Список літератури: 1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. 2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. 3. Худавердиев К.И., Тахиров Б.О. Исследование сильно обобщенного решения многомерной смешанной задачи с общими краевыми условиями для гиперболических уравнений с нелинейной операторной правой частью. – Изв. АН АзССР, сер. физ.-мат. и мат. наук, 1980, № 2. 4. Philip Brenner, Wolf von Walf. Global Classical Solutions of Nonlinear Wave Equations. – Mathematische Zeitschrift, 1981, 176, N1.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.82

УДК 517.946

Л.Я.Івахненко, С.П.Лавренюк

ІСНУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ

У циліндрі $Q = D\times J\subset R^{n+1}$, де $D=\{x\in R^n,\ 0<x_i<1\}$; $J=\{t\in R,\ t>0\}$; а $S=\{x\in\partial D,\ t\in J\}$ – бокова поверхня циліндра, розглянемо задачу

$$\Delta^2 u + a\Delta u + u_{tt} + cu = f(x,t,u,\dots,u_{x_i},\dots,u_{x_ix_j},\dots,u_t), \quad /1/$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ (2_1) \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \ (2_2)$$

$$u\big|_S = 0, \ (3_1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_S = 0 \ (3_2)$$

a, c – деякі сталі.

Розв"язок задачі шукаємо у класі функцій

$$u\in B_1 = C^1(J, L_2(D))\cap C(J, H^2(D)).$$

Розглянемо обмежений циліндр $Q_T=\{x\in D,\ 0<t<T\}$ і позначимо через D_τ його перетин площиною $t=\tau$.

Нехай $u(x,t)\in C^{4,2}(Q)\cap C^{2,1}(Q\cup S\cup D_0)$ – класичний розв"язок задачі. Вважаємо, що права частина рівняння $f\in L_2(Q_T)$

для довільної функції $u\in B_1$ і довільного $T>0$. Детальніше ці умови сформулюємо пізніше. Тоді легко показати, що $u(x,t)$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\iint\limits_{Q_T}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_i\partial x_j}-a\nabla u\nabla\vartheta+cu\vartheta\Big]dxdt=\iint\limits_{Q_T} f\vartheta\,dxdt+\int\limits_{D_0}\psi\vartheta\,dx \qquad /4/$$

для довільних $\vartheta(x,t)\in H^{2,1}(Q_T)$, що задовольняють умови:

$$\vartheta\big|_S=0,\quad \vartheta\big|_{D_T}=0. \qquad /5/$$

Функція $u(x,t)\in H^{2,1}(Q_T)$, яка відповідає початковій умові /2/, граничну умову /3/ і тотожність /4/ для всіх $\vartheta(x,t)\in H^{2,1}(Q_T)$, що задовольняють умови /5/, називається узагальненим розв"язком задачі /1/ – /3/ в Q_T.

Отже, класичний у Q розв"язок задачі – це узагальнений розв"язок цієї задачі в Q_T для довільного $T>0$.

Узагальненим розв"язком в Q задачі /1/ – /3/ називатимемо функцію $u(x,t)$, яка є узагальненим розв"язком цієї задачі в Q_T для довільного $T>0$.

Можна показати, що узагальнений розв"язок задачі /1/ – /3/ класу $C^{4,2}(Q)\cap C^{2,1}(Q\cup S\cup D_0)$ є її класичним розв"язком.

Розглянувши задачу $\Delta^2\vartheta+a\Delta\vartheta+c\vartheta=-\lambda\vartheta$,

$$\vartheta\big|_S=0,\quad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial n^2}\Big|_S=0,$$

аналогічно як у праці [1], можна показати, що існує ортонормована в $L_2(D)$ система $\vartheta_1,\vartheta_2,\dots$, яка складається з узагальнених власних функцій задачі, що відповідають власним значенням $\lambda_1,\lambda_2,\dots$. У $\tilde H^2(D_t)=\{u\in H^2(D_t),\ u\big|_S=0\}$ вводимо еквівалентний при $a<0$ і $c>0$ скалярний добуток

$$(u,\vartheta)=\int\limits_{D_t}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_i\partial x_j}-a\nabla u\nabla\vartheta+cu\vartheta\Big)dx$$

і доводимо ортонормованість в $\tilde H^2(D_t)$ системи власних функцій $\vartheta_1/\sqrt{-\lambda_1}$, $\vartheta_2/\sqrt{-\lambda_2},\dots$

Існує така константа $L>0$, що для довільної функції

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s| f_s^2 \le L \|f\|^2_{\tilde{H}_2(D)}, \quad f_s = (f, \varphi_s)_{L_2(D)}. \qquad /6/$$

Розглянемо спочатку лінійну задачу

$$\Delta^2 u + a\Delta u + u_{tt} + cu = F(x,t) \qquad /1'/$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad u_t\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad /2'/$$

$$u\Big|_S = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_S = 0. \qquad /3'/$$

Позначимо через B банахів простір функцій

$$u \in C^1(J, L_2(D)) \cap C(J, H^2(D)),$$

обмежених по нормі $\|u\|_B = \sup_{t\in J} \|u\|_{H^2(D_t)} + \sup_{t\in J} \|u_t\|_{L_2(D_t)}$.

Т е о р е м а I.

Нехай $a<0,\ c>0$

$$\varphi \in \tilde{H}^2(D),\ \psi \in L_2(D),\ F \in C(J, L_2(D))$$

та існує таке $\varepsilon>0$, що $\int_0^\infty \|F\|^2_{L_2(D_t)} (1+t)^{1+\varepsilon} dt$ збіжний. Тоді існує узагальнений розв"язок задачі /I'/ /2'/ /3'/, зображається він у вигляді ряду по узагальнених власних функціях задачі, а для нього має місце оцінка

$$\|u\|_B \le C_0 \Big(\|\varphi\|_{H^2(D)} + \|\psi\|_{L_2(D)} + \Big(\int_0^\infty \|F\|^2_{L_2(D_t)} (1+t)^{1+\varepsilon} dt \Big)^{1/2} \Big). \qquad /7/$$

Д о в е д е н н я .

Розглянемо $S_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} U_k(t)\varphi_k(x)$,

де $U_k(t) = \varphi_k \cos\sqrt{-\lambda_k}\, t + \dfrac{\psi_k}{\sqrt{-\lambda_k}} \sin\sqrt{-\lambda_k}\, t +$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^t F_k(\tau) \sin\sqrt{-\lambda_k}\,(t-\tau)\, d\tau. \qquad /8/$$

Легко перевірити, що функція $S_N(x,t)$ задовольняє тотожність

$$\int_{Q_T} \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 S_N}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - a \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_N}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - S_{N_t} \varphi_t + c S_N \varphi \Big) dx dt =$$

$$= \int_{Q_T} \sum_{k=1}^{N} F_k(t) \varphi_k(x) \varphi(x) dx dt + \int_{D_0} \sum_{k=1}^{N} \psi_k \varphi_k(x) \varphi(x) dx. \qquad /9/$$

Покажемо, що послідовність $\{S_N\}$ збіжна у B. З /8/ маємо

$$U_k^2(t)\le C_1\left(\varphi_k^2+|\lambda_k|^{-1}\psi_k^2+|\lambda_k|^{-1}\int_0^\infty F_k^2(t)(1+t)^{1+\varepsilon}dt\right)$$

$$U_k'^2(t)\le C_2\left(|\lambda_k|\varphi_k^2+\psi_k^2+\int_0^\infty F_k^2(t)(1+t)^{1+\varepsilon}dt\right). \qquad /10/$$

Оскільки система $\phi_1, \phi_2, \dots$ ортонормована у $L_2(D_t)$, а система $\phi_1/\sqrt{-\lambda_1}, \phi_2/\sqrt{-\lambda_2}, \dots$ ортонормована в $H^1(D_t)$, то для довільних M, N і $t>0$ можна одержати оцінку

$$\|S_N(x,t)-S_M(x,t)\|_B^2\le C_3\sum_{k=N+1}^{N}\left(|\lambda_k|\varphi_k^2+\psi_k^2+\int_0^\infty F_k^2(t)(1+t)^{1+\varepsilon}dt\right), \qquad /11/$$

і для довільного N і $t>0$ таку оцінку

$$\|S_N(x,t)\|_B^2\le C_4\sum_{k=1}^{N}\left(|\lambda_k|\varphi_k^2+\psi_k^2+\int_0^\infty F_k^2(t)(1+t)^{1+\varepsilon}dt\right). \qquad /12/$$

Для функції $\varphi\in\tilde H^2(D)$ можемо використати нерівність /6/, $\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|\varphi_k^2\le L\|\varphi\|_{\tilde H^2(D)}$, а для функції ψ і F – рівність Парсеваля.

Як видно з /11/, збіжність цих рядів забезпечує фундаментальність послідовності $\{S_N(x,t)\}$ у повному просторі B. Отже, сума ряду $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}U_k(t)\phi_k(x)\in B$.

Очевидно, що $u(x,t)$ задовольняє початкову умову /3_1/ і граничну умову /2_1/.

Використовуючи той факт, що послідовність, збіжна в нормі простору B, збігається також у просторі $H^{2,1}(Q_T)$ при довільному $T>0$, можемо перейти до границі у тотожності /9/ при $N\to\infty$.

Отже, $u(x,t)$ задовольняє тотожність /4/ для будь-яких функцій $\phi(x,t)\in H^{2,1}(Q_T)$ таких, що $\phi|_S=0$, $\phi|_{D_T}=0$.

Таким чином, $u(x,t)$ – узагальнений розв"язок задачі /1'/, /2/, /3/.

Щоб одержати апріорну оцінку /7/, треба в нерівності /12/ перейти до границі при $N\to\infty$. Теорему доведено.

Повернемось до вихідної задачі /1/-/3/. Розв"язок задачі шукаємо у класі функцій

$$M = \{u \in B, \ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \ \|u\|_B \leq K\}.$$

Введемо позначення

$$f(x,t,u,\ldots,u_{x_i},\ldots,u_{x_i x_j},\ldots,u_t) = F(x,t).$$

Будемо говорити, що функція f задовольняє умови типу Ліпшіца, якщо існують сталі L_1, L_2, ε такі, що

$$\|F\|_{L_2(D_t)} \leq L_1 \|u\|_B \,/\, (1+t)^{1+\varepsilon},$$

$$\|F_1 - F_2\|_{L_2(D_t)} \leq L_2 \|u_1 - u_2\|_B \,/\, (1+t)^{1+\varepsilon},$$

де

$$F_k(x,t) = f(x,t,u_k,\ldots,u_{kx_i},\ldots,u_{kx_i x_j},\ldots,u_{k_t}).$$

Теорема 2.

Нехай виконуються такі умови:

1/ $a<0,\ c>0;\ \varphi \in \tilde{H}^2(D),\ \psi \in L_2(D)$.

2/ $f(x,t,\xi)$ визначена на $D \times J \times R^m$, $(m = n^2+n+2)$; для довільних $\xi \in R^m$, $t \in J$ функція $x \to f(x,t,\xi)$ вимірна на D; майже для всіх $x \in D$ функція $(t,\xi) \to f(x,t,\xi)$ неперервна на $J \times R^m$ і має місце оцінка

$$|f(x,t,\xi)| \leq K'\Big(g(x,t) + \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|\Big), \ \text{де} \ g(x,t) \in C(J, L_2(D));$$

3/ f задовольняє умови типу Ліпшіца;

4/ існує $\eta,\ 0<\eta<1$ ті $(\|\varphi\|_{\tilde{H}^2(D)} + \|\psi\|_{L_2(D)}) \leq \eta K;$

$$C_0(\eta + L_1/\sqrt{\varepsilon}) \leq 1 \quad і \quad C_0 \cdot L_2/\sqrt{\varepsilon} < 1.$$

Тоді змішана задача /1/-/3/ має єдиний розв"язок $u \in M$.

Доведення. На основі міркувань, проведених для лінійного випадку, розв"язок задачі можна розглядати як нерухому точку перетворення $A: u \to \sigma$

$$\sigma = Au = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)\,\sigma_k(x), \qquad /13/$$

де $U_k(t)$ дається виразом /8/. Використовуючи перші дві умови теореми, легко показати, що для довільної функції $u \in B$ її образ $Au \in B$. З виразу /8/ для $U_k(t)$ очевидно, що $Au|_{t=0} = \varphi(x)$ і $Au_t|_{t=0} = \psi(x)$.

Скориставшись оцінкою /7/, одержимо

$$\|Au\|_B \le C_0(\|\varphi\|_{\overset{\circ}{H}^2(D)} + \|\psi\|_{L_2(D)} + (\int_0^\infty \|F\|^2_{L_2(D_t)} (1+t)^{1+\varepsilon} dt)^{1/2}) \le$$

$$\le C_0(\eta K + \|u\|_B L_1/\sqrt{\varepsilon}) \le C_0(\eta + L_1/\sqrt{\varepsilon}) K \le K$$ для всіх $u \in M$.

Отже, перетворення A переводить повний метричний простір M у себе. A стискаюче відображення. У цьому легко переконатись

$$\|Au_1 - Au_2\|_B \le C_0(\int_0^\infty \|F_1 - F_2\|_{L_2(D_t)} (1+t)^{1+\varepsilon} dt)^{1/2} \le$$

$$\le C_0 \|u_1 - u_2\|_B L_2/\sqrt{\varepsilon} \le r\|u_1 - u_2\|_B,$$

де $0 < r = C_0 L_2/\sqrt{\varepsilon} < 1$.

Згідно з принципом стискаючих відображень існує єдина нерухома точка перетворення A, яка і є узагальненим розв"язком задачі $u \in B$. Причому $\|u\|_B \le K$. Теорему доведено.

Список літератури: 1. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1976. 2. Худавердиев К.И., Тахиров Б.О. Исследование сильно обобщенного решения многомерной смешанной задачи с общими краевыми условиями для гиперболического уравнения с нелинейной операторной правой частью. - Изв. АН АзССР, сер. физ.техн. и мат. наук, 1980, № 2.

Стаття надійшла до редколегії 02.02.82