Не зменшуючи загальності, можна вважати $\mu<1$, тоді $\mu^{e^{-6M}} \geq \mu$, і з нерівності /14/одержуємо оцінку /4/.

Список літератури: 1. Кружков С.Н. Априорные оценки для обобщенных решений эллиптических и параболических уравнений. – ДАН СССР, 1963, 150, № 4. 2. Кружков С.Н., Колодий И.М. Априорные оценки и неравенство Харнака для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений. – Сиб. мат. журн. 1977, т.18, № 3. 3. Aronson D.G., Serrin J. Local behavior of solutions of quasi-linear parabolic equations.– Arch. Rational. Mech. and Analysis, 1967, v.25. 4. Moser J. On pointwise estimate for parabolic differential equations.– Comm. Pure and Appl. Math., 1971, v.24, N5. 5. Moser J. A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations.– Comm. Pure and Appl. Math., 1960, v.13, N3.

Стаття надійшла до редколегії 30.12.80

УДК 517.917

Л.М.Лісевич, Л.І.Блавацька

ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ КВАЗІЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПРАВОЮ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЮ ЧАСТИНОЮ

Розглянемо функціональну матрицю $\varphi(x)=[\varphi_{ij}(x)]$ виміру $m\times n$, елементи якої виміні S^p – сумовні функції / $p\geq 1$ / в кожному скінченному інтервалі, а також норму

$$\|\varphi\| = \sum_{i,j}\left\{\int_x^{x+1}|\varphi_{ij}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad /1/$$

Приймемо

$$\rho_{S^p}\left\{\varphi(x), g(x)\right\} = \sup_{-\infty<x<+\infty}\|\varphi(x)-g(x)\|.$$

Як відомо [3], матриця $\varphi(x)$ називається S^p – майже періодичною, якщо її елементи $\varphi_{ij}(x)$ S^p – майже періодичні функції. Іншими словами, матриця $\varphi(x)$ S^p – майже періодична, коли для кожного $\varepsilon>0$ існує відносно щільна множина S^p, ε - майже періодів $\tau=\tau(\varepsilon)$ таких, що

$$\rho_{S^p}\{\varphi(x+\tau),\varphi(x)\}=$$

$$=\sup_{-\infty<x<\infty}\sum_{i,j}\left\{\int_x^{x+1}|\varphi_{ij}(t+\tau)-\varphi_{ij}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}<\varepsilon. \qquad /2/$$

Надалі S^p - майже періодичні функції $f(x)$ позначаємо $f(x)\in S^p$ - м.п.

Розглянемо тепер лінійну дійсну систему

$$\frac{dy}{dt}=Ay+f(t), \qquad /3/$$

де $y=colon(y_1,y_2,\ldots,y_n)$; $f=colon(f_1,f_2,\ldots,f_n)$; $A=[a_{ij}]$ - стала виміру $n\times n$ матриця.

Вважаємо, що

$$A=S^{-1}diag(P,Q)S,$$

де S - неособлива матриця; P і Q - відповідно матриці з додатними та від"ємними дійсними частинами характеристичних чисел λ_i матриці A, тобто $Re\lambda_j(P)>0$ $/j=1,2,\ldots,m/$, $Re\lambda_j(Q)<0$ $/j=m+1,\ldots,n/$.

Розглянемо матрицю

$$G(t)=\begin{cases}-S^{-1}diag(e^{Pt},0)S & \text{, коли } t<0,\\ S^{-1}diag(0,e^{Qt})S & \text{, коли } t>0.\end{cases} \qquad /4/$$

Матриця $G(t)$ має такі властивості [I]:

I^0. $G(+0)-G(-0)=E$, де E - одинична матриця;

2^0. $\|G(t)\|\leq Ce^{-\alpha|t|}$, $/t\neq 0/$, C,α - додатні сталі;

3^0. $\frac{d}{dt}G(t)=\dot{G}(t)=AG(t)$.

Зауважимо, що властивість 2^0 доведена у праці [I] для норми

$$\|G\|=\left\{\sum_{i,j}|g_{ij}|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad /5/$$

Властивість 2^0 має місце й у нормі /I/.

Т е о р е м а І. Якщо $Re\lambda_j(A)\neq 0, /j=1,2,\dots,n/$, а $f(t)\in S^p_{+\infty}$ – м.п. така, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\|f(t)\|dt = M<+\infty,$$

то існує єдиний обмежений на $J_t =]-\infty,+\infty[$ і S^p – майже періодичний розв"язок системи /3/, який описується формулою

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(t-\xi)f(\xi)d\xi. \qquad /6/$$

Д о в е д е н н я . Те, що /6/ – єдиний обмежений розв"язок системи /3/, доводиться так само, як у праці [I].

Доведемо, що в /6/ S^p – м.п. розв"язок. Нехай $\tau=\tau(\varepsilon)$ S^p, ε – м.п. функції $f(t)$. Тоді

$$\rho_{S^p}\{\eta(t+\tau),\eta(t)\}\leq$$
$$\leq \sup_{-\infty<t<+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\|G(t-\xi)\|\|f(\xi+\tau)-f(\xi)\|d\xi<$$
$$<\varepsilon C\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t-\xi|}d\xi\leq K\varepsilon,\ (K=const).$$

Тобто $\eta(t)$ S^p – м.п. Теорема доведена.

Розглянемо нелінійну дійсну систему

$$\frac{dy}{dt}=Ay+f(t,y), \qquad /7/$$

де $A=[a_{ij}]$ – стала виміру $n\times n$ матриця;

$y=(y_1,y_2,\dots,y_n);\ f=colon(f_1,f_2,\dots,f_n).$

Т е о р е м а 2. Нехай

1/ $Re\lambda_j(A)\neq 0$, де $\lambda_j\ /j=1,2,\dots,n/$ – характеристичні числа матриці A ;

2/ $f(t,y)\in C_{ty}\ /-\infty<t<+\infty;\|y\|<\infty/$;

3/ $\int_{-\infty}^{+\infty}\|f(t,0)\|dt=\Gamma<\infty$; /8/

4/ $\int_{-\infty}^{+\infty}\|f(t,y)-f(t,z)\|dt\leq L\|y-z\|$, /9/

$L>0$ досить мала константа;

5/ $f(t,y)\in S^p$ – м.п. змінної t рівномірно відносно y .

Тоді існує обмежений на $J_t =]-\infty, +\infty[$ і S^p – м.п. розв"язок системи /7/.

Доведення. Приймаючи $f(t,y)$ за вільний член, за аналогією до /6/ розглянемо інтегральне рівняння

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\xi) f(\xi, y(\xi)) d\xi, \qquad /10/$$

де функція $G(t)$ визначена /4/. Використовуючи умови 1/–4/ теореми та властивості функції $G(t)$ доводимо [1] існування обмеженого розв"язку $\eta(t)$ системи /7/, який є обмеженим розв"язком інтегрального рівняння /10/.

Доведемо, що цей розв"язок є S^p – м.п. Маємо

$$\rho_{S^p}\{y(t+\tau), y(t)\} = \sup_{-\infty<t<+\infty} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\xi)\left[f(\xi+\tau, y(\xi+\tau)) - f(\xi, y(\xi))\right] d\xi \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{-\infty<t<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-\xi)\| \, \|f(\xi+\tau, y(\xi+\tau)) - f(\xi, y(\xi+\tau))\| d\xi +$$

$$+ \sup_{-\infty<t<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-\xi)\| \, \|f(\xi, y(\xi+\tau)) - f(\xi, y(\xi))\| d\xi.$$

Нехай

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \|G(t)\| \leq M_1, \qquad /11/$$

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-\xi)\| d\xi \leq M_2. \qquad /12/$$

Якщо $\tau = \tau(\varepsilon)$ S^p – майже період функції $f(t,y)$ по t, то

$$\rho_{S^p}\{f(t+\tau, y), f(t,y)\} < \varepsilon.$$

Тоді, беручи до уваги /9/, /11/ і /12/, записуємо

$$\rho_{S^p}\{y(t+\tau), y(t)\} \leq \varepsilon \sup_{-\infty<t<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-\xi)\| d\xi +$$

$$+\mathcal{M}_1 \sup_{-\infty<t<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \| f(\xi, y(\xi+\tau)) - f(\xi, y(\xi)) \| d\xi \leq$$

$$\leq \varepsilon \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_1 L \rho_{S^p} \{ y(t+\tau), y(t) \}.$$

Звідси

$$\rho_{S^p} \{ y(t+\tau), y(t) \} \leq \frac{\mathcal{M}_2 \varepsilon}{1-\mathcal{M}_1 L}. \qquad /13/$$

Але за умовою $L>0$ досить мала константа. Приймаючи $0<\mathcal{M}_1 L<1$ та $\frac{\mathcal{M}_2}{1-\mathcal{M}_1 L}=N$, отримуємо

$$\rho_{S^p} \{ y(t+\tau), y(t) \} \leq N\varepsilon,$$

тобто $y(t)$ є S^p – м.п. функція з S^p, $N\varepsilon$ – майже періодом.

Список літератури: 1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. 2. Левитан Б.М. Почти периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. 3. Лісевич Л.М., Ковальчук Б.В. S^p – майже періодичні матриці та лінійна система диференціальних рівнянь з S^p – майже періодичною правою частиною. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1973, вип. 8.

Стаття надійшла до редколегії 21.06.82

УДК 517.512.2

Б.В.Ковальчук, З.Д.Фаріон

ДОСТАТНІ УМОВИ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ФУР"Є ДЕЯКИХ КЛАСІВ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

Нехай $F(x)=[f_{jk}(x)]$ $/-\infty<x<\infty/$ є S^p – майже періодична матриця $/p\geq 1$; якщо $p=1$, то замість S^1 пишемо S /.

У праці [2] вивчені умови збіжності рядів Фур"є S –майже періодичних матриць, показники Фур"є яких при відповідних властивостях розрідженості мають єдину граничну точку на нескінченності.