

ЗМІШАНА СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Інтегродиференціальні гіперболічні рівняння використовуються у багатьох прикладних галузях науки [9, IO]. Якщо у вивченні сингулярно збурених гіперболічних рівнянь в останній час досягнуто певного прогресу [2, II], то сингулярно збурені інтегродиференціальні гіперболічні рівняння практично не досліджувалися.

Вивчимо змішану задачу для сингулярно збуреного гіперболічного інтегродиференціального рівняння другого порядку.

В області $D=\{(x,t):0\leq x\leq l, 0\leq t\leq T\}$ розглянемо задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \qquad /I/$$

$$+ d(x,t)u + \int_0^t K(x,s)\, u(x,s)\,ds = f(x,t),$$

$$u(0,t) = 0, \ u(\ell,t) = 0, \ u(x,0) = 0, \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Вважаємо, що виконані наступні умови:

I/ функції, що входять в /I/, достатньо гладкі в D ;

2/ $a(x,t) > 0$ в D;

3/ $\dfrac{\partial^{i+j} f(0,0)}{\partial t^i \partial x^j} = \dfrac{\partial^{i+j} f(\ell,0)}{\partial t^i \partial x^j} = 0 \ (i+j = 0,\dots,2N;\ i = 0,\dots,N-1),$

де N – деяке натуральне число /точність побудованого нижче асимптотичного розкладу/.

Очевидно, беручи до уваги припущення 2/, вихідне рівняння /I/ гіперболічне, а вироджене рівняння /I/, якщо в ньому формально прийняти $\varepsilon = 0$, параболічне [8] . При кожному фіксованому $\varepsilon > 0$ задача /I/, /2/ однозначно розв"язна. Справді, це безпосередньо випливає з того, що задачу /I/, /2/ можна звести до мішаної задачі для інтегродиференціальної гіперболічної системи першого порядку [7], а далі застосувати метод характеристик [I].

Асимптотичний розклад розв"язку задачі /I/, /2/ будуємо методом примежового шару [3–5] у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \overline{u}_i(x,t) + \varepsilon \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x,\tau) + \varepsilon^{N+1} R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /3/$$

де $\tau = t/_\varepsilon$, а всі функції з /3/ визначені нижче. Підставимо $\sum\limits_{i=0}^{N} \varepsilon^i \overline{u}_i(x,t) + \varepsilon \sum\limits_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x,\tau)$ у /I/. При цьому перетворюємо вирази виду $\int_0^t K(x,s)\,\Pi_i(x,\sigma)\,ds \ (\sigma = \frac{s}{\varepsilon})$ аналогічно тому, як це зроблено у працях [3, 5] при дослідженні звичайних інтегродиференціальних систем з оператором типу Вольтерра, наступним чином:

$$\int_0^t K(x,s)\Pi_i(x,\sigma)\,ds = \varepsilon\int_0^\infty K(x,\varepsilon\sigma)\Pi_i(x,\sigma)\,d\sigma - \varepsilon\int_\tau^\infty K(x,\varepsilon\sigma)\Pi_i(x,\sigma)\,d\sigma,$$

а далі розвиваємо $K(x, \varepsilon\sigma)$ за степенями ε. Невласні інтеграли, що з"являються при цьому, збіжні в огляду на те, що $\Pi_i(x,\sigma)$ – функції типу примежового шару [4] /це покажемо нижче/. Зрівнюючи тепер коефіцієнти при однакових степенях ε окремо, які залежать від t, окремо, що залежать від τ, одержуємо рівняння для визначення $\bar{U}_i(x,t)$, $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\dots,N)$.

Запишемо

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t}-\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x^2}+C(x,t)\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x}+d(x,t)\bar{U}_i+\int_0^t K(x,s)\bar{U}_i(x,s)\,ds=f_i(x,t), \qquad /4/$$

де $f_0(x,t)=f(x,t)$; $f_1(x,t)=-\left(\frac{\partial^2 \bar{U}_0}{\partial t^2}-a(x,t)\frac{\partial^2 \bar{U}_0}{\partial x^2}\right)$; $f_i(x,t)$ $(i>1)$

явно виражаються через $\bar{U}_j(x,t)$ $/j=0,\dots,i-1/$ та їх похідні, а також вирази виду $\int_0^\infty \sigma^k \Pi_j(x,\sigma)\,d\sigma$ $(j=0,\dots,i-2)$, $k\geq 0$ цілі.

Далі

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \tau^2}+\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau}=\Psi_i(x,\tau), \qquad /5/$$

де $\Psi_0(x,\tau)\equiv 0$, $\Psi_i(x,\tau)$ явно виражаються через $\Pi_j(x,\tau)$ $(j=0,\dots,i-1)$ та їх похідні, а також виразу виду $\int_\tau^\infty \sigma^k \Pi_j(x,\sigma)\,d\sigma$ $(j=0,\dots,i-2)$, $k\geq 0$ ціле.

Використовуючи /2/, дістаємо умови, при яких слід розв"язувати /4/, /5/

$$\bar{U}_i(x,0)=-\Pi_{i-1}(x,0),\ \bar{U}_i(0,t)=0,\ \bar{U}_i(l,t)=0\ (i=0,\dots,N), \qquad /6/$$

де $\Pi_{-1}(x,0)\equiv 0$;

$$\frac{\partial \Pi_i(x,0)}{\partial \tau}=-\frac{\partial \bar{U}_i(x,0)}{\partial t},\ \Pi_i(x,\tau)\to 0 \text{ при } \tau\to\infty\ (i=0,\dots,N). /7/$$

При цьому останні умови в /7/ необхідні для того, щоб функції $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\dots,N)$ були функціями типу примежового шару. Більш того у /6/ враховано, що $\Pi_i(0,\tau)=\Pi_i(l,\tau)=0$ $(i=0,\dots,N)$. Це достатньо елементарно безпосередньо перевіряється з врахуванням припущення 3).

Отже, $\bar{U}_i(x,t)\,(i=0,\dots,N)$ визначаються як розв"язки змішаних задач для інтегродиференціальних параболічних рівнянь /4/, /6/. Функції $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\dots,N)$ є розв"язками задач /5/, /7/ для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Легко перевірити, що $\Pi_0(x,\tau)=\frac{\partial U_0(x,0)}{\partial t}e^{-\tau}$, тобто $\Pi_0(x,\tau)$ – функція типу примежового шару. Аналогічно [4] методом математичної індукції з врахуванням структури $\Psi_i(x,\tau)$ легко показати, що і всі $\Pi_i(x,\tau)\,(i=0,\dots,N)$ – це функції типу примежового шару. Задачі /4/, /6/ однозначно розв"язні [6]. Усі функції $\bar{U}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$, $\Pi_i(x,\tau)\,(i=0,\dots,N)$ можна знайти, якщо їх визначати у послідовності $\bar{U}_0(x,t)$, $\Pi_0(x,\tau)$, $\bar{U}_1(x,t)$ і т.д.

Використовуючи зображення /3/, рівняння /1/, початкові та граничні умови /2/, а також співвідношення /4/ – /7/, стандартним методом [4] одержимо задачу для визначення $R_N(x,t,\varepsilon)$

$$L_\varepsilon R_N = F(x,t,\varepsilon),\ R_N(l,t,\varepsilon)=\frac{\partial R_N(x,0,\varepsilon)}{\partial t}=0,\ R_N(x,0,\varepsilon)=-\Pi_N(x,0), \qquad /8/$$

де $F(x,t,\varepsilon)$ – відома функція і, що суттєво, обмежена в D.

Методом інтегралів енергії [7] одержана оцінка

$$\| R_N(x,t,\varepsilon) \|_{L_2(D)} \leq C, \qquad /9/$$

де стала C не залежить від ε. Оцінка /9/ доводить асимптотичну коректність розвинення /3/.

Результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. При виконанні умов 1/ – 3/ розв"язок задачі /1/, /2/ допускає асимптотичне представлення /3/, де функції $\bar{U}_i(x,t)\,(i=0\dots N)$ – розв"язки задач /4/, /6/; функції типу примежового шару $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\dots,N)$ – розв"язки задач /5/, /7/.

Зауваження. Аналогічна задача для рівняння без вольтеррового доданку у багатовимірному випадку розглянута у праці [12].

Список літератури: I. Аболиня В.Э., Мышкио А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. – Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, т.20, вып.3. 2. Бутузов В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. – Мат. сб., I977, т.I04, № 3. 3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решения сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, I973. 4. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Усп. мат. наук, I957, т.I2, № 5. 5. Иманалиев М. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегродифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, I972. 6. Кривошеин Л.Е. Решение некоторых задач для интегродифференциальных уравнений. – В кн.: Исследования по интегродифференциальным уравнениям в Киргизии, I965, вып.3. 7. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, I964. 8. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, I96I. 9. Розовский М.И Об интегродифференциальных телеграфных уравнениях. – ДАН СССР, I948, т.59, № 3. IO. Розовский М.И. Применение и.-д.у. к изучению деформирования реальных материалов. – Изв. АН СССР, сер. техн. I948, № 5. II. Треногин В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника – Вишика. – Усп. мат. наук, I970, т.25, № 4. I2. Цимбал В.М. Асимптотичний розв"язок змішаної задачі для гіперболічного рівняння з параметром. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. I98I, вип. I8.

Стаття надійшла до редколегії 20.IO.8I

УДК 5I7.946

В.М.Цимбал

ОЦІНКИ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

При дослідженні сингулярно збурених задач звичайно розрізняють два етапи: побудову формального асимптотичного розв"язку за допомогою якого-небудь асимптотичного методу та доведення коректності одержаної асимптотики чи асимптотичної збіжності одержаного ряду.