Список літератури: 1. Аболиня В.Э., Мышкис А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. – Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, т.20, вып. 3. 2. Мельник З.О. Одна неклассическая граничная задача для гиперболической системы первого порядка с двумя независимыми переменными. – Диф. уравнения, 1981, т.17, № 6.

Стаття надійшла до редколегії 26.01.82

УДК 517.946

С.П.Лавренюк

ІСНУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial D \subset C^2$.

Розглянемо задачу

$$u_{tt}+b(x,t)u_t+\sum_{|\alpha|\le 2}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(a_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u)=f(x,t), \qquad /1/$$

$$u\big|_{\Gamma}=0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=0 \quad /2/ \qquad u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x) \qquad /3/$$

в області $Q=D\times\mathbb{R}_+$, де $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $\mathbb{R}_+=\{0<t<+\infty\}$, $\Gamma=\{x\in\partial D,\ t\in\mathbb{R}_+\}$.

Позначимо через $Q_T=D\times(0,T)$, $T>0$, $\Gamma_T=\bar{Q}_T\cap\Gamma$, $D_\tau=\{x\in D,\ t=\tau\}$. Нехай $\tilde{H}^{2,1}(Q_T)$ – замикання множини функцій

$$\Big\{v(x,t)\in C^{4,2}(\bar{Q}_T);\ v\big|_{\Gamma_T}=0;\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|_{\Gamma_T}=0,\ i=1,\dots,n;\ v\big|_{t=T}=0\Big\}$$

у нормі простору $H^{2,1}(Q_T)$.

Функція $u(x,t)\in H^{2,1}(Q_T)$, яка задовольняє умови /2/, умову $u(x,0)=\varphi(x)$, а також тотожність

$$\int_{Q_T}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}a_{\alpha}D^{\alpha}u\,D^{\alpha}v+bu_t v-u_t v_t\Big)dx\,dt=\int_{Q_T}fv\,dx\,dt+\int_{D_0}\psi v\,dx, \qquad /4/$$

для довільної функції $v(x,t) \in \tilde{H}^{2,1}(Q_T)$ називається узагальненим розв"язком задачі /I/ - /3/ в Q_T.

Якщо функція $u(x,t)$ - узагальнений розв"язок задачі /I/-/3/ у Q_T для довільного $T>0$, то назвемо її узагальненим розв"язком цієї задачі в області Q.

Т е о р е м а . Нехай виконуються умови:

I/ $a_\alpha, b \in C(R_+; L^\infty(D)),\ f \in C(R_+; L^2(D)),$
$\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2(D),\ \psi \in L^2(D);$

2/ $a_\alpha \geqslant \mu,\ \mu>0,\ |\alpha|=2;\ a_\alpha \geqslant 0,\ |\alpha|<2;\ (x,t)\in Q;$

3/ $\left|\frac{\partial a_\alpha}{\partial t}, b\right| \leqslant \mu_1,\ (x,t)\in Q.$

Тоді існує узагальнений розв"язок задачі /I/ - /3/ в Q, причому функція

$$V(t) = \int_D \Big(\sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x,t) |D^\alpha u|^2 + u_t^2 \Big) dx$$

неперервна при $t \in R_+$.

Д о в е д е н н я . Розглянемо в $\overset{\circ}{H}{}^2(D)$ повну лінійно незалежну систему функцій $\{v_m(x)\},\ v_m \in C^4(\bar{D})$. Вважаємо, що система $\{v_m(x)\}$ ортонормована в $H^2(D)$ і позначимо через

$$\varphi^m(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i v_i(x), \quad \psi^m(x) = \sum_{i=1}^m \psi_i v_i(x).$$

Тут

$$\|\varphi^m(x) - \varphi(x)\|_{H^2(D)} \to 0,\ \|\psi^m(x) - \psi(x)\|_{L^2(D)} \to 0,$$

при $m \to \infty$. Шукаємо функцію

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^m c_i(t) v_i(x)$$

як розв"язок задачі

$$\int_D \Big(u_{mtt} v_r + \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha D^\alpha u_m D^\alpha v_r + b u_{mt} v_r \Big) dx = \int_D f v_r dx, \qquad /5/$$

$$c_r(0) = \varphi_r,\ c_r'(0) = \psi_r,\ r = 1,\ldots,m. \qquad /6/$$

Легко показати, що задача /5/, /6/ має єдиний розв"язок

$$C_s(t)\in C^2[0,T],\ s=1,\dots,m.$$

Аналогічно як і в праці [I, с.20I], можна одержати оцінку

$$\int_{D_t}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha |D^\alpha u_m|^2+u_{mt}^2\Big)dx\le$$

$$\le C_1\big(\|\varphi\|^2_{H^2(D)}+\|\psi\|^2_{L^2(D)}+\|f\|^2_{L^2(Q_\tau)}\big). \qquad /7/$$

Коли проінтегрувати нерівність /7/ по t від 0 до T, то одержимо

$$\|u_m\|_{\tilde H^{2,1}(Q_T)}\le C_2\big(\|\varphi\|_{H^2(D)}+\|\psi\|_{L^2(D)}+\|f\|_{L^2(Q_T)}\big). \qquad /8/$$

Сталі C_1, C_2 залежать від T,μ,μ_1,n. Тут у $\tilde H^{2,1}(Q_T)$ введена еквівалентна норма за формулою

$$\|u\|^2_{\tilde H^{2,1}(Q_T)}=\int_{Q_T}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha |D^\alpha u|^2+u_t^2\Big)dx\,dt.$$

Отже, /8/ перепишемо як

$$\|u_m\|_{\tilde H^{2,1}(Q_T)}\le C_3,$$

а це означає, що $\{u_m\}$ слабокомпактна і з неї можна виділити підпослідовність $\{u_{m_k}\}$, яка слабо збігається до деякої функції $u(x,t)$ у просторі $\tilde H^{2,1}(Q_T)$. Неважко переконатися, що $u(x,t)$ – узагальнений розв"язок задачі /I/ – /3/ у Q_T.

Розглянемо тепер послідовність

$$g_{m_k}=\int_{Q_T}\sum_{|\alpha|\le 2}|D^\alpha u_{m_k}|^2dx\,dt=\int_0^T\sum_{i=1}^{m_k}c_i^2(t)\,dt=\int_0^T\hat V_{m_k}(t)\,dt.$$

Вона монотонно зростає і обмежена, отже, має границю $\lim\limits_{k\to\infty} g_{m_k}=g$. Крім цього, послідовність $\{\hat V_{m_k}\}$ також монотонно зростає і обмежена. Тому

$$\lim_{k\to\infty}\hat V_{m_k}(t)=A_0(t),\quad t\in[0,T]$$

і за теоремою Леві [2, с.50] одержимо, що

$$g=\int_0^T A_0(t)\,dt,$$

або
$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \hat V_{m_k}(t)dt=\int_0^T A_0(t)dt.$$

Далі переконуємось в тому, що $A_0(t)=\hat V(t)$, де
$$\hat V(t)=\int_{D_t}\sum_{|\alpha|\le 2}|D^\alpha u|^2 dx,$$
а також, що $\{\hat V_{m_k}(t)\}$ рівномірно на $[0,T]$ збігається до $\hat V(t)$ при $k\to\infty$. Отже, $\hat V(t)$ – неперервна функція на $[0,T]$. Виходячи з цього, можна показати, що послідовність $\{\tilde V_{m_k}(t)\}$ рівномірно збігається на $[0,T]$ при $k\to\infty$ до функції $\tilde V(t)$. Тут
$$\tilde V_{m_k}(t)=\int_{D_t}\sum_{|\alpha|\le 2}a_\alpha|D^\alpha u_{m_k}|^2dx,$$
$$\tilde V(t)=\int_{D_t}\sum_{|\alpha|\le 2}a_\alpha|D^\alpha u|^2dx.$$
Крім цього, неважко довести, що
$$\lim_{k\to\infty}\int_{Q_T}u^2_{m_k t}\,dxdt=\int_{Q_T}u_t^2\,dxdt.$$

Розглянемо тепер послідовність $\{V_{m_k}(t)\}$, де
$$V_{m_k}(t)=\int_{D_t}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}a_\alpha|D^\alpha u_{m_k}|^2+u^2_{m_k t}\Big)dx.$$
Виходячи з доведеного вище, можемо записати
$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T V_{m_k}(t)dt=\int_0^T V(t)dt. \qquad /9/$$
Користуючись рівностями /5/, легко одержати оцінку
$$\left|\frac{dV_{m_k}}{dt}\right|\le C_4,\quad k=1,2,\dots$$
Крім цього, $V_{m_k}(t)\le C_4$, $k=1,2,\dots$ Тому $\{V_{m_k}(t)\}$ компактна в $C[0,T]$. Припустимо, що сама $\{V_{m_k}(t)\}$ рівномірно збігається на $[0,T]$ при $k\to\infty$ до деякої неперервної функції $B(t)$. Тоді
$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T V_{m_k}(t)dt=\int_0^T B(t)dt. \qquad /10/$$
З рівностей /9/ і /10/ випливає, що $B(t)=V(t)$. Отже, $V(t)$ – неперервна функція на $[0,T]$ і теорема доведена.

Зазначимо, що задачі типу /1/–/3/ розглядалися також у працях [3, 4].

Список літератури: 1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. 2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. 3. Худавердиев К.И., Тахиров Б.О. Исследование сильно обобщенного решения многомерной смешанной задачи с общими краевыми условиями для гиперболических уравнений с нелинейной операторной правой частью. – Изв. АН АзССР, сер. физ.-мат. и мат. наук, 1980, № 2. 4. Philip Brenner, Wolf von Walf. Global Classical Solutions of Nonlinear Wave Equations. – Mathematische Zeitschrift, 1981, 176, N1.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.82

УДК 517.946

Л.Я.Івахненко, С.П.Лавренюк

ІСНУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ

У циліндрі $Q = D \times J \subset R^{n+1}$, де $D = \{x \in R^n,\ 0 < x_i < 1\}$; $J = \{t \in R,\ t > 0\}$; а $S = \{x \in \partial D,\ t \in J\}$ – бокова поверхня циліндра, розглянемо задачу

$$\Delta^2 u + a\Delta u + u_{tt} + cu = f(x, t, u, \dots, u_{x_i}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots, u_t), \quad /1/$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ (2_1) \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \ (2_2)$$

$$u\big|_S = 0, \ (3_1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_S = 0 \ (3_2)$$

a, c – деякі сталі.

Розв"язок задачі шукаємо у класі функцій

$$u \in B_1 = C^1(J, L_2(D)) \cap C(J, H^2(D)).$$

Розглянемо обмежений циліндр $Q_T = \{x \in D,\ 0 < t < T\}$ і позначимо через D_τ його перетин площиною $t = \tau$.

Нехай $u(x,t) \in C^{4,2}(Q) \cap C^{2,1}(Q \cup S \cup D_0)$ – класичний розв"язок задачі. Вважаємо, що права частина рівняння $f \in L_2(Q_T)$