УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

ЗВОРОТНА ФОРМУЛА ДЛЯ ЗОБРАЖЕННЯ ВИПАДКОВОГО ВЕКТОРА

Нехай невід"ємний випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ має функцію розподілу ймовірностей $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(t_1, \ldots, t_n)$. Позначимо n – вимірний інтервал у першому гіпероктанті R_n^{0+}

$$R_n^{0+} = \{t_k \geq 0, \; k = 1, \ldots, n\} \qquad /1/$$

через $\mathcal{I}_n$

$$\mathcal{I}_n = \{a_k < t_k \leq b_k \; ; \; k = 1, \ldots, n\}, \; 0 \leq a_k < b_k \leq \infty . \qquad /2/$$

Приріст n -вимірно неспадної функції розподілу на інтервалі $\mathcal{I}_n$ виражається формулою [1]

$$\mathcal{F}(b_1, \ldots, b_n) - \sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}(b_1, \ldots, a_k, \ldots, b_n) + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \mathcal{F}(b_1, \ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots$$
$$\ldots, b_n) - \ldots + (-1)^n \mathcal{F}(a_1, \ldots, a_n) = \int_{\mathcal{I}_n} d\mathcal{F}(t) = \mathcal{P}(\xi \in \mathcal{I}_n) . \qquad /3/$$

Зображення випадкового вектора ξ

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-z_1 t_1 - \cdots - z_n t_n} \, d\mathcal{F}(t_1, \ldots, t_n) \qquad /4/$$

є аналітичною функцією принаймні в n -вимірній півплощині

$$S_n = \{Re\, z_k > 0; \; k = 1, \ldots, n\} \qquad /5/$$

n – вимірного комплексного простору C_n [2]. Інтеграл /4/ розуміємо у сенсі Радона-Стільт"еса.

О з н а ч е н н я . Інтервальним обмежником у R_n^{0+} називаємо довільну функцію, яка на інтервалі $\mathcal{I}_n \in R_n^{0+}$ дорівнює одиниці, а зовні нього – нулю.

Наприклад, інтервальним обмежником у R_n^{0+} є вираз

$$R_n^{0+}(a,b]=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k-i\infty}^{c_k+i\infty}\frac{e^{(b_k-t_k+0)z_k}-e^{(a_k-t_k+0)z_k}}{z_k}dz_k=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\begin{cases}0, & 0<t_k\le a_k,\ t_k>b_k\\ 1, & a_k<t_k\le b_k\end{cases}=\prod_{k=1}^{n}\frac{Sgn(t_k-a_k-0)-Sgn(t_k-b_k-0)}{2},$$

$$(c_k>0;\ k=1,2,\dots,n). \qquad /6/$$

З в о р о т н а   ф о р м у л а . Нехай незід"ємний випадковий вектор ξ має зображення /4/ в n -вимірній півплощині /5/ Тоді приріст функції розподілу /3/ вектора ξ на інтервалі /2/ з області /І/ виражається формулою

$$\mathcal{P}(\xi\in J_n)=\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\cdots\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{(b_k+0)z_k}-e^{(a_k+0)z_k}}{2\pi i z_k}\varphi(z_1,\dots,z_n)dz_1\dots dz_n,$$

де $c_k>0;\ k=1,\dots,n$. Інтеграл /7/ розуміємо у сенсі головного значення Коші.

Д о в е д е н н я . Коли врахувати /4/, то правий бік /7/ можна записати у вигляді $2n$ - кратного інтеграла

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_{c_1-i\tau_1}^{c_1+i\tau_1}\cdots\int_{c_n-i\tau_n}^{c_n+i\tau_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{(b_k+0)z_k}-e^{(a_k+0)z_k}}{2\pi i z_k}\int_0^\infty\!\!\cdots\int_0^\infty e^{-z_1t_1-\dots-z_nt_n}d\mathcal{F}(t_1,\dots,t_n)\times$$
$$\times dz_1\dots dz_n,$$

де $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$. Оскільки у виразі /8/ інтеграли відносно $t=(t_1,\dots,t_n)\in R_n^{0+}$ абсолютно збігаються для $z=(z_1,\dots,z_n)$ із n -вимірної півплощини /5/ і, зокрема, на сукупності прямих $Z_n=\{Re z_k=c_k>0;\ k=1,\dots,n\}$, а відносно $z=(z_1,\dots,z_n)$ межі інтегрування скінченні, то переставимо черговість інтегрування. Дістаємо

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\infty\!\!\cdots\int_0^\infty\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k-i\tau_k}^{c_k+i\tau_k}\frac{e^{(b_k-t_k+0)z_k}-e^{(a_k-t_k+0)z_k}}{z_k}dz_k\right\}d\mathcal{F}(t_1,\dots,t_n). \qquad /9/$$

Границя добутку внутрішніх інтегралів /9/ існує та збігається в /6/. Отже, маємо

$$\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty} R_n^{0+}(a,b]\,dF(t_1,\dots,t_n)=\int_{J_n} dF(t)=\mathcal{P}(\xi\in J_n)-$$

лівий бік /7/. Зворотна формула /7/ доведена.

Безпосереднім наслідком зворотної формули /7/ є n -вимірна теорема єдиності. Зображення /4/ в n -вимірній півплощині /5/ однозначно визначає свою функцію розподілу $F(t)$, причому

$$F(t_1,\dots,t_n)=\lim_{a\to 0}\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\dots\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{(t_k+0)z_k}-e^{(a_k-0)z_k}}{z_k}\varphi(z_1\dots z_n)\,dz_1\dots dz_n, \quad /10/$$

де $a=(a_1,\dots,a_n),\ t_k>0;\ k=1,\dots,n.$

Для доведення співвідношення /10/ досить у зворотній формулі /7/ замість b_k прийняти t_k та спрямувати a_k до нуля для всіх $k=1,\dots,n$.

Формальним посереднім наслідком зворотної формули /7/ є зворотна формула для густини. Якщо невід"ємний випадковий вектор ξ абсолютно неперервний та має густину $f(t_1,\dots,t_n)$, то /4/ набирає вигляду

$$\varphi(z_1,\dots z_n)=\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty} e^{-z_1t_1-\dots-z_nt_n}f(t_1,\dots,t_n)\,dt_1\dots dt_n,\ (z_1,\dots z_n)\in S_n; \quad /11/$$

і зі співвідношення /10/ дістаємо у точках існування густини

$$f(t_1,\dots,t_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\dots\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty} e^{t_1z_1+\dots+t_nz_n}\varphi(z_1,\dots,z_n)\,dz_1\dots dz_n. \quad /12/$$

Відзначимо, що формули /11/ і /12/ наявні у праці [2].

Проілюструємо формули /10/ та /12/ прикладами.

Знайти функцію розподілу ймовірностей, відповідну зображенню

$$\varphi(z_1,z_2)=\left(1+p(e^{-z_1}-1)+q(e^{-z_2}-1)\right)^n,\quad 0<p,\ q<1,\ p+q<1;\ n=1,2,\dots$$

За формулою /10/ запишемо

$$\mathcal{F}(t_1,t_2)=\lim_{a_1\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\frac{e^{(t_1+0)z_1}-e^{(a_1+0)z_1}}{z_1}\left\{\lim_{a_2\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\frac{e^{(t_2+0)z_2}-e^{(a_2+0)z_2}}{z_2}\times\right.$$

$$\left.\times\left((1-p-q+pe^{-z_1})+qe^{-z_2}\right)^n dz_2\right\}dz_1 .$$

Оскільки

$$\{\}=\sum_{l=0}^{n}C_n^l q^l(1-p-q+pe^{-z_1})^{n-l}\lim_{a_2\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\frac{e^{(t_2-l+0)z_2}-e^{(a_2-l+0)z_2}}{z_2}dz_2$$

і при $c>0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{\alpha z}}{z}dz=\begin{cases}1, & \alpha>0,\\ 0, & \alpha<0,\end{cases} \qquad /13/$$

то

$$\{\}=\sum_{l=0}^{[t_2]}C_n^l q^l(1-p-q+pe^{-z_1})^{n-l}=\sum_{l=0}^{[t_2]}C_n^l q^l\sum_{k=0}^{n-l}C_{n-l}^k p^k e^{-kz_1}(1-p-q)^{n-l-k},$$

і отже,

$$\mathcal{F}(t_1,t_2)=\sum_{l=0}^{[t_2]}C_n^l q^l\sum_{k=0}^{n-l}C_{n-l}^k p^k(1-p-q)^{n-l-k}\lim_{a_1\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\frac{e^{(t_1-k+0)z_1}-e^{(a_1-k+0)z_1}}{z_1}dz_1 .$$

Звідси, знову враховуючи співвідношення /13/, дістаємо

$$\mathcal{F}(t_1,t_2)=\sum_{k=0}^{[t_1]}\sum_{l=0}^{[t_2]}\frac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!}p^k q^l(1-p-q)^{n-k-l},\quad 0\le[t_1]+[t_2]\le n$$

функцію розподілу двовимірного біномного вектора [3].

Знайдемо густину розподілу ймовірностей, відповідну зображенню

$$\varphi(z_1,z_2)=\left(\frac{\alpha\beta(1-r^2)}{(\alpha+(1-r^2)z_1)(\beta+(1-r^2)z_2)-\alpha\beta r^2}\right)^{\nu},\ (\alpha>0,\beta>0,\nu>0,\ 0<r<1).$$

За формулою /12/ записуємо

$$f(t_1,t_2)=(\alpha\beta)^{\nu}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\frac{e^{t_1z_1}}{(\alpha+(1-r^2)z_1)^{\nu}}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\frac{e^{t_2z_2}\,dz_2}{\left(z_2+\frac{\beta}{1-r^2}-\frac{\alpha\beta r^2}{1-r^2}\cdot\frac{1}{\alpha+(1-r^2)z_1}\right)^{\nu}}\right\}dz_1 .$$

Оскільки

$$\{\}=\frac{t_2^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}e^{\left(-\frac{\beta}{1-r^2}+\frac{\alpha\beta r^2}{1-r^2}\frac{1}{\alpha+(1-r^2)z_1}\right)t_2}=\frac{t_2^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}e^{-\frac{\beta t_2}{1-r^2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha\beta r^2}{1-r^2}\right)^j}{j!}\frac{1}{\alpha+(1-r^2)z_1}$$

та

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\frac{e^{t_1z_1}}{\left(z_1+\frac{\alpha}{1-r^2}\right)^{\nu+j}}dz_1=\frac{t_1^{\nu+j-1}}{\Gamma(\nu+j)}e^{-\frac{\alpha t_1}{1-r^2}},$$

то густина

$$f(t_1,t_2)=\frac{(\alpha\beta)^{\nu}(t_1t_2)^{\nu-1}}{(1-r^2)^{\nu}\Gamma(\nu)}e^{-\frac{\alpha t_1+\beta t_2}{1-r^2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha\beta r^2t_1t_2}{1-r^2}\right)^j}{j!\,\Gamma(\nu+j)}=$$

$$=\frac{(\alpha\beta)^{\frac{\nu+1}{2}}}{(1-r^2)r^{\nu-1}\Gamma(\nu)}e^{-\frac{\alpha t_1+\beta t_2}{1-r^2}}(t_1t_2)^{\frac{\nu-1}{2}}J_{\nu-1}\left(\frac{2r\sqrt{\alpha\beta t_1t_2}}{1-r^2}\right),$$

$$t_1>0,\ t_2>0.$$

Це густина двовимірного гама розподілу [3].

Список літератури: 1. Квіт І.Д. Уточнення зворотної формули для характеристичної функції випадкового вектора. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1971, вип.6, 2. Квіт І.Д. Зображення випадкового вектора. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1972, вип. 7. 3. Mardia K.V. Families of bivariate distributions. L., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 26.01.82