УДК 517.946

Т.О.Мельник

ЗАДАЧА З НЕВІДОМОЮ ГРАНИЦЕЮ

ДЛЯ ГІПЕРБОЛО-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Нехай прямокутник $G=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2: -1<x<1,\ 0<t<T,\ T>0\}$ деякою гладкою кривою $\gamma: x=\varphi(t)$, $(\varphi(0)=0, -1<\varphi(t)<1$ для всіх $t\in[0,T])$ розділяється на дві компоненти G_1 і G_2. Ставиться задача про знаходження функцій $u_1(x,t)$ в G_1, $u_2(x,t)$ в G_2 і $\varphi(t)$ на $]0,T]$ таких, щоб справджувались рівняння

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-a_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=b_1(x,t)u_1+f_1(x,t) \quad \text{в} \quad G_1, \qquad /1/$$

рівняння

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=b_2(x,t)u_2+f_2(x,t) \quad \text{в} \quad G_2, \qquad /2/$$

початкові умови

$$u_1(x,0)=g_1(x),\ \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t}=h_1(x),\ x\in[-1,0],\ u_2(x,0)=g_2(x),\ x\in[0,1], \qquad /3/$$

крайові умови на бічних сторонах

$$u_1(-1,t)=H_1(t),\ u_2(1,t)=H_2(t),\ t\in[0,T], \qquad /4/$$

умови спряження на γ

$$u_1(\varphi(t),t)=u_2(\varphi(t),t),\ \left[m_1(t)\frac{\partial u_1}{\partial x}-m_2(t)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right]_{x=\varphi(t)}=H(t),\ t\in[0,T], \qquad /5/$$

додаткова умова на γ

$$\varphi''(t)=n_1(t)u_1(\varphi(t),t)+n_2(t)\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\varphi(t)}+f(t),$$
$$\varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=\varphi_0,\ t\in[0,T] \qquad /6/$$

і умова $|\varphi'(t)|<a_1$ для всіх $t\in[0,T]$. /7/

Тут a_1 і a_2 – задані додатні сталі; $b_i(x,t)$, $f_i(x,t)$ – задані неперервні в G_i функції $(i=1,2)$; $g_1(x), h_1(x)$ і $g_2(x)$ – задані неперервні відповідно на $[-1,0]$ і $[0,1]$ функції;

$h_i(t),\ m_i(t),\ n_i(t),\ H(t),\ \ell(t)$ – задані неперервні на $[0,T]$ функції; φ_0 – задане число таке, що $|\varphi_0| < a_1$.

Для розв"язування задачі використовуємо метод характеристик, застосований у праці [1] для гіперболічних рівнянь, і метод потенціалів для параболічних рівнянь в областях з криволінійною границею [2, 3]. Якщо продовжити функції f_1 і f_2 на всю смугу $\{-\infty < x < \infty,\ 0 \le t \le T\}$, а функції $g_1,\ g_2,\ h_1$ на всю числову вісь, а також записати розв"язки відповідних задач Коші /1/, /3/ і /2/ /3/ і зробити належні заміни шуканих функцій, то прийдемо до задачі вигляду /1/ – /7/, де $f_i \equiv 0$, $g_i \equiv 0$, $h_i \equiv 0$, $(i=1,2)$. Залишивши ці ж нумерації і позначення, вважатимемо без обмеження загальності, що $T \le \frac{1}{2} a_1$. Приймемо

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\varphi(t)} = v_1(t), \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\varphi(t)} = v_2(t). \qquad /8/$$

Для розв"язку $u_1(x,t)$ рівняння /1/ в G_1 з першими двома початковими умовами /3/, першою граничною умовою /4/ і першою умовою /8/ методом характеристик одержимо співвідношення:

$$u_1(x,t) = \begin{cases} H_1\left(t - \frac{1+x}{a_1}\right) + \frac{1}{2a_1} \int\limits_0^{t-\frac{1+x}{a_1}} d\tau \int\limits_{-x+a_1(t-\tau)-2}^{x+a_1(t-\tau)} b_1(y,\tau)\, u_1(y,\tau)\, dy + \\ + \frac{1}{2a_1} \int\limits_{t-\frac{1+x}{a_1}}^{t} d\tau \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_1(t-\tau)} b_1(y,\tau)\, u_1(y,\tau)\, dy, \quad -1 \le x < a_1 t - 1; \\ \\ \frac{1}{2a_1} \int\limits_0^{t} d\tau \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_1(t-\tau)} b_1(y,\tau)\, u_1(y,\tau)\, dy, \quad a_1 t - 1 \le x \le -a_1 t; \end{cases} \qquad /9/$$

$$\begin{cases} \int\limits_0^{\alpha(x+a_1t)} (\varphi'(\tau)+a_1)\,\vartheta_1(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2a_1}\int\limits_0^{\alpha(x+a_1t)} d\tau \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_1t+a_1\tau-2a_1\alpha(x+a_1t)} b_1(y,\tau)\,u_1(y,\tau)\,dy + \\ + \frac{1}{2a_1}\int\limits_{\alpha(x+a_1t)}^{t} d\tau \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_1(t-\tau)} b_1(y,\tau)\,u_1(y,\tau)\,dy - \int\limits_0^{\alpha(x+a_1t)} d\tau \int\limits_{\varphi(\alpha(x+a_1t))-a_1\alpha(x+a_1t)+a_1\tau}^{\alpha(x+a_1t)\varphi(\tau)} \frac{b_1(y,\tau)\,u_1(y,\tau)\,dy}{\varphi'(\beta(y-a_1\tau))-a_1} \\ \\ -a_1t \le x \le \varphi(t), \end{cases}$$

де $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ – обернені функції відповідно до функцій $t \to \varphi(t)+a_1t$ і $t \to \varphi(t)-a_1t$. Для того щоб функція u_1, визначена із системи інтегральних рівнянь /9/ /при довільно заданій неперервно диференційованій функції ϑ_1 /, була двічі неперервно диференційована в G_1, необхідно виконання умов узгодження:

$$H_1(0)=H_1'(0)=H_1''(0)=0, \qquad /10/$$

$$\vartheta_1(0)=\vartheta_1'(0)=0. \qquad /11/$$

Нехай $\varphi(t)$ – довільно задана, два рази неперервно диференційована на $[0,T]$ функція, що задовольняє умову /7/ і $\varphi(0)=0, \varphi'(0)=\varphi_0$. Позначимо через $R(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна рівняння

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = F(x,t)$$

з третьою початковою умовою /3/, другою граничною умовою /4/ і другою умовою /8/. Тоді задача знаходження розв"язку $u_2(x,t)$ рівняння /2/ в G_2 з тими самими умовами еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u_2(x,t)=\int\limits_0^t R(x,t,\varphi(\tau),\tau)\,\vartheta_2(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t \frac{\partial R(x,t,l,\tau)}{\partial \xi} H_2(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{\varphi(\tau)}^{1} K(x,t,\xi,\tau)\, b_2(\xi,\tau)\, u_2(\xi,\tau)\, d\xi .$$

З /9/, /I2/ і другої умови /5/ отримуємо $m_1(t)\nu_1(t)-m_2(t)\nu_2(t)=H(t)$. Припустимо, що $m_1(t)\neq 0$, $m_2(t)\neq 0$ при всіх $t\in[0,T]$. Тоді

$$\nu_2(t)=\frac{m_1(t)}{m_2(t)}\nu_1(t)-\frac{H(t)}{m_2(t)}=m(t)\nu_1(t)+h(t).$$

Підставляємо цей вираз в /I2/, а потім /I2/ і /9/ в першу умову /5/. Отримаємо

$$\int_0^t R(\varphi(t),t,\varphi(\tau),\tau)\, m(\tau)\nu_1(\tau)\,d\tau=\int_0^t(\varphi'(\tau)+a_1)\nu_1(\tau)\,d\tau+P(t,u_1,u_2), \qquad /I3/$$

де P – відомий лінійний інтегральний оператор Вольтерра. Оскільки при $t\to\tau$ ядро R поводить себе як $c(t-\tau)^{1/2}$, то інтегральне рівняння /I3/ звичайним способом зводиться до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду

$$\nu_1(t)=\int_0^t R_1(t,\tau)\nu_1(\tau)\,d\tau+P_1(t,u_1,u_2), \qquad /I4/$$

де P_1 знову є оператором Вольтерра. Не трудно переконатись, що будь-який розв"язок отриманого рівняння задовольняє умови /I/, якщо має місце /I0/ і

$$H(0)=H'(0)=H_2(0)=0. \qquad /I5/$$

Знайшовши функції ν_1 і ν_2 з /I4/ і підставивши їх значення в /9/ і /I2/, для розв"язку вихідної задачі отримуємо нелінійну систему інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра другого роду /6/, /9/, /I2/. Доводимо, що для малих значень змінної t ця система розв"язна за методом ітерацій і будь-який розв"язок її задовольняє умову /7/. Таким чином доведено наступну теорему.

Т е о р е м а . Припустимо, що: а/ функції b_i, f_i неперервні та неперервно диференційовані в $\bar{G}_i$ $(i=1,2)$; б/ функції g, g_1', g_1'', h_1, h_1' і g_2 неперервні відповідно на

$[-1,0]$ і $[0,1]$; в/ функції m_i , m_i' , H , H' H_1, H_1' , H_1'' , H_2 неперервні на $[0,T]$; г/ функції η_1, η_2 і f^1 неперервні на $[0,T]$; д/ виконані умови узгодження /10/ і /14/. Тоді задача /1/ – /7/ має класичний розв"язок.

Список літератури: 1. Мельник Т.О. Спряження розв"язків гіперболічного рівняння другого порядку вздовж невідомої границі. – ДАН УРСР, сер. А, 1980, № 12. 2. Расулов Т.М. Плоские смешанные задачи для параболических систем в областях с переменными по времени границами. – Диф. уравн., 1979, т.15, № 12. 3. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.

Стаття надійшла до редколегії 29.03.82

УДК 517.196

І.М.Колодій, Д.І.Баб"ячок

НЕРІВНІСТЬ ХАРНАКА ДЛЯ НЕВІД"ЄМНИХ ОБМЕЖЕНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДУ З ВИРОДЖЕННЯМ

Вивчаємо властивості узагальнених розв"язків параболічних рівнянь

$$
\begin{gathered}
u_t - \operatorname{div} A(x,t,u,u_x) = B(x,t,u,u_x), \\
x = (x_1, \dots, x_n),\ u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \\
A(x,t,u,u_x) = (A_1(x,t,u,u_x), \dots, A_n(x,t,u,u_x)).
\end{gathered} \qquad /1/
$$

Використовуючи відому методику та техніку робіт Ю.Мозера [1], [2], Серіна Д. Аронсона Д. [3] і Кружкова С.Н. [4], доведемо нерівність Харнака для невід"ємних обмежених узагальнених розв"язків рівняння /1/. Ця праця є продовженням досліджень, розпочатих у статті [5].

Нехай Ω – обмежена область в n – мірному евклідовому просторі E^n векторів $x = (x_1, \dots, x_n)$. Для кулі $\{x \in E^n, |x| < r\}$