няння /I/ розв"язальне в класі неперервних функцій при

$$|\lambda| < \frac{2}{(1+\pi)M}. \qquad /5/$$

Доведення цих теорем проводиться як і у праці [3] для рівнянь Вольтерра за допомогою оцінки ітерованих ядер і загального члена ряду послідовних наближень.

Теореми I, 2 допускають очевидні узагальнення на різні класи функцій $f(x)$. Вони показують, що на межі області комплексної λ – площини, яка визначається нерівностями /3/ та /5/, знаходиться хоча б один полюс резольвенти відповідного інтегрального рівняння [3] і тому фігуруючий в /I/ інтегральний оператор не є вольтеровим у розумінні визначення, даного у праці [I], і його не можна одержати як границю /за рівномірною метрикою/ послідовності вольтерових операторів.

Список літератури: I. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 2. Забрейко П.П. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 3. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959.

Стаття надійшла до редколегії 04.09.82

УДК 517.5

М.М.Сумовский

ПРО КОЛИВНІ УТОЧНЕНІ ПОРЯДКИ

Нехай ℓ – неперервно диференційована додатна функція на $[0,\infty]$ така, що $\ell'(r)r\ln r \to 0$ при $r\to\infty$. Тоді називатимемо її коливним уточненим порядком /у праці [2] вжито термін "загальний уточнений порядок"/. Якщо існує границя $\lim\limits_{r\to\infty}\ell(r) = \rho<\infty$, то $\ell(r)$ називають уточненим порядком. Нехай α – невід"ємна неспадна на $[0,\infty)$ функція. Коли ℓ – коливний уточнений порядок такий, що то ℓ називають коливним уточненим порядком для α .

У теорії мероморфних функцій важливу роль відіграє така теорема: якщо α має скінченний порядок ρ , то для неї існує уточнений порядок $\rho(r)$ такий, що $\rho(r)\to\rho$ при $r\to\infty$ [1]. Природно постає питання: якщо α має скінченний порядок ρ та нижній порядок $\lambda<\rho$, чи існує для неї коливний уточнений порядок ℓ такий, що

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\ell(r)=\rho,\ \underline{\lim_{r\to\infty}}\,\ell(r)=\lambda.$$

Негативну відповідь на це питання дає наступна теорема.

Т е о р е м а . Нехай $0<\lambda<\rho<\infty$ існує невід"ємна неспадна на $[0,\infty)$ функція α , опукла відносно логарифма, порядку ρ та нижнього порядку $\lambda, 0<\lambda<\rho<\infty$ така, що довільний коливний уточнений порядок для α є уточненим порядком.

Д о в е д е н н я . Нехай

$$\delta=(\rho+\lambda)/2,\ \varepsilon=(\rho-\lambda)/2,\ 0<a<((\delta/\varepsilon)^2-1)^{1/2}$$

$$d(x)=\varepsilon\sin(a\ln_2 x)+\delta \text{ при } x\geq x_0\geq e,\ d(x)=d(x_0)$$

при $0\leq x\leq x_0$, $\alpha(x)=x^{d(x)}$.

Простий підрахунок дає при $x>x_0$

$$\alpha'(x)\geq x^{d(x)-1}(\delta-\varepsilon\sqrt{1+a^2})>0,$$

$$\frac{d^2\alpha(x)}{(d\ln x)^2}=\alpha(x)\{(d(x)+x\ln x\, d'(x))^2+$$

$$+x d'(x)(2+\ln x)+x^2 d''(x)\ln x\}>0$$

при досить великому x_0 , з огляду на те, що

$$d(x)+x\ln x d'(x)>\delta-\varepsilon\sqrt{1+a^2},\ a\ \ x d'(x)(2+\ln x)+x^2 d''(x)\ln x\to 0.$$

Отже, функція α неспадна та опукла відносно логарифма.

Припустимо, що $\ell(r)$ – коливний уточнений порядок для α

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, \ell(r)=\rho,\quad \underline{\lim_{r\to\infty}}\, \ell(r)=\beta,\quad \beta<\rho.$$

Очевидно, що $\beta\geq\lambda$. Позначимо

$$\Delta_n = \exp\exp\{\tilde{a}^{-1}(\pi/2+2\pi n)\}.$$

Тоді $d(\Delta_n)=\rho$ із /I/ випливає, що $\ell(\Delta_n)=\rho+o(1)$ при $n\to\infty$. Нехай $\beta<\gamma<\rho$ та (t_k) – деяка послідовність, що прямує до $+\infty$ така, що $\ell(t_k)=\gamma$. Нехай $\Delta_{n_k}<t_k<\Delta_{n_k+1}$. За теоремою Лагранжа про скінченні прирости існує $r_k\in(\Delta_{n_k}, t_k)$ таке, що

$$\ell(t_k)-\ell(\Delta_{n_k})=\ell'(r_k)r_k\ln r_k(\ln_2 t_k-\ln_2\Delta_{n_k}).$$

Оскільки $0<\ln_2 t_k-\ln_2\Delta_{n_k}<\ln_2\Delta_{n_k+1}-\ln_2\Delta_{n_k}=2\pi/d,$

то

$$|\ell'(r_k)r_k\ln r_k|\geq a(\rho-\gamma+o(1))/2\pi,\quad k\to\infty.$$

Отже, $\ell'(r)r\ln r$ не прямує до 0 при $r\to\infty$. Одержана суперечність доводить теорему.

Н а с л і д о к . Нехай $0<\lambda<\rho<\infty$. Існує ціла функція f порядку ρ та нижнього порядку λ з невід"ємними тейлорівськими коефіцієнтами така, що довільний коливний уточнений порядок для $T(r,f)$ або для $\ln M(r,f)$ є уточненим порядком.

Дійсно, за теоремою Клуні [3], існує ціла функція з невід"ємними тейлорівськими коефіцієнтами така, що

$$T(r,f)\sim\ln M(r,f)\sim\alpha(r)$$

при $r\to\infty$, де α –функція, вказана при доведенні теореми, оскільки вона є неспадною та опуклою відносно логарифма.

З а у в а ж е н н я . Дещо ускладнивши побудову α , можна зняти в теоремі та у наслідку вимогу $\lambda>0$.

Автор висловлює глибоку подяку А.А.Гольдбергу за керівництво роботою.

Список літератури: 1. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. 2. Valiron G. Lectures on the general theory of integral functions. Toulouse Ed. Privat, 1923. 3. Cluine J. On integral functions having prescribed growth – Canad. J. Math., 1965, 17, N3

Стаття надійшла до редколегії 5.03.82

УДК 512.553

О.Л.Горбачук

S – КРУЧЕННЯ І ПІВДОСКОНАЛІ КІЛЬЦЯ

Всі кільця, які розглядаємо, асоціативні з одиницею, модулі праві й унітарні. Означення та факти, пов"язані з крученням, наведені у праці [2]. Кільце називають нерозкладним, коли воно не розкладається у пряму суму двох кілець, а це означає, що в кільці всі центральні ідемпотенти тривіальні. Кільце назвемо правим дуо-кільцем, коли всі праві ідеали двосторонні. Кручення r – називають розщеплюваним, коли для довільного модуля M підмодуль $r(M)$ виділяється прямим доданком.

Для кожного правого ідеалу S кільця R позначимо через $\mathcal{E}_S = \{J \in R, \; J$ – правий ідеал і $J+S=R\}$.

Лема. Якщо R –дуо-кільце, то система ідеалів $\mathcal{E}_S$ утворює радикальний фільтр.

Доведення проводять безпосередньою перевіркою умов радикального фільтру, беручи $1 = i+s$, де $i \in J$, $s \in S$.

Зауважимо, що, взагалі кажучи, така конструкція не переноситься на некомутативні кільця, якщо навіть взяти S – двосторонній ідеал. Кручення, яке відповідає радикальному фільтру $\mathcal{E}_S$, називається S -крученням.