$$+\mathcal{M}_1 \sup_{-\infty<t<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \| f(\xi, y(\xi+\tau)) - f(\xi, y(\xi)) \| d\xi \leq$$

$$\leq \varepsilon \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_1 L \rho_{S^p} \{ y(t+\tau), y(t) \}.$$

Звідси

$$\rho_{S^p} \{ y(t+\tau), y(t) \} \leq \frac{\mathcal{M}_2 \varepsilon}{1-\mathcal{M}_1 L}. \qquad /13/$$

Але за умовою $L>0$ досить мала константа. Приймаючи $0<\mathcal{M}_1 L<1$ та $\frac{\mathcal{M}_2}{1-\mathcal{M}_1 L} = N$, отримуємо

$$\rho_{S^p} \{ y(t+\tau), y(t) \} \leq N\varepsilon,$$

тобто $y(t)$ є $S^p$ – м.п. функція з $S^p$, $N\varepsilon$ – майже періодом.


Список літератури: І. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. 2. Левитан Б.М. Почти периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. 3. Лісевич Л.М., Ковальчук Б.В. $S^p$ – майже періодичні матриці та лінійна система диференціальних рівнянь з $S^p$ – майже періодичною правою частиною. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1973, вип. 8.



Стаття надійшла до редколегії 21.06.82



УДК 517.512.2



Б.В.Ковальчук, З.Д.Фаріон


## ДОСТАТНІ УМОВИ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ФУР"Є ДЕЯКИХ КЛАСІВ $S^p$-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

Нехай $F(x)=[f_{jk}(x)]$ $/-\infty<x<\infty/$ є $S^p$ – майже періодична матриця $/p\geq 1$; якщо $p=1$, то замість $S^1$ пишемо $S$ /.

У праці [2] вивчені умови збіжності рядів Фур"є $S$ –майже періодичних матриць, показники Фур"є яких при відповідних властивостях розрідженості мають єдину граничну точку на нескінченності.

Знайдемо достатні умови абсолютної збіжності рядів Фур"є майже періодичних матриць з рідкими спектрами. Відзначимо, що для класу майже періодичних функцій Степанова ці питання досліджені у праці [I].

Оцінки модулів коефіцієнтів Фур"є $S$ – майже періодичних матриць. Якщо позначити через $\{\lambda_k\}$ / $k=1,2,\ldots;\ \lambda_k>0$ / послідовність абсолютних величин показників Фур"є $S$ – майже періодичної матриці $F(x)$, то ряд Фур"є такої матриці можна записати у вигляді

$$F(x)\sim\sum_{k\to-\infty}^{\infty}A_k e^{i\lambda_k x},$$

де $A_k=\mathcal{M}\{F(x)e^{-i\lambda_k x}\}$ – її матричні коефіцієнти Фур"є [3].

Позначимо через $S^*$ клас $S$ – майже періодичних матриць $F(x)$, показники Фур"є яких мають єдину граничну точку $\lambda^*$ на нескінченності. Якщо ж $\lambda^*\neq 0$, то, прийнявши $\lambda^*\neq 0$ і $\mathcal{M}\{F(x)\}=0$, позначимо клас таких матриць $F(x)$ через $B^*$.

Вважатимемо $F(x)\in B^*$ належить до класу $B_n^*$, якщо існують матриці $F_0(x), F_1(x), F_2(x),\ldots, F_n(x)$ такі, що

$$F_0(x)=F(x),\quad F'_{r+1}(x)=F_r(x)\qquad (r=0,1,\ldots,n-1),$$

де $F_r(x)\in B^*$ $(r=1,2,\ldots,n)$.

Введемо величину

$$\omega(x,\delta)=\sup_{|t|\le\delta}\|F(x+t)-F(x)\|_S .$$

Позначимо

$$\mathcal{J}(F_n,u)=\int_0^u\int_0^v F_n(x)\,dx\,dv.$$

Т е о р е м а I. Якщо показники Фур"є матриці $F(x)\in S^*$ мають властивості

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k\ge N(\lambda_k),\quad \lambda_k-\lambda_{k-1}\ge N(\lambda_k)\qquad (k=1,2,\ldots),$$

де $N(\lambda_k)\to\infty$ при $k\to\infty$ і

$$\omega(0,\delta) = O(\delta^{\alpha}) \qquad (\alpha > 0),$$

то

$$A_k = O\{[N(|\lambda_k|)]^{-\alpha}\}. \tag{1}$$

Т е о р е м а 2. Якщо показники Фур"є матриці $F(x) \in S^*$ мають властивості

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \geq \theta > 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

і

$$\omega(0,\delta) = O(\delta^{\alpha}) \qquad (\alpha > 0),$$

то

$$A_k = O(|\lambda_k|^{-\alpha}). \tag{2}$$

Т е о р е м а 3. Якщо показники Фур"є матриці $F(x) \in B_n^*$ / $n = 0, 1, 2, \ldots$ / мають властивості

$$\lambda_k - \lambda_{k+1} \geq N(\lambda_k), \; \lambda_{k-1} - \lambda_k \geq N(\lambda_k) \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

де $N(\lambda_k) \to 0$ при $k \to \infty$ і

$$J(F_n, u) = O(|u|^{2-\alpha}) \qquad (0 < \alpha < 1),$$

то

$$A_k = O\left\{\frac{|\lambda_k|^{n+2}}{[N(|\lambda_k|)]^{2-\alpha}}\right\}. \tag{3}$$

Т е о р е м а 4. Якщо показники Фур"є матриці $F(x) \in B_n^*$ / $n = 0, 1, 2, \ldots$ / мають властивості

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \geq \theta > 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

і

$$J(F_n, u) = O(|u|^{2-\alpha}),$$

то

$$A_k = O(|\lambda_k|^{n+\alpha}). \tag{4}$$

Зауважимо, що оцінки модулів коефіцієнтів Фур"є, які виражені формулами /2/ і /4/, є остаточними. При доведенні цих теорем опираємося на результати, одержані у праці [I].

2. Ознаки абсолютної збіжності рядів Фур"є $S$ – майже періодичних матриць з рідкими спектрами. Нехай матриця $F(x)$ має скінченну або зчисленну множину граничних точок $\{\Lambda_j^*\}$, які не належать до спектра. Позначимо через $R_j = ]\Lambda_j^* - \varepsilon, \Lambda_j^* + \varepsilon[$ інтервали, які містять всі показники Фур"є матриці $F(x)$. Тоді множина $Z_j(F)$ показників Фур"є матриці $F(x)$, які належать до інтервалу $R_j$, є симетрична відносно точки $\Lambda_j^*$.

Точки $\lambda$ множини $Z_j(F)$, які задовольняють умову $\lambda > \Lambda_j^*$, перенумеруємо у порядку їх спадання. Тоді одержимо послідовність $\{\lambda_k^{(j)}\}$ / $k = 1,2,\ldots$ / таку, що $\lambda_k^{(j)} - \Lambda_j^* \to 0$ при $k \to \infty$.

У такому випадку ряд Фур"є $S$ – майже періодичної матриці $F(x)$ запишемо у вигляді

$$F(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{(j)} e^{i\lambda_k^j x}, \qquad /5/$$

де $A_k^j = M\left\{F(x) e^{-i\lambda_k^{(j)} x}\right\}$ – її матричні коефіцієнти Фур"є.

Користуючись методом з праці [I], можна довести справедливість тверджень.

Л е м а I. Якщо показники Фур"є матриці $F(x)$ мають властивості

$$\lambda_k^{(j)} - \lambda_{k+1}^{(j)} \geq N(\lambda_k^{(j)}),\ \lambda_{k-1}^{(j)} - \lambda_k^{(j)} \geq N(\lambda_k^{(j)}) \ (k = 2,3,\ldots), \qquad /6/$$

де $N(\lambda_k^{(j)}) \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$A_k^{(j)} = \frac{3\mu}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u, \Lambda_j^*) \varphi_\mu(u, k, \Lambda_j^*)\, du, \qquad /7/$$

де $\Phi(u, \Lambda_j^*) = F(u) e^{-i\Lambda_j^* u}$; $\varphi_\mu(u, k, \Lambda_j^*) = e^{-i(\lambda_k^{(j)} - \Lambda_j^*)u} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4$;

$t = \frac{\mu u}{4}$; $\mu = N(|\lambda_k^{(j)}|)$.

Л е м а 2. Якщо матриця $\Phi(x,\Lambda_j^*)$ має послідовні обмежені та неозначені інтеграли $\Phi_r(x,\Lambda_j^*)$ / $r=0,1,\ldots,n$ ; $\Phi_0(x,\Lambda_j^*)=\Phi(x,\Lambda_j^*)$ / і

$$\left|\int_0^u dv\int_0^v \Phi_n(x,\Lambda_j^*)dx\right|=O(|u|^{2-\alpha_j})\quad (0<\alpha_j\le 1;\ j=1,2), \qquad /8/$$

то

$$A_k^{(j)}=O\left\{\frac{|\lambda_k^{(j)}-\Lambda_j^*|^{n+2}}{[N(|\lambda_k^{(j)}|)]^{2-\alpha_j}}\right\}\quad (j=1,2,\ldots). \qquad /9/$$

На основі лем I і 2 можна знайти достатню ознаку абсолютної збіжності ряду Фур"є $S$ -майже періодичної матриці $F(x)$, спектр якої має зчисленну множину граничних точок.

Т е о р е м а 5. Якщо показники Фур"є матриці $F(x)$ мають властивості /6/ і наявна оцінка /8/ при $\alpha_j=\alpha$ рівномірно відносно $\alpha$ і $j$ , то ряд Фур"є /5/ збігається абсолютно, коли

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{|\lambda_k^{(j)}-\Lambda_j^*|^{n+2}}{[N(|\lambda_k^{(j)}|)]^{2-\alpha}}<\infty .$$

Список літератури: I. Б р е д и х и н а Е.А. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций с редкими спектрами. - Мат. сб., 1970, т.8I /I23/, . I. 2. К о в а л ь ч у к$_\rho$ Б.В., Ф а р і о н З.Д. Про збіжність рядів Фур"є деяких класів $S^p$ -майже періодичних матриць. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 198I, вип. I8. 3. Л і с е в и ч Л.М., К о в а л ь ч у к Б.В. Середнє значення і поняття ряду Фур"є для $S^p$ - майже періодичних матриць.- Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1975, вип. I0.

Стаття надійшла до редколегії 26.06.82