Список літератури: І. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. – Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, т.20, вып.3. 2. Б у т у з о в В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. – Мат. сб., 1977, т.104, № 3. 3. В а с и л ь е в а А.Б., Б у т у з о в В.Ф. Асимптотические разложения решения сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. 4. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Усп. мат. наук, 1957, т.12, № 5. 5. И м а н а л и е в М. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегродифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1972. 6. К р и в о ш е и н Л.Е. Решение некоторых задач для интегродифференциальных уравнений. – В кн.: Исследования по интегродифференциальным уравнениям в Киргизии, 1965, вып.3. 7. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. 8. П е т р о в с к и й И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. 9. Р о з о в с к и й М.И. Об интегродифференциальных телеграфных уравнениях. – ДАН СССР, 1948, т.59, № 3. 10. Р о з о в с к и й М.И. Применение и.-д.у. к изучению деформирования реальных материалов. – Изв. АН СССР, сер. техн. 1948, № 5. 11. Т р е н о г и н В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника – Вишика. – Усп. мат. наук, 1970, т.25, № 4. 12. Ц и м б а л В.М. Асимптотичний розв"язок змішаної задачі для гіперболічного рівняння з параметром. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. 1981, вип. 18.

Стаття надійшла до редколегії 20.10.81

УДК 517.946

В.М.Цимбал

ОЦІНКИ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

При дослідженні сингулярно збурених задач звичайно розрізняють два етапи: побудову формального асимптотичного розв"язку за допомогою якого-небудь асимптотичного методу та доведення коректності одержаної асимптотики чи асимптотичної збіжності одержаного ряду.

Друга частина, обгрунтування асимптотики, яка, звичайно, відсутня у працях прикладного характеру, необхідна, оскільки існують приклади, які показують, що формальний асимптотичний розклад не завжди асимптотичний [5]. Доведення асимптотичної коректності одержаного наближення до розв"язку задачі зводиться до знаходження відповідної оцінки різниці між точним і наближеним розв"язком задачі, або, що те ж саме, оцінки залишкового члена ряду. Методи одержання відповідних оцінок у випадку задач для еліптичних і параболічних рівнянь розглянуті у праці [5]. Аналогічні методи для гіперболічних сингулярно збурених задач мають свою специфіку, вони менш розвинені.

Обгрунтуємо асимптотики для задач, розглянутих у працях [3,4], де відповідна оцінка дається без доведення. Задача зводиться до знаходження оцінки розв"язку задачі

$$\varepsilon^n\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)+\varepsilon\left(a(x,t)\frac{\partial U}{\partial t}+b(x,t)\frac{\partial U}{\partial x}\right)+c(x,t)U=f(x,t), \quad (n\geq 2) \qquad /1/$$

$$U(x,0,\varepsilon)=0, \quad \frac{\partial U(x,0,\varepsilon)}{\partial t}=0 \qquad /2/$$

у будь-якому характеристичному трикутнику $K=D=\{(x,t): x_0<x_0+t<x<x_1-t<x_1\}$, $\varepsilon>0$ – малий параметр. Тут $f(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$, де N – натуральне число, початкові умови /2/ для залишкового члена, взагалі кажучи, не нульові, однак це не суттєво. Відзначимо також, що у працях [3,4] розглянута задача для дещо більш загального рівняння /коефіцієнт при $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ не дорівнює – I, однак одержання оцінки у цьому випадку повністю аналогічне/. Для простоти викладу розглянемо нескладний випадок.

Припустимо, що виконуються умови:

I/ $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ неперервно диференційовані в D. Справді, для побудови асимптотики потрібна більш висока гладкість функцій, що входять в /I/;

2/ $a(x,t)>0$, $c(x,t)>0$, $|b(x,t)|<a(x,t)$ в D.

У пункті I/ оцінка одержана методом інтегралів енергії [2], у 2/ використано аналог принципу максимуму разом з методом порівняння.

I. Виходимо зі співвідношення

$$\varepsilon^n\Big\{\frac{\partial}{\partial t}\Big[a\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2+2b\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x}+a\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]+\frac{\partial}{\partial x}\Big[-b\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2-$$

$$-2a\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x}-b\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]\Big\}+\varepsilon^n\Big[\Big(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial t}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2+$$

$$+2\Big(\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial t}\Big)\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\Big(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial t}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]+ \qquad /3/$$

$$+2\varepsilon\Big(a\,\frac{\partial u}{\partial t}+b\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\frac{\partial}{\partial t}(acu^2)+\frac{\partial}{\partial x}(bcu^2)-$$

$$-\Big[\frac{\partial(ac)}{\partial t}+\frac{\partial(bc)}{\partial x}\Big]u^2=2f\Big(a\,\frac{\partial u}{\partial t}+b\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big),$$

яке одержується у результаті домноження /I/ на $2\Big(a\dfrac{\partial u}{\partial t}+b\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big)$ і зведення до дивергентного виду. Зауважимо, що тут і далі для скорочення опускаємо аргументи функцій там, де це не викличе непорозуміння. Перетнемо K прямою $t=\tau$ /τ – довільне/ і позначимо через K_τ трапецію, що утворюється у результаті цього перетину. Бічні сторони цієї трапеції /відрізки характеристик/ позначимо через Γ_1' і Γ_2', основу $t=0$, $x_0\le x\le x_1$ через Γ. Інтегруючи /3/ по K_τ, використовуючи формулу Остроградського і приймаючи до уваги /2/, одержуємо

$$\varepsilon^n\int\limits_{t=\tau}\Big[a\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2+2b\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x}+a\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]dx+\int\limits_{t=\tau}acu^2dx+$$

$$+\varepsilon^n\int\limits_{\Gamma_1'+\Gamma_2'}\Big\{\Big[a\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2+2b\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x}+a\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]\cos n^{\wedge}t+$$

$$+\left[-b\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-2a\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}-b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\cos n\hat{x}\Big\}\,ds+$$

$$+\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2} c\,(a\cos n\hat{t}+b\cos n\hat{x})\,u^2\,ds+2\varepsilon\int\limits_{K_\tau}\left(a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dK_\tau=$$

$$=2\int\limits_{K_\tau} f\left(a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}\right)dK_\tau+\varepsilon^n\int\limits_{K_\tau}\Big[\left(\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial b}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial b}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\Big]dK_\tau+ \qquad /4/$$

$$+\int\limits_{K_\tau}\left(\frac{\partial(ac)}{\partial t}+\frac{\partial(bc)}{\partial x}\right)u^2\,dK_\tau .$$

Враховуючи, що Γ_1 і Γ_2 – характеристики, а також припущення 2/ елементарно перевіряється, третій і четвертий інтеграли зліва у рівності /4/ невід"ємні. Крім того, з уваги на припущення 2/ квадратична форма $aj_{\gamma_1}^2+2bj_{\gamma_1}j_{\gamma_2}+aj_{\gamma_2}^2$ додатно визначена. Отже, в K має місце

$$a(x,t)j_{\gamma_1}^2+2b(x,t)j_{\gamma_1}j_{\gamma_2}+a(x,t)j_{\gamma_2}^2\geq\alpha\left[j_{\gamma_1}^2+j_{\gamma_2}^2\right]\quad(\alpha>0). \qquad /5/$$

Застосувавши до першого праворуч у рівності /4/ інтегралу нерівність Коші з параметром, записуємо

$$2\int\limits_{K_\tau} f\left(a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}\right)dK_\tau\leq\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{K_\tau}f^2\,dK_\tau+2\varepsilon\int\limits_{K_\tau}\left(a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dK_\tau . \qquad /6/$$

Оцінюємо в /4/ праворуч за модулем і враховуючи /6/, а також опускаючи третій і четвертий зліва інтеграли, маємо

$$m\int\limits_{t=\tau}\left\{\varepsilon^n\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]+u^2\right\}dx\leq P+M\int\limits_{K_\tau}\left\{\varepsilon^n\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]+u^2\right\}dK_\tau, \qquad /7/$$

де $m = \min\{\alpha, \min_{(x,t)\in K}(a(x,t)c(x,t))\}$; $\rho = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{K_\tau} f^2 dK_\tau$;
$\rho = O(\varepsilon^{2N+1})$; M - константа, що залежить від максимумів модулів коефіцієнтів у K . Оцінюючи ρ і застосовуючи до /7/ нерівність Гронуолла-Беллмана та інтегруючи по τ , одержуємо

$$\iint_K \left\{ \varepsilon^n \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right] + u^2 \right\} dK \leq C\varepsilon^{2N+1},$$

де C^K - константа, що не залежить від ε . Звідси випливає потрібна оцінка в інтегральній метриці

$$\|u\|_{L_2(K)} = O(\varepsilon^{N+1/2}). \qquad /9/$$

Зазначимо, що метод інтегралів енергії для обгрунтування асимптотики розв"язку задачі Коші для сингулярно збуреного гіперболічного рівняння / ε знаходять тільки при старших похідних/ застосовано у працях [I, 6].

2. Має місце таке твердження.

Т в е р д ж е н н я . Нехай $u(x,t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння /I/ в області D , виконуються умови I/, 2/ і умови

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &\geq 4\varepsilon^{n-2}c + 2\varepsilon\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial b}{\partial x}\right), \\ a^2 - b^2 &\geq 4\varepsilon^{n-2}c - 2\varepsilon\left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x}\right). \end{aligned} \qquad /I0/$$

Припустимо, що $f(x,t,\varepsilon) \geq 0$ в D і початкові умови задовольняють

$$u \geq 0, \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leq \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{на } \Gamma.$$

Тоді у всій області D $u \geq 0$ і

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{b}{2\varepsilon^{n-1}}u\right| \leq \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a}{2\varepsilon^{n-1}}u.$$

Д о в е д е н н я . Це твердження аналогічне теоремі 2.I. праці [7] і доводиться подібним чином. Перейшовши до змінних $r = t+x$, $s = t-x$ і застосувавши теорему 3.I в праці [8], одержимо потрібне твердження. Таким чином, використовуючи його та повторюючи майже дослівно доведення теореми 2.3 з праці [7], дістаємо потрібну оцінку в D

$$|u(x,t,\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon^{N+1}, \qquad /II/$$

де константа C не залежить від ε . Як видно, оцінка /II/ сильніша, ніж /9/, однак вона виконується при виконанні додаткових умов /I0/. Умови /I0/ при $n=2$ досить обмежуючі, при $n>2$ вони, очевидно, виконуються завжди при достатньо малому ε .

Список літератури: I. Д ж а в а д о в М.Г. Задача Коши для гиперболического уравнения с малым параметром при старших производных. - Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, I963, № 6. 2. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, I964. 3. Ц и м б а л В.М. Задача Коші для гіперболічного рівняння з малим параметром. - У кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. Київ, I978. 4. Ц и м б а л В.М. Задача Коші для сингулярно збуреного гіперболічного рівняння. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., I98I, вип. I8. 5. Eckhaus W. Formal approximations and singular perturbations.- SIAM Review, 1977, 19, N4. 6. Jarger E.M. Singular perturbations of hyperbolic type.- Niew. Arch. Wisk., 1975, 23, N3. 7. Weinstein M.B., Smith D.R. Comparison techniques for certain overdamped hyperbolic partial differential equations.- Rocky Mount. J. Math., 1976, 6, N4. 8. Smith D.R. Sturm transformations and linear hyperbolic differential equations in two variables.- J. Math. Anal. Applic., 1976, 56.

Стаття надійшла до редколегії 24.II.8I