$[-1,0]$ і $[0,1]$; в/ функції m_i, m_i', H, H', H_1, H_1', H_1'', H_2 неперервні на $[0,T]$; г/ функції η_1, η_2 і f^1 неперервні на $[0,T]$; д/ виконані умови узгодження /10/ і /14/. Тоді задача /1/ – /7/ має класичний розв"язок.

Список літератури: 1. Мельник Т.О. Спряження розв"язків гіперболічного рівняння другого порядку вздовж невідомої границі. – ДАН УРСР, сер. А, 1980, № 12. 2. Расулов Т.М. Плоские смешанные задачи для параболических систем в областях с переменными по времени границами. – Диф. уравн., 1979, т.15, № 12. 3. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.

Стаття надійшла до редколегії 29.03.82

УДК 517.196

І.М.Колодій, Д.І.Баб"ячок

НЕРІВНІСТЬ ХАРНАКА ДЛЯ НЕВІД"ЄМНИХ ОБМЕЖЕНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДУ З ВИРОДЖЕННЯМ

Вивчаємо властивості узагальнених розв"язків параболічних рівнянь

$$u_t - \operatorname{div} A(x,t,u,u_x) = B(x,t,u,u_x),$$
$$x = (x_1,\ldots,x_n),\ u_x = (u_{x_1},\ldots,u_{x_n}), \qquad /1/$$
$$A(x,t,u,u_x) = (A_1(x,t,u,u_x),\ldots,A_n(x,t,u,u_x)).$$

Використовуючи відому методику та техніку робіт Ю.Мозера [1], [2], Серіна Д. Аронсона Д. [3] і Кружкова С.Н. [4], доведемо нерівність Харнака для невід"ємних обмежених узагальнених розв"язків рівняння /1/. Ця праця є продовженням досліджень, розпочатих у статті [5].

Нехай Ω – обмежена область в n – мірному евклідовому просторі E^n векторів $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Для кулі $\{x \in E^n, |x| < r\}$

введемо позначення $\mathcal{K}(\tau)$. У просторі E^{n+1} векторів (x,t) через Q і $Q(\tau)$ позначимо циліндри $\Omega\times(T_1,T_2)$, $\mathcal{K}(\tau)\times(-\tau^2,0)$. Для будь-яких чисел $p\geq 1$ і $q\geq 1$ позначимо через $L_{p,q}(Q)$ банаховий простір вимірних у Q функцій з нормою

$$\|u\|_{p,q,Q}=\left(\frac{1}{T_2-T_1}\int_{T_1}^{T_2}\left(\frac{1}{mes\,\Omega}\int_{\Omega}|u|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{1/q}.$$

Припустимо, що функції $A(x,t,u,\bar p)$, $B(x,t,u,\bar p)$ для всіх значень $(x,t)\in Q$ і всіх значень u і $\bar p=(p_1,\dots,p_n)$ задовольняють умови

$$A(x,t,u,\bar p)\bar p\geq a_1(u)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|p_i|^2-g(x,t,u),$$

$$|A(x,t,u,\bar p)|\leq a_2(u)\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x,t)|p_i|+\ell(x,t,u), \qquad /2/$$

$$|B(x,t,u,\bar p)|\leq a_2(u)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|p_i|^2+f(x,t,u),$$

де $\lambda_i(x,t)$, $\mu_i(x,t)$, $g(x,t,u)$, $\ell(x,t,u)$, $f(x,t,u)$ - невід"ємні функції; $a_1(u)$, $a_2(u)$ - додатні функції, причому існують постійні $\bar a_1^{-1}$ і $\bar a_2$ такі, що $a_1^{-1}(u)\leq \bar a_1^{-1}$, $a_2(u)\leq \bar a_2$, коли $|u|\leq M$. Функції $\lambda_i^{-1}(x,t)\in L_{t_i,t_0}(Q)$; $\mu_i(x,t)$, $\mu_i^2(x,t)\lambda_i^{-1}(x,t)\in L_{p,q}(Q)$; $g(x,t,u)$, $\ell(x,t,u)$, $f(x,t,u)\in L_{p,q}(Q)$, коли $|u|\leq M$, причому числа p, q, t_i, t_0 такі, що

$$\frac{p}{q}>\theta, \qquad /3/$$

$$\theta=n\left(2-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{t_0}\right),\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}<2,\ n\geq 2,\ \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1.$$

Позначимо

$$Q^*(\rho):|x|<\frac{\rho}{\sqrt2},\ \left|t+\frac{3\tau^2}{2}\right|<\frac{\rho^2}{2};\quad D^+(\tau)=Q\left(\frac{\tau}{2}\right);$$

$$D^-(\tau)=Q^*\left(\frac{\tau}{\sqrt2}\right);\ R^+(\tau)=Q(\tau);\ R^-(\tau)=Q^*(\tau);$$

$$M(\tau)=M(Q(\tau))=\sum_{i=1}^{n}\|\mu_i^2\lambda_i^{-1}\|_{p,q,Q(\tau)};\ P(\tau)=P(Q(\tau))=\sum_{i=1}^{n}\|\lambda_i^{-1}\|_{t_i,t_0,Q(\tau)};$$

$$\varkappa(\tau)=\left(\tau^2\sum_{i=1}^{n}\|\ell_i\mu_i^{-1}\|_{p,q,Q(\tau)}\right)^{\frac12}+\left(\tau^2\|g\|_{p,q,Q(\tau)}\right)^{\frac12}+\tau^2\|f\|_{p,q,Q(\tau)}.$$

Т е о р е м а . Нехай $u(x,t)$ невід"ємний узагальнений розв"язок * рівняння /1/ за умов /2/, /3/ у $Q(2r)\subset Q$ і $\operatorname{vrai\,max}\limits_{Q(2r)} |u(x,t)|\le M$. Тоді

$$\operatorname*{vrai\,max}_{D^-(r)} u(x,t)\le C\big(\operatorname*{vrai\,min}_{D^+(r)} u(x,t)+\varkappa(2r)\big), \qquad /4/$$

де $C=C(n,t_i,t_0,a_1^{-1},a_2,p,q,M,P(2r),M(2r),\|g\|_{p,q,Q(2r)})$.

Д о в е д е н н я . Доведення цієї теореми дуже близьке до доведення відповідної теореми 3.1 праці [5]. Нехай $\bar u=u+\varkappa+\varepsilon$, $\varkappa=\varkappa(2r),\ \varepsilon>0$; $J(u)=\bar u^{\alpha-1}e^{\sigma\bar u\,\mathrm{sign}(\alpha-1)}$, $\alpha\neq 1$, $\sigma>0$,

$\varphi=\eta^2 J(u)\chi(t;\tau_1,\tau_2)$, де $\eta=\eta(x,t)$ – гладка функція, що обертається в нуль на нижній основі та боковій поверхні циліндра $Q(2r)$; $\chi(t;\tau_1,\tau_2)$ – характеристична функція інтервалу $\tau_1,\tau_2\in(-4r^2,0)$. Оцінимо вираз $(A\varphi_x-B\varphi)\,\mathrm{sign}(\alpha-1)$, використавши нерівність Юнга і вважаючи, що $\sigma=\frac{a_2}{a_1}$, $E=e^{\sigma u\,\mathrm{sign}(\alpha-1)}$:

$$(A\varphi_x-B\varphi)\,\mathrm{sign}(\alpha-1)\ge\eta^2 J'(u)\,\mathrm{sign}(\alpha-1)\Big(a_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|\bar u_{x_i}|^2-$$
$$-g(x,t,u)\Big)-2\eta|\eta_x|J(u)\Big(a_2\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x,t)|\bar u_{x_i}|+l(x,t,u)\Big)-$$
$$-\eta^2 J(u)\Big(a_2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|\bar u_{x_i}|^2+f(x,t,u)\Big)\ge\Big(\frac12 a_1|\alpha-1|\eta^2\bar u^{\alpha-2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|\bar u_{x_i}|^2-$$
$$-\eta^2\bar u^{\alpha}\Big(\frac{a_2}{a_1}\frac{g(x,t,u)}{\varkappa}+\frac{f(x,t,u)}{\varkappa}+|\alpha-1|\frac{g(x,t,u)}{\varkappa^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{l(x,t,u)}{\mu_i(x,t)}\frac{1}{\varkappa^2}\Big)-$$
$$-|\eta_x|^2\bar u^{\alpha}\Big(\frac{8a_2^2}{a_1}\frac{1}{|\alpha-1|}+4a_2^2\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}.$$

Якщо первісну $J(u)$ позначити $\mathcal{H}(u)$, то, як і в праці [5], з інтегральної тотожності й оцінки /5/ випливає нерівність

$$\mathrm{sign}(\alpha-1)\Big(\int_{K(2r)}\eta^2\mathcal{H}(u)\,dx\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}+(\alpha-1)\frac{a_1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{K(2r)}\eta^2\bar u^{\alpha-2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|\bar u_{x_i}|^2E\,dx\,dt\le$$

* Означення узагальненого розв"язку наведено у праці [5].

$$\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\mathcal{K}(2\tau)} \eta^2 \bar{u}^{-\alpha}\Big(\frac{a_2}{a_1}\,\frac{g(x,t,u)}{\varkappa}+\frac{f(x,t,u)}{\varkappa}+|\alpha-1|\,\frac{g(x,t,u)}{\varkappa^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\ell_i^2(x,t,u)}{\mu_i(x,t)}\frac{1}{\varkappa^2}\Big)E\,dx\,dt+$$

$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\mathcal{K}(2\tau)} |\eta_x|^2\bar{u}^{-\alpha}\Big(\frac{8a_2^2}{a_1}\,\frac{1}{|\alpha-1|}+4a_2^2\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\,E\,dx\,dt+2\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\mathcal{K}(2\tau)}\eta\,|\eta_t|\,|\mathcal{H}(u)|\,dx\,dt. \qquad /6/$$

Виберемо $\mathcal{H}(u)=\int_{u_0}^{u}\mathcal{I}(u)\,du$, де $u_0=\begin{cases}0 & \text{при } \alpha\geq 0,\\ M & \text{при } \alpha<0.\end{cases}$

Неважко перевірити, що при $\alpha\neq 0$ і $\alpha\neq 1$ мають місце оцінки:

$$\frac{\bar{u}^{\alpha}-(\varkappa+\varepsilon)^{\alpha}}{\alpha}\leq \mathcal{H}(u)\leq e^{-bM}\,\frac{\bar{u}^{\alpha}}{\alpha},\quad \alpha>1;$$

$$e^{-bM}\,\frac{\bar{u}^{\alpha}-(\varkappa+\varepsilon)^{\alpha}}{\alpha}\leq \mathcal{H}(u)\leq\frac{\bar{u}^{\alpha}}{\alpha},\quad 0<\alpha<1;$$

$$e^{-bM}\,\frac{\bar{u}^{\alpha}-(\varkappa+M+\varepsilon)^{\alpha}}{|\alpha|}\leq -\mathcal{H}(u)\leq\frac{\bar{u}^{\alpha}}{|\alpha|},\quad \alpha<0.$$

При $\alpha>1$ і $v^2=\bar{u}^{\alpha}$ з нерівності /6/ отримуємо оцінку:

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t\in(-4\tau^2,0)}\int_{\mathcal{K}(\tau)}(\eta v)^2dx+\iint_{Q(2\tau)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\,|(\eta v)_{x_i}|^2dx\,dt\leq C\alpha^2\Big(1+\frac{1}{(\alpha-1)^2}\Big)\mathcal{M}, \qquad /7/$$

де

$$\mathcal{M}=\iint_{Q(2\tau)}\Big((\eta v)^2\Big(g(x,t,u)+\frac{f(x,t,u)}{\varkappa}+\frac{g(x,t,u)}{\varkappa^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\ell_i^2(x,t,u)}{\mu_i(x,t)}\frac{1}{\varkappa^2}+1\Big)+$$

$$+\Big(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\Big)|\eta_x|^2v^2+\eta|\eta_t|v^2\Big)\,dx\,dt. \qquad /8/$$

При $0<\alpha<1$ ліву частину нерівності /7/ можна оцінити зверху величиною $C\big(1+\frac{1}{(\alpha-1)^2}\big)\mathcal{M}$. Таким чином, при $\alpha>0$ і $\alpha\neq 1$ маємо

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t\in(-4\tau^2,0)}\int_{\mathcal{K}(2\tau)}(\eta v)^2dx+\iint_{Q(2\tau)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\,|(\eta v)_x|^2dx\,dt\leq C(1+\alpha^2)\Big(1+\frac{1}{(\alpha-1)^2}\Big)\mathcal{M}. \qquad /9/$$

Оцінка /9/ збігається з оцінкою /5.7/ праці [5].

При $\alpha<0$ і $v^2=\bar{u}^{\alpha}$ з нерівності /6/ одержуємо

$$\operatorname*{vraimax}_{t\in(-4\tau^2,0)}\int\limits_{K(2\tau)}(\eta v)^2dx+\iint\limits_{Q(2\tau)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|(\eta v)_{x_i}|^2dxdt\le C(\alpha-1)^2\mathfrak{M}. \qquad /10/$$

З нерівностей /9/, /10/ випливає справедливість леми 3.1 праці [5]. Доведення лем 3.2 і 3.4 праці [5] залишається без змін. Для доведення леми 3.3. [5] приймемо в /6/ $\alpha=0$, $v=-\mathcal{H}(u)$. Тоді одержимо

$$\int\limits_{\mathcal{K}(2\tau)}\eta^2 v\,dx\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}+\frac{1}{2}a_1\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\mathcal{K}(2\tau)}\eta^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|v_{x_i}|^2dxdt\le C\Big(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\mathcal{K}(2\tau)}\eta^2\Big(\frac{g(x,t,u)}{\varkappa^2}+$$

$$+g(x,t,u)+\frac{f(x,t,u)}{\varkappa}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\ell_i^2(x,t,u)}{\mu_i(x,t)}+\eta_x^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}+\eta|\eta_t|\,|v|\Big)dxdt\Big). \qquad /11/$$

Ця нерівність збігається з нерівністю /3.16/ праці [5]. Отже, з /11/, повторивши перетворення, наведені у праці [5], маємо

$$m\{(x,t)\in R^{+}(\tau),\ v>s-a+C(1+M(2\tau))\}+$$

$$+m\{(x,t)\in R^{-}(\tau),\ v<-s-a-C(1+M(2\tau))\}\le C\tau^{n+2}P^{\frac{1}{2}}(2\tau)\frac{1}{\sqrt{s}}. \qquad /12/$$

Враховуючи, що функція $v=-\mathcal{H}(u)$, $\mathcal{H}(u)=\int\limits_{0}^{u}\bar{u}^{-1}e^{-v\bar{u}}du$, а також нерівність $e^{-\delta M}\ln\bar{u}\le\mathcal{H}(u)\le\ln\bar{u}$ з /12/, отримуємо

$$m\{(x,t)\in R^{+}(\tau),\ \ln\bar{u}<-s+a-C(1+M(2\tau))\}+$$

$$+m\{(x,t)\in R^{-}(\tau),\ e^{-\delta M}\ln\bar{u}>s+a+C(1+M(2\tau))\}\le C\tau^{n+2}P^{\frac{1}{2}}(2\tau)\frac{1}{\sqrt{s}}. \qquad /13/$$

Нерівність /13/ аналогічна нерівності /3.6/ леми 3.3 праці [5]. Тепер залишилось повторити доведення теореми 3.1.[5] з тією лише різницею, що як функцію w на циліндрі $R^{-}(\tau)$ треба взяти функцію $\bar{u}^{e^{-\delta M}}e^{-a-C(1+M(2\tau))}$. Тоді одержуємо

$$\operatorname*{vraimax}_{D^{-}(\tau)}\bar{u}^{e^{-\delta M}}\operatorname*{vraimax}_{D^{+}(\tau)}\bar{u}^{-1}\le N_1N_2e^{2C(1+M(2\tau))} \qquad /14/$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати $\mu < 1$, тоді $\mu^{e^{-6\mu}} \geq \mu$, і з нерівності /I4/одержуємо оцінку /4/.

Список літератури: I. Кружков С.Н. Априорные оценки для обобщенных решений эллиптических и параболических уравнений. - ДАН СССР, 1963, I50, № 4. 2. Кружков С.Н., Колодий И.М. Априорные оценки и неравенство Харнака для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений. - Сиб. мат. журн. 1977, т.I8, № 3. 3. Aronson D.G., Serrin J. Local behavior of solutions of quasi-linear parabolic equations.- Arch. Rational. Mech. and Analysis, 1967, v.25. 4. Moser J. On pointwise estimate for parabolic differential equations.- Comm. Pure and Appl. Math., 1971, v.24, N5. 5. Moser J. A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations.- Comm. Pure and Appl. Math., 1960, v.13, N3.

Стаття надійшла до редколегії 30.I2.80

УДК 5I7.9I7

Л.М.Лісевич, Л.І.Блавацька

ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ КВАЗІЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПРАВОЮ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЮ ЧАСТИНОЮ

Розглянемо функціональну матрицю $\varphi(x) = [\varphi_{ij}(x)]$ виміру $m \times n$, елементи якої виміріні S^p - сумовні функції / $p \geq 1$ / в кожному скінченному інтервалі, а також норму

$$\|\varphi\| = \sum_{i,j} \left\{ \int_x^{x+1} |\varphi_{ij}(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad /1/$$

Приймемо

$$\rho_{S^p} \left\{ \varphi(x), g(x) \right\} = \sup_{-\infty < x < +\infty} \| \varphi(x) - g(x) \|.$$

Як відомо [3], матриця $\varphi(x)$ називається S^p - майже періодичною, якщо її елементи $\varphi_{ij}(x)$ S^p - майже періодичні функції. Іншими словами, матриця $\varphi(x)$ S^p - майже періодична, коли