Список літератури: I. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. 2. Valiron J. Lectures on the general theory of integral functions. Toulouse Ed. Privat, 1923. 3. Cluine J. On integral functions having prescribed growth – Canad. J. Math., 1965, 17, N3

Стаття надійшла до редколегії 5.03.82

УДК 512.553

О.Л.Горбачук

S – КРУЧЕННЯ І ПІВДОСКОНАЛІ КІЛЬЦЯ

Всі кільця, які розглядаємо, асоціативні з одиницею, модулі праві й унітарні. Означення та факти, пов"язані з крученням, наведені у праці [2]. Кільце називають нерозкладним, коли воно не розкладається у пряму суму двох кілець, а це означає, що в кільці всі центральні ідемпотенти тривіальні. Кільце назвемо правим дуо-кільцем, коли всі праві ідеали двосторонні. Кручення r – називають розщеплюваним, коли для довільного модуля M підмодуль $r(M)$ виділяється прямим доданком.

Для кожного правого ідеалу S кільця R позначимо через $\mathcal{E}_S = \{J \in R,\ J$ – правий ідеал і $J+S=R\}$.

Л е м а . Якщо R –дуо-кільце, то система ідеалів $\mathcal{E}_S$ утворює радикальний фільтр.

Доведення проводять безпосередньою перевіркою умов радикального фільтру, беручи $1 = i+s$, де $i \in J,\ s \in S$.

Зауважимо, що, взагалі кажучи, така конструкція не переноситься на некомутативні кільця, якщо навіть взяти S – двосторонній ідеал. Кручення, яке відповідає радикальному фільтру $\mathcal{E}_S$, називається S -крученням.

Т е о р е м а І. Наступні умови для нерозкладного дуо-кільця R еквівалентні:

1/ всі S -кручення над кільцем R розщеплюються;

2/ всі S -кручення над кільцем R тривіальні;

3/ кільце R -локальне.

Д о в е д е н н я . Імплікації 3/$\Rightarrow$ 2/$\Rightarrow$ І/ очевидні. Покажемо, що з І/ випливає 2/. Радикальний фільтр $\mathcal{E}_S$ має базу з головних ідеалів, тому до цього S -кручення можна застосувати теорему І праці [І] при умові, що для доведення теореми достатньо вимагати двосторонності ідеалів замість породження їх центральними елементами. Оскільки кільце нерозкладне за умовою, то S -кручення тривіальне. Для доведення імплікації 2/$\Rightarrow$ 3/ покажемо, що в R міститься один тільки максимальний ідеал. Візьмемо максимальний правий ідеал J і нехай S - довільний правий ідеал /в кільці всі праві ідеали двосторонні/, який не збігається з кільцем. Покажемо, що $S \subset J$. Розглянемо S -кручення. За умовою воно тривіальне, тобто $\mathcal{E}_S = \{R\}$. Оскільки J - максимальний і $J \notin \mathcal{E}_S$, то $J + S \neq R$, звідси $S \subseteq J$.

Т е о р е м а 2. Над дуо-кільцем всі S -кручення розщеплюються тоді і тільки тоді, коли кільце скінченна пряма сума локальних кілець.

Д о в е д е н н я . Нехай над дуо-кільцем R всі S -кручення розщеплюються. Покажемо, що кільце R - скінченна пряма сума нерозкладених кілець. Припустимо, що це не так, тоді існує безмежна множина центральних ортогональних ідемпотентів e_1, e_2, ..., e_n, ..., Розглянемо ідеал $S = e_1 R \oplus \ldots \oplus e_n R \oplus \ldots$ /пряма сума/. S -кручення тоді не тривіальне, тому що $\{0\} \notin \mathcal{E}_S$ /завжди можна вважати, що $S \neq R$ /. Використовуючи теорему І праці [І] у зміненому формулюванні, одержуємо, що S -кручення радикально-півпросте. Нехай J_0 - найменший ідеал радикального фільтру так, що $R = S + J_0$. Для кожного i, $e_i J_0 = 0$, тому що в іншому разі $J_0 = e_i J_0 \oplus (1-e_i)J_0$ і $(1-e_i)J_0 \in \mathcal{E}_s$, оскільки $J_0 \in \mathcal{E}_s$ і $e_i J_0 \subset S$. З умови мінімальності J_0 випливає, що $J_0 = (1-e_i)J_0$, а звідси $e_i J_0 = 0$. З розкладу $1 = s_1 + i_0$ і з рівності $e_i J_0 = 0$ маємо, $s_1 e_i = e_i s_1 = s_1$. Таким чином, в ідеалі S міститься одиниця кільця R, що протирічить вибору S. Одержане протиріччя встановлює, що кільце R є скінченною прямою сумою нерозкладних кілець. Дальше переходимо до прямих доданків /див. [I], лема I/, використовуючи теорему I, одержуємо, що кільце – це скінченна пряма сума . кальних кілець.

У другий бік проводимо доведення, переходячи до прямих доданків з використанням теореми I.

Безпосередньо з теореми I і 2 випливає такий наслідок.

Наслідок. Над дуо-кільцем всі S -кручення тривіальні тоді і тільки тоді, коли кільце – локальне.

Список літератури: I. Горбачук Е.Л. Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы. – Математические исследования, 1972, т.7, № 3. 2. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. – М.: Наука, 1969.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.82