УДК 517.946

В.М.Кирилич

НЕКЛАСИЧНА ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ ДЛЯ ДВОМІРНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Постановка задачі. Нехай ℓ_1 і ℓ_2 - дві гладкі криві в площині xot, задані при $t \geqslant 0$ відповідно рівняннями $x = a(t)$ і $x = b(t)$ $(a(0) = b(0) = 0, a(t) < b(t)$ для $t > 0$. Через T позначимо криволінійний сектор у півплощині $t > 0$, обмежений кривими ℓ_1 і ℓ_2. У T розглянемо гіперболічну систему першого порядку

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j + f_i(x,t), (i=1,\ldots,n), \qquad /1/$$

де $\lambda_i(x,t)$ - двічі, а $a_{ij}(x,t)$ і $f_i(x,t)$ - один раз неперервно диференційовані по x і t у $\bar{T}$.

Для системи /1/ задаються інтегральні обмеження

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{si}(\xi,t)u_i(\xi,t)d\xi = h_s(t), \ (s=1,\ldots,n) \ . \qquad /2/$$

Функції $\gamma_{si}(\xi,t)$ і $h_s(t)$ вважають неперервно диференційованими по своїх аргументах відповідно у $\bar{T}$ і на $[0,\infty[$.

Задачу з праці [2] можна розв"язати, взагалі кажучи, як деякий граничний варіант даної задачі.

Припускаємо, що для всіх $t \geqslant 0$ виконуються умови:

$$\lambda_i(x(t),t) - x'(t) > 0, \ i = 1,\ldots, k \ . \qquad /3/$$

$$\lambda_i(x(t),t) - x'(t) < 0, \ i = k+1,\ldots,n$$ при

$$x = a(t) \text{ і } x = b(t), \ \det A_a^b(t) \neq 0 \ , \qquad /4/$$

де

$$A_a^b(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(a(t),t) \ldots \gamma_{1k}(a(t),t)\,\gamma_{1,k+1}(b(t),t) \ldots, \gamma_{1n}(b(t),t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{n1}(a(t),t) \ldots \gamma_{nk}(a(t),t)\,\gamma_{n,k+1}(b(t),t) \ldots \gamma_{nn}(b(t),t) \end{pmatrix}.$$

Існування і єдиність розв"язку. Введемо додаткові невідомі функції $v_i^a(t)=U_i(a(t),t),\ (i=1,\dots,k)$ і $v_i^b(t)=U_i(b(t),t),\ (i=k+1,\dots,n)$ і приймемо $F_i(x,t)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)U_j+f_i(x,t)$. Тоді інтегруванням вздовж характеристик [I] задачу знаходження розв"язку системи /I/ зводимо до еквівалентної системи інтегральних рівнянь

$$U_i(x,t)=\omega_i(x,t)+\int_{t_i(x,t)}^{t} F_i(\varphi_i(\tau,x,t),\tau)\,d\tau,\ (i=1,\dots,n), \qquad /6/$$

де $\varphi_i(\tau,x,t)$ – розв"язок задачі Коші $\xi'_\tau=\lambda_i(\xi,\tau),\ \xi(t)=x;$

$$t_i(x,t)=\begin{cases} t_i^a(x,t), & i=1,\dots,k,\\ t_i^b(x,t), & i=k+1,\dots,n,\end{cases}\qquad \omega_i(x,t)=\begin{cases} v_i^a(t_i^a(x,t)), & i=1,\dots,k,\\ v_i^b(t_i^b(x,t)), & i=k+1,\dots,n,\end{cases}$$

$t_i^a(x,t)$ – ордината точки перетину характеристики $\xi=\varphi_i(\tau,x,t)$ з кривою ℓ_1 при $i=1,\dots,k;$ $t_i^b(x,t)$ – ордината точки перетину характеристики $\xi=\varphi_i(\tau,x,t)$ з кривою ℓ_2 при $i=k+1,\dots,n.$

Таким чином, знаходження розв"язку задачі /I/ – /2/ зводиться до знаходження допоміжних функцій $v_i^a(t)$ і $v_i^b(t)$. Для цього поступаємо так.

Нехай $\rho_i^a(x,t)$ і $\rho_i^b(x,t)$ – обернені функції до функцій $x\to t_i^a(x,t)$ і $x\to t_i^b(x,t)$, а $\gamma_i(x,\tau,t)$ – обернені до $x\to\varphi_i(\tau,x,t)$. Існування та єдиність обернених функцій очевидна.

Приймемо

$$\rho_{si}^a(t,\tau)=\gamma_{si}(\xi,t)(\lambda_i(t_i^a(\xi,t),\xi,t),t_i^a(\xi,t))-a'(t_i^a(\xi,t)))\times$$
$$\times\exp\Big(\int_\tau^t\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma,\xi,t),\sigma)\,d\sigma\Big)\qquad \text{при } \xi=\rho_i^a(\tau,t),$$

$$P^{b}_{si}(t,\tau)=\gamma_{si}(\xi,t)(\lambda_i(t^{a}_i(\xi,t),\xi,t),\ \dot t^{a}_i(\xi,t))-a'(t^{a}_i(\xi,t))\times$$
$$\times\exp\left(\int_\tau^t \lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma,\xi,t),\sigma)\,d\sigma\right)\quad \text{при}\quad \xi=\rho^{b}_i(\tau,t),$$
$$Q_{si}(y,t,\tau)=\gamma_{si}(\xi,t)\exp\left(\int_\tau^t \lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma,\xi,t)\sigma)\,d\sigma\right)\quad \text{при}\quad \xi=z_i(y,\tau,t).$$

Легко перевірити, що $\rho^{a}_i(t,t)=a(t)$ і $\rho^{b}_i(t,t)=b(t)$.

Підставляючи /6/ у /2/ і здійснюючи очевидні перетворення, одержуємо систему інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду для визначення допоміжних функцій ϑ^{a}_i і ϑ^{b}_i

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{t^{a}_i(b(t),t)}^{t} P_{si}(t,\tau)\,\vartheta^{a}_i(\tau)\,d\tau-\sum_{i=k+1}^{n}\int_{t^{b}_i(a(t),t)}^{t} P^{b}_{si}(t,\tau)\,\vartheta^{b}_i(\tau)\,d\tau=$$
$$=h_s(t)-\sum_{i=1}^{k}\int_{t^{a}_i(b(t),t)}^{t}d\tau\int_{\varphi_i(\tau,\rho^{a}_i(\tau,t),t)}^{\varphi_i(\tau,b(t),t)} Q_{si}(y,t,\tau)F_i(y,\tau)\,d\tau-$$
$$-\sum_{i=k+1}^{n}\int_{t^{b}_i(a(t),t)}^{t}d\tau\int_{\varphi_i(\tau,a(t),t)}^{\varphi_i(\rho^{b}_i(\tau,t),t)} Q_{si}(y,t,\tau)F_i(y,\tau)\,d\tau. \qquad /7/$$

Диференціюючи /7/ по t і враховуючи умову /4/, одержуємо

$$\vartheta(t)=M(t)\vartheta+\delta\int_{\varphi(t)}^{t}A(\tau)\vartheta(\tau)\,d\tau+G(t,u(y,\tau)), \qquad /8/$$

де $\vartheta(t)=\left(\vartheta^{a}_1(t),\dots,\vartheta^{(a)}_k(t),\ \vartheta^{b}_{k+1}(t),\dots,\vartheta^{b}_n(t)\right)$,

$$\varphi(t)=\begin{cases} t^{a}_i(b(t)t),\ i=1,\dots,k,\\ t^{b}_i(a(t)t),\ i=k+1,\dots,n;\end{cases}\qquad \delta=\begin{cases}1,\ i=1,\dots,k,\\ -1,\ i=k+1,\dots,n;\end{cases}$$

$A(t)$ і $G(t,u)$ – очевидні з /7/. Оператор $M(t)$ має вигляд

$$M(t)\vartheta=\Lambda^{b}_{a}(t)^{-1}\,\Lambda^{b}_{a}(t)^{-1}\,\Lambda^{a}_{b}(t)\,\Lambda^{a}_{b}(t)\,R(t)\vartheta,$$

де

$$\Lambda^{b}_{a}(t)=\operatorname{diag}\{\lambda_1(a(t),t)-a'(t),\dots,\lambda_k(a(t),t)-a'(t),$$
$$\lambda_{k+1}(b(t),t)-b'(t),\dots,\lambda_n(b(t),t)-b'(t)\};$$

$$R(t)v = col\left(v_1^a(t_1^a(b(t),t)),\dots,v_k^a(t_k^a(b(t),t)), v_{k+1}^b(t_{k+1}^b(a(t),t)),\dots, v_n^b \times\right.$$
$$\left.\times(t_n^b(a(t),t))\right).$$

Оскільки $A_a^b(0)=A_b^a(0)$, $R(0)=I$, $|\Lambda_a^{b-1}(\theta)\Lambda_b^a(0)|<1$, то для всіх $t\geq 0$

$$\|M(t)\|<1. \qquad /9/$$

З /8/ з огляду на /9/ записуємо

$$v(t)=(E-M(t))^{-1}\left[\delta\int_{\varphi(t)}^{t}A(\tau)v(\tau)d\tau+G(t,u(y,\tau))\right]. \qquad /10/$$

При будь-якому заданому наборі функцій $u_1,\dots,u_n$ система інтегральних рівнянь /10/ має єдиний розв"язок.

Підставивши розв"язки системи /10/ в /6/, одержимо систему інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду для визначення розв"язку вихідної задачі, яка розв"язується методом послідовних наближень. Будь-який неперервно диференційований або неперервний розв"язок одержаної системи інтегральних рівнянь називатимемо класичним або узагальненим неперервним розв"язком задачі /1/ – /2/. Отже, доведена наступна теорема.

Т е о р е м а . Нехай: 1/ функції $\lambda_i(x,t)$, $\gamma_{ij}(x,t)$, $h_i(t)$ – неперервно диференційовані, а функції $a_{ij}(x,t)$ і $f_i(x,t)$ неперервні в T ; 2/ виконуються умови /3/–/5/. Тоді задача /1/–/2/ має єдиний узагальнений неперервний у T розв"язок.

Якщо крім того $\lambda_i(x,t)$, $\gamma_{ij}(x,t)$, $h_i(t)$ мають другі, а $a_{ij}(x,t)$ і $f_i(x,t)$ неперервні перші похідні, то задача /1/–/2/ має єдиний класичний розв"язок.

Автор висловлює вдячність З.О.Мельнику за допомогу під час написання цієї статті.

Список літератури: 1. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. – Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, т.20, вып. 3. 2. М е л ь н и к З.О. Одна неклассическая граничная задача для гиперболической системы первого порядка с двумя независимыми переменными. – Диф. уравнения, 1981, т.17, № 6.

Стаття надійшла до редколегії 26.01.82

УДК 517.946

С.П.Лавренюк

ІСНУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Нехай $D\subset\mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial D\subset C^2$. Розглянемо задачу

$$u_{tt}+b(x,t)u_t+\sum_{|\alpha|\le 2}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\left(a_\alpha(x,t)D^\alpha u\right)=f(x,t), \qquad /1/$$

$$u\big|_\Gamma=0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=0 \quad /2/ \qquad u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x) \qquad /3/$$

в області $Q=D\times\mathbb{R}_+$, де $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $\mathbb{R}_+=\{0<t<+\infty\}$, $\Gamma=\{x\in\partial D,\ t\in\mathbb{R}_+\}$. Позначимо через $Q_T=D\times(0,T)$, $T>0$, $\Gamma_T=\bar{Q}_T\cap\Gamma$, $D_\tau=\{x\in D,\ t=\tau\}$. Нехай $\tilde{H}^{2,1}(Q_T)$ – замикання множини функцій

$$\left\{v(x,t)\in C^{4,2}(\bar{Q}_T);\ v\big|_{\Gamma_T}=0;\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|_{\Gamma_T}=0,\ i=1,\dots,n;\ v\big|_{t=T}=0\right\}$$

у нормі простору $H^{2,1}(Q_T)$.

Функція $u(x,t)\in H^{2,1}(Q_T)$, яка задовольняє умови /2/, умову $u(x,0)=\varphi(x)$, а також тотожність

$$\int_{Q_T}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}a_\alpha D^\alpha u D^\alpha v+bu_t v-u_t v_t\Big)dxdt=\int_{Q_T}fv\,dxdt+\int_{D_0}\psi v\,dx, \qquad /4/$$