ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

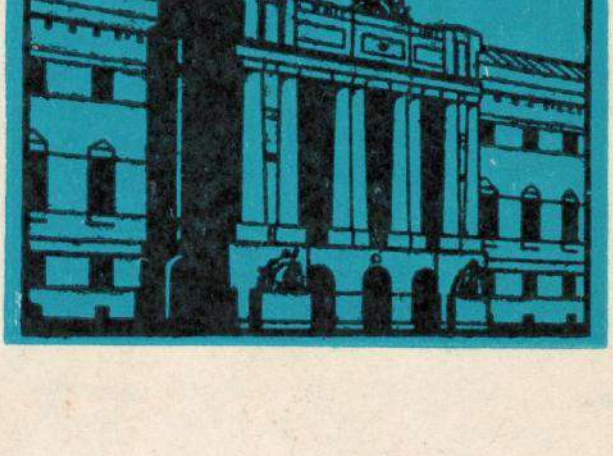
# ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

21

1983



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
Серія механіко-математична
Випуск 21

# ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Виходить з 1965 р.

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1983

ББК 22.16

517.2
Л 89

УДК 513

Вопросы математического анализа и его приложение. Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.21. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983. - 116 с.

В Вестнике помещены статьи по теории функций, функционального анализа, алгебры, теории вероятностей, дифференциальных и интегральных уравнений.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов. Библиогр. списки в конце статей.



Адреса редакційної колегії: 290000, Львів, вул.Університетська, 1, кафедра диференціальних рівнянь

Редакція науково-технічної та природничої літератури

Зав. редакцією М.П.П а р ц е й

$\text{В}\frac{1702050000-012}{\text{М}225/04/-83}$ Замовне

УДК 517.512

Я.Г.Притула, М.М.Яцимірський

# ОЦІНКИ НАБЛИЖЕНЬ $B^2$ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $f(x)$ – майже періодична функція Безіковича класу $B^2$ /$B^2$ м.п. функція/, показники Фур"є якої мають єдину точку згущення на нескінченності. Ряд Фур"є її запишемо у такій формі:

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j e^{i\lambda_j x}, \qquad /1/$$

де $\lambda_{-j} = -\lambda_j$; $|A_j| + |A_{-j}| > 0, j \neq 0; \lambda_j > 0, \lambda_{j+1} > \lambda_j$ для $j > 0$.

Приймемо

$$E_{\lambda_n}(f) = \inf_{g \in G_{\lambda_n}} [M\{|f(x) - g(x)|^2\}]^{1/2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

де $G_{\lambda_n}$ – множина $B^2$ м.п. функцій, показники Фур"є яких лежать в інтервалі $]-\lambda_n, \lambda_n[$ . Нехай

$$\omega(\delta, f) = \sup_{|h \leq \delta|} [M\{|f(x+h) - f(x)|^2\}]^{1/2}$$

і

$$\sigma_{\lambda_n}(x, f) = \sum_{|j| < n} \left(1 - \frac{|\lambda_j|}{\lambda_n}\right) A_j e^{i\lambda_j x} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Т е о р е м а І. Нехай $f(x)$ – $B^2$ м.п. функція з рядом Фур"є /1/. Тоді має місце нерівність

$$[M\{|f(x) - \sigma_{\lambda_n}(x, f)|^2\}]^{1/2} \leq 2^{-1/2} \left[\frac{\lambda_n}{2} \int_0^{\pi/\lambda_n} \omega^2(t, f) \sin \lambda_n t \, dt\right]^{1/2}. \qquad /2/$$

Доведення. З рівності Парсеваля випливає, що

$$M\{|f(x)-\sigma_{\lambda_n}(x,f)|^2\}=\sum_{|j|\le n}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^2|A_j|^2+$$

$$+\sum_{|j|>n}|A_j|^2 \qquad /3/$$

і $$M\{|f(x+h)-f(x)|^2\}=2\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|^2(1-\cos\lambda_j h).$$

Звідки маємо нерівність

$$\omega^2(t,f)\ge 2\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|^2(1-\cos\lambda_j h). \qquad /4/$$

З /3/ і /4/ одержуємо

$$M\{|f(x)-\sigma_{\lambda_n}(x,f)|\}\le\sum_{|j|\le n}\left[\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^2-1\right]|A_j|^2+$$

$$+\sum_{j=-\infty}^{\infty}|A_j|^2\cos\lambda_j t+\tfrac{1}{2}\,\omega^2(t,f).$$

Помножимо обидві сторони нерівності на $\sin\lambda_n t$ і проінтегруємо по відрізку $[0,\pi/\lambda_n]$. Маємо

$$\int_0^{\pi/\lambda_n}\sin\lambda_n t\,dt=2/\lambda_n$$

$$\int_0^{\pi/\lambda_n}\cos\lambda_j t\sin\lambda_n t\,dt=\begin{cases}\dfrac{\lambda_n}{\lambda_n^2-\lambda_j^2}\left(1+\cos\dfrac{\pi\lambda_j}{\lambda_n}\right) & \text{для } j\ne n,\\ 0 & \text{для } j=n.\end{cases}$$

Звідси, враховуючи, що другий інтеграл при $|j|>n$ від"ємний, одержуємо

$$M\{|f(x)-\sigma_{\lambda_n}(x,t)|^2\}\le\frac{\lambda_n}{4}\int_0^{\pi/\lambda_n}\omega^2(t,f)\sin\lambda_n t\,dt+$$

$$+\sum_{|j|\le n}|A_j|^2\left\{\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^2-1+\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2-\lambda_j^2}\cos^2\frac{\pi\lambda_j}{2\lambda_n}\right\}. \qquad /5/$$

Покажемо, що множники

$$\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)^2 - 1 + \frac{1}{1-(\lambda_j/\lambda_n)^2}\cos^2\frac{\pi\lambda_j}{2\lambda_n} = F\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\right)$$

при $|j| < n$ від"ємні. Для цього розглянемо функцію

$$F(x) = (1-x^2)^{-1}\left[\cos^2\frac{\pi}{2}x - (1-x^2)^2\right].$$

$$0 < x < 1$$

Оскільки $\cos\frac{\pi x}{2} < 1 - x^2$ для $x \in ]0,1[$, одержуємо $F(x) < 0$ для $x \in ]0,1[$. Таким чином, сума в правій частині нерівності /5/ від"ємна і ми приходимо до нерівності /2/.

Наслідок I. Нехай $f(x)$ – $B^2$ м.п. функція з рядом Фур"є /I/. Тоді має місце нерівність

$$E_{\lambda_n}(f) \leq 2^{-1/2}\left(\frac{\lambda_n}{2}\int_0^{\pi/\lambda_n}\omega^2(t,f)\sin\lambda_n t\,dt\right)^{1/2}. \qquad /6/$$

Доведення випливає з нерівностей /2/ і

$$E_{\lambda_n}(f) \leq \left[M\{|f(x) - \sigma_{\lambda_n}(x,t)|^2\}\right]^{1/2}.$$

У випадку коли $f(x)$ – періодична функція, нерівність /6/ отримано у праці [2].

Наслідок 2. Нехай $f(x)$ – $B^2$ м.п. функція з рядом Фур"є /I/, $f(x) \neq const.$ Тоді має місце нерівність

$$E_{\lambda_n}(f) < 2^{-1/2}\omega(\pi/\lambda_n, f). \qquad /7/$$

Нерівність /7/ випливає з /6/ внаслідок монотонності $\omega(t,f)$.

Остання нерівність для періодичних функцій одержана у праці [3], а для майже періодичних – у праці [I]. У нерівності /7/ постійна найліпша. Звідси випливає, що і в нерівностях /2/ і /6/ постійна $2^{-1/2}$ найліпша.

Теорема 2. Нехай $f(x)$ – $B^2$ м.п. функція з рядом Фур"є /I/ і її похідна $f^{(r)}(x)$ також $B^2$ м.п. функція. Тоді має місце нерівність

$$E_{\lambda_n}(f) \le 2^{-1/2} \lambda_n^{-r} \left\{ \frac{\lambda_n}{2} \int_0^{\pi/\lambda_n} \omega^2(t, f^{(r)}) \sin\lambda_n t \, dt \right\}^{1/2}.$$

Для доведення потрібно використати наслідок I.

Т е о р е м а 3. Нехай $f(x)$ – $B^2$ м.п. функція з рядом Фур"є /I/. Тоді мають місце нерівності

$$\pi^{-1} \omega\left(\frac{\pi}{\lambda_n}, f\right) \le \left[ M\left\{ |f(x) - \sigma_{\lambda_n}(x,f)|^2 \right\} \right]^{1/2} \le 2^{-1/2} \omega(\pi/\lambda_n, f). \qquad /8/$$

Д о в е д е н н я . Права нерівність, враховуючи монотонність $\omega(t,f)$ , випливає з /2/. Доведемо нерівність, яка є зліва. З рівності Парсеваля маємо

$$\omega^2(\pi/\lambda_n, f) = \sup_{|h| \le \pi/\lambda_n} M\left\{ |f(x+h) - f(x)|^2 \right\} =$$

$$= \sup_{|h| \le \pi/\lambda_n} \sum_{|j| \le n} 4|A_j|^2 \sin^2 \frac{\lambda_j h}{2} + \sup_{|h| \le \pi/\lambda_n} \sum_{|j| > n} 4|A_j|^2 \sin \frac{\lambda_j h}{2} \le$$

$$\le \sum_{|j| \le n} \left( \frac{\pi \lambda_n}{\lambda_n} \right)^2 |A_j|^2 + \sum_{|j| > n} 4|A_j|^2.$$

Тому

$$\frac{1}{\pi^2} \omega^2(\pi/\lambda_n, f) \le \sum_{|j| \le n} \left( \frac{\lambda_j}{\lambda_n} \right)^2 |A_j|^2 + \sum_{|j| > n} \frac{4}{\pi^2} |A_j|^2.$$

Внаслідок рівності /3/ одержуємо

$$\frac{1}{\pi^2} \omega^2\left(\frac{\pi}{\lambda_n}, f\right) \le M\left\{ |f(x) - \sigma_{\lambda_n}(x,f)|^2 \right\}.$$

Нерівність /8/ для випадку періодичних функцій доведена у праці [4], причому показано, що постійна $1/\pi$ – найліпша. Тому у нерівностях /8/ постійні найліпші.

Подамо без доведення ще одну теорему.

Нехай

$$\omega_m(\delta,f)=\sup_{|h|\le\delta}\left[M\{|\Delta_h^{(m)}f(x)|^2\}\right]^{1/2},$$

де

$$\Delta_h^{(m)}f(x)=\sum_{l=0}^{m}(-1)^l C_m^l f(x+lh)\qquad m=1,2,\dots$$

Теорема 4. Для будь-яких натуральних $m$ і $n$ та будь-якої $f(x)$ – $B^2$ м.п. функції з рядом Фур'є /1/ має місце нерівність

$$E_{\lambda_n}(f)\le K_{n,m}\left\{\int_0^{2\pi/\lambda_n}\omega_m^2(t,f)\,\varphi_n(t)\,dt\right\}^{1/2},$$

де

$$\varphi_n(t)=\sin\frac{\lambda_n t}{2}+\frac{1}{2}\sin\lambda_n t$$

$$K_{n,m}=\frac{1}{2}\sqrt{\lambda_n\left(C_{2m}^{m}\right)^{-1}}$$

і для будь-яких фіксованих $m$ і $n$ при $m<n$ константа $K_{n,m}$ найліпша.

Аналогічна теорема для періодичних функцій доведена у праці [2].

Список літератури: 1. Притула Я.Г. О неравенстве Джексона для $B^2$ – почти периодических функций.- Изв. вузов, сер. мат., 1972, № 8 /123/. 2. Черных Н.И. О наилучших приближениях периодических функций тригонометрическими полиномами в $L_2$. – Мат. заметки, 1967, т.2, вып.5. 3. Черных Н.И. О неравенстве Джексона в $L_2$. – Тр. мат. ин-та АН СССР, 1967, т.88. 4. Chin-Hung Chung, Charles K. Chui. Some inequalites in trigonometric approximation - Bull. Austral. - Math, Soc. 1973, v.8.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.82

УДК 513.88

Я.В.Микитюк

# СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО ЕЛІПТИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай $H \overset{def}{=} L_2(R^{n+1}), n \in N$. Домовимося точки простору $R^{n+1}$ в координатами $(x_1, \dots, x_{n+1})$ записувати у вигляді пари $(x, t)$, приймаючи $x = (x_1, \dots, x_n)$, $t = x_{n+1}$. Скористаємося також такими позначеннями:

$$D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}, \quad D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$D_x = (D_1, \dots, D_n),$$

$$|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n.$$

Нехай $R^{n+1} \ni (x,t) \to L(x,t)$ – однорідний многочлен /від змінних $x_1, \dots, x_n, t$ / степені $2m$ / $m \in N$ / з дійсними коефіцієнтами, для якого

$$\min_{|x|^2 + t^2 = 1} L(x,t) > 0.$$

Позначимо через $W_2^s(R^{n+1})$, $W_2^s(\Omega)$, де $\Omega \overset{def}{=} \{(x,t) \in R^{n+1} : t \neq 0\}$ – простори Соболева порядку $s \in R$, а через $P_1^+ P^- : W_2^1(\Omega) \to G \overset{def}{=} L_2(R^n)$ – оператори, які діють за формулою

$$(P^{\pm} f)(x) \overset{def}{=} f(x, \pm 0), \quad f \in W_2^1(\Omega), \quad x \in R^n.$$

Нехай $L_1, L : H \to H$ і

$$L_1 f \overset{def}{=} L(D_x, D_t) f, \quad f \in D(L_1) \overset{def}{=} W_2^{2m}(\Omega),$$

$$L f \overset{def}{=} L(D_x, D_t) f, \quad f \in D(L) \overset{def}{=} W_2^{2m}(R^{n+1})$$

/вважаємо, що простори $W_2^{2m}(\Omega)$, $W_2^{2m}(R^{n+1})$ вкладені в простір $H$ /.

Оператор $B: D(L_1) \to G_{2m} \overset{def}{=} G \times \cdots (2m) \ldots \times G$
назвемо крайовим, якщо

$$Q_j B = \rho^+ B_j^+ (D_x, D_t) - \rho^- B_j^- (D_x, D_t),\ j = 0, \ldots, 2m-1.,$$

де оператори $Q_j : G_{2m} \to G$ діють за формулою

$$Q_j f \overset{def}{=} f_j,\ f = (f_0, \ldots, f_{2m-1}) \in G_{2m},\ j = 0, \ldots, 2m-1.,$$

а $\mathbb{R}^{n+1} \ni (x,t) \to B_j^{\pm}(x,t)$ – однорідні многочлени /від змінних $x_1, \ldots, x_n, t$ / степеня $m_j \leqslant 2m-1,\ j = 0, \ldots, 2m-1.,$ з постійними /комплексними/ коефіцієнтами.

Позначимо через $t_k^+(x)$ / $t_k^-(x)$/, $k = 1, \ldots, m.,$ корені многочлена $L(x,t)$ з додатними /від"ємними/ уявними частинами та приймемо

$$M^{\pm}(x,t) = \prod_{k=1}^{m} (t - t_k^{\pm}(x)).$$

Нехай при заданому $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ многочлен

$$\widetilde{B}_j^+(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} b_{jk}^+(x) t^k \equiv B_j^+(x,t)\ (mod\, M^+)$$

$$/\ \widetilde{B}_j^-(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} b_{jk}^-(x) t^k \equiv B_j^-(x,t)\ (mod\, M^-)/$$

є залишок при діленні $B_j^+(x,t)$ / $B_j^-(x,t)$ / на $M^+$ /$M^-$/ /де $B_j^{\pm}$, $M^{\pm}$ розглядаються як многочлени від $t$ /. Приймемо

$$b_{jk}(x) \overset{def}{=} \begin{cases} b_{jk}^+(x),\ j = 0, \ldots, 2m-1.,\ k = 0, \ldots, m-1., \\ b_{jk-m}^-(x),\ j = 0, \ldots, 2m-1.,\ k = m, \ldots, 2m-1. \end{cases}$$

Вважаємо, що крайовий оператор $B$ задовольняє умову Я.Б.Лопатинського [I, 2], коли для всіх $x \in R^n \setminus \{0\}$

$$d(x) \overset{def}{=} \det \| b_{jk}(x) \| \neq 0.$$

Нехай $B$ – крайовий оператор і $L_B$ – звуження оператора $L_1$ на многовид $D(L_B) \overset{def}{=} \{f \in D(L_1) : Bf = 0\}$.

Основний результат, який подаємо без доведення, є наступна теорема.

Т е о р е м а . Якщо крайовий оператор $B$ задовольняє умову Я.Б.Лопатинського, то оператори $L_B$ і $L$ подібні.

Список літератури: І. А г м о н С., Д у г л и с А., Н и р е н б е р г Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. – М.: ИЛ, 1962. 2. Л о п а т и н с к и й Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. – Укр. мат. журн., 1953, т.5, №2.

Стаття надійшла до редколегії 29.03.82

УДК 517.535.4

М.М.Шеремета

## РАЦІОНАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ШВИДКОГО ЗРОСТАННЯ

Нехай

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \; a_0 = 1, \; a_k > 0 \; (k \geq 1) \qquad /1/$$

ціла трансцендентна функція; $\Pi_n$ – клас алгебраїчних многочленів степеня $\leq n$, а $\lambda_n(f) = \inf\{\|1/f - 1/p\|_{L_{[0,\infty)}} : p \in \Pi_n\}$. У праці [1] подані оцінки величини $\lambda_n(f)$ зверху. Зокрема, показано, що $\lambda_n(f) < \Lambda_n(f)$ для всіх $n > 0$, де $\Lambda_n(f) = (e-1)\{(e-1)f(e^{-1}f^*(e^n)) - 1\}^{-1}$, $f^*$ – функція, обернена до $f$.

Доведемо оцінку $\lambda_n(f)$ знизу для функцій /1/ швидкого зростання. Для цього потрібна наступна лема.

Л е м а . Якщо функція /I/ задовольняє умову

$$x(\ln\ln f(x))'\geq 1 \quad (x\geq a\geq 0), \qquad /2/$$

то для кожного $\alpha\in[0,1)$ існує послідовність $(n_j)$ така, що

$$a_n>\{\alpha/f^*(e^n)\}^n, \ n=n_j. \qquad /3/$$

Дійсно, припустимо протилежне. Тоді існує $\alpha\in(0,1)$ таке, що для всіх $n\geq n_0\geq \ln f(a)$ виконується нерівність $a_n\leq\{\alpha/f^*(e^n)\}^n$. Нехай $\alpha<\delta<1$ . При $x\to\infty$ маємо

$$f(x)\leq O(x^{n_0})+\sum_{n\geq n_0}\{\delta x/f^*(e^n)\}^n(\alpha/\delta)^n\leq$$

$$\leq O(x^{n_0})+\{\delta/(\delta-\alpha)\}\exp(\max\{\varphi(t):t\geq\ln f(a)\}), \qquad /4/$$

де $\varphi(t)=t\{\ln\delta x-\ln f^*(e^t)$ . Очевидно, що $\varphi'(t)=\ln\delta x-\ln f^*(e^t)-\varepsilon(t)$, де з огляду на /2/ $0<\varepsilon(t)=t(\ln f^*(e^t))'\leq 1$ при $t\geq\ln f(a)$. Тому, якщо $t(x)$ – точка максимума функції $\varphi$ , то при всіх досить великих $x$ виконується нерівність $t(x)\geq\ln f(a)$ і $\ln f^*(e^{t(x)})=$ $=\ln\delta x-\varepsilon_1(x)$, де $0\leq\varepsilon_1(x)\leq 1$ , тобто $t(x)=\ln f(\delta x e^{-\varepsilon_1(x)})\leq\ln f(\delta x)$. Таким чином, з /4/ випливає, що $f(x)\leq O(x^{n_0})+\{\delta/(\delta-\alpha)\}(f(\delta x))^{\varepsilon_1(x)}\leq$ $\leq\{2\delta/(\delta-\alpha)\}f(\delta x)$ при $x\geq x_0$ , тобто, внаслідок трансцендентності функції $f$ , виконується співвідношення $\ln\{2\delta/(\delta-\alpha)\}\geq$ $\geq\ln f(x)-\ln f(\delta x)\to\infty$ при $x\to\infty$ , що неможливо. Лема доведена.

Т е о р е м а . Якщо функція /I/ задовольняє умову /2/, то для кожного $\alpha\in(0,1)$ існує послідовність $(n_j)$ така, що

$$\lambda_n(f)>\left(\frac{\alpha}{4e}\right)^{n+1}f^{-2}(e^{-1}f^*(e^n)), \ n=n_j. \qquad /5/$$

Д о в е д е н н я . Приймемо $x_n=f^*(\Lambda_n^{-1}(f))$ ; отже $f(x_n)=\Lambda_n^{-1}(f)<\lambda_n^{-1}(f)$ . Нехай $p^*\in\Pi_n$ дає найліпшу апроксимацію, тобто $\lambda_n(f)=\|1/f-1/p^*\|_{[0,\infty]}$ . Тоді за допомогою простих обчислень [2] одержуємо

$$-\frac{f^2(x)}{\lambda_n^{-1}(f)+f(x)}\leq p^*(x)-f(x)\leq\frac{f^2(x)}{\lambda_n^{-1}(f)-f(x)}, \quad 0\leq x\leq x_n,$$

тобто

$$\|p^* - f\|_{[0,x_n]} \leq \frac{f^2(x_n)}{\lambda_n^{-1}(f) - f(x_n)} . \qquad /6/$$

Нехай $E_n(f) = \inf\{\|p-f\|_{L_\infty[0,x_n]} : p \in \Pi_n\}$ . За нерівністю С.Н.Бернштейна [2, 3] маємо

$$\frac{2a_{n+1}x_n^{n+1}}{4^{n+1}} \leq E_n(f) < \frac{f^2(x_n)}{\lambda_n^{-1}(f) - f(x_n)} = \frac{\Lambda_n^{-2}(f)}{\lambda_n^{-1}(f) - \Lambda_n^{-1}(f)} ,$$

звідки внаслідок леми та вибору $x_n$ одержуємо нерівність

$$\frac{\Lambda_n^{-2}(f)}{\lambda_n^{-1}(f) - \Lambda_n^{-1}(f)} \geq \left\{\frac{\alpha}{4} \frac{f^*(\Lambda_n^{-1}(f))}{f^*(e^{n+1})}\right\}^{n+1} , \quad n = n_j - 1. \qquad /7/$$

Оскільки $\mathcal{E}(t) \leq 1$ при $t \geq \ln f(a)$ , то для всіх досить великих $n$ записуємо $\ln f^*(e^{n+1}) - \ln f^*(e^n) = \int_n^{n+1} \mathcal{E}(t)\, d\ln t \leq \frac{1}{n}$ , тобто $f^*(e^{n+1}) \leq e^{1/n} f^*(e^n)$ . Аналогічно, використовуючи трансцендентність функції $f$ , можна показати, що $f^*(\Lambda_n^{-1}(f)) = e^{-1} f^*(e^n) + O(1)$ при $n \to \infty$ . Тому з /7/

$$\frac{1}{\lambda_n(f)} \leq \frac{1}{\Lambda_n(f)} + \frac{1}{\Lambda_n^2(f)} \left\{\frac{\alpha}{4} \frac{e^{-1} f^*(e^n) + O(1)}{e^{1/n} f^*(e^n)}\right\}^{-n+1} =$$

$$= (1 + o(1))\, f^2(e^{-1} f(e^n)) \left\{\frac{4e}{\alpha}(1 + o(1))\right\}^{n+1} ,$$

звідки внаслідок довільності $\alpha$ одержуємо /5/.

Список літератури: I. Шеремета М.М. Рациональная аппроксимация на $[0,\infty)$ целых функций произвольного роста с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами. - Укр. мат. журн., 1979, т.3I, № 3. 2. Erdös P., Reddy A.R. Rational approximation on a positive real axis.- Proc. London Math. Soc., 1975, v.31, N4. 3. Bernstein S.N. Lesons sur le propriétés extrémales et la meileure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. - Paris: Ganthier-Villars, 1926.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.81

УДК 517.925.7

О.Б.Скасків

# ПРО РІСТ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ, ЯКА ЗАДОВОЛЬНЯЄ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ $n$ -ГО ПОРЯДКУ З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ЗОБРАЖАЄТЬСЯ РЯДОМ ДІРІХЛЕ

Нехай $\{M_j\}$ – деяка множина векторів $M_j=(m_{0j}, m_{1j}, \dots, m_{nj})$ така, що всі $m_{ij}$ є цілими невід"ємними числами і $max\{m_{0j}+m_{1j}+\dots+m_{nj} : j\}=N<\infty$. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\sum_{\{M_j\}} P_{M_j}(z)\, W^{m_{0j}}(W')^{m_{1j}}\dots(W^{(n)})^{m_{nj}}=0, \qquad /1/$$

де $P_{M_j}(z)=\sum_{k=0}^{K} a_{M_j k}\, e^{z\lambda_k}$ – експоненціальні многочлени з одним і тим же набором показників $0\le\lambda_0<\lambda_1<\dots<\lambda_K$, причому серед коефіцієнтів $a_{M_j,k}$ можуть траплятися рівні нулеві, але $P_{M_j}(z)\not\equiv 0$ для кожного $j$ ; для кожних $j_1<j_2$ $\sum_{l=0}^{n} lm_{l,j_1}<\sum_{l=0}^{n} lm_{l,j_2}$. Припустимо, що ціла функція $F$, задана абсолютно збіжним у $\mathbb{C}$ рядом Діріхле

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{\mu_k z}, \qquad /2/$$

де $0\le\mu_0<\mu_1<\dots<\mu_k\uparrow\infty\ \ (k\to\infty)$ задовольняє рівняння /1/. Вкажемо її асимптотичні властивості. Така задача розв"язана Ш.І.Стрелiцом [1] для випадку, коли рівняння /1/ лінійне, а для $n=1$, дослідження асимптотики росту функції /2/ проведене М.М.Шеременом [2]. Наступна теорема містить теорему, доведену у праці [2]. Метод її доведення близький до методів, використаних у працях [1, 2].

Т е о р е м а . Якщо функція /2/ є розв"язком рівняння /1/, то її $R$ – порядок $\rho_R$ і нижній $R$ -порядок $\lambda_R$ задовольняють співвідношення

$$\frac{h}{\gamma}\le\lambda_R=\rho_R\le\lambda_K, \qquad /3/$$

де $h=\min\{\lambda_k-\lambda_{k-1}: 1\le k\le K\}$ і $\gamma=\max\{\sum_{\ell=0}^{n}\ell m_{\ell j}: j\in J\}$, $J$ – така множина значень $j$, для яких $\sum_{\ell=0}^{n} m_{\ell j}=N$.

Зауважимо, що оцінки /3/, взагалі кажучи, поліпшити не можна. На це вказують наступні приклади. Функція $F(z)=e^{e^{2\alpha z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{k\alpha z}}{k!}$ з одного боку, є розв"язком рівняння $W''-\alpha e^{\alpha z}W'-\alpha e^{2\alpha z}W=0$ і, отже, досягається верхня оцінка зі співвідношення /3/ : $\lambda_R=\rho_R=\lambda_K=\alpha$. З іншого боку, ця функція є розв"язком рівняння $W''-\alpha W'-\alpha^2 e^{2\alpha z}W=0$ і, таким чином, нижня оцінка теж досягається $h/\gamma=\alpha=\lambda_R=\rho_R$ $(h=2\alpha,\ \gamma=2)$.

Список літератури: І. С т р е л и ц Ш.И. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис, 1972. 2. Ш е р е м е т а М.Н. Асимптотика целых функций, заданных рядами Дирихле и удовлетворяющих дифференциальным уравнениям первого порядка с экспоненциальными коэффициентами. – Диф. уравн., 1981, т.17, № 6.

Стаття надійшла до редколегії 22.03.82

УДК 517.574

Я.В.Васильків

## ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ $\delta$ -СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ СКІНЧЕННОГО $\lambda$ -ТИПУ

Дійснозначна функція $w(z)$ називається $\delta$ -субгармонічною в $C$, якщо існують субгармонічні в $C$ функції $u(z)$ і $v(z)$ такі, що

1/ $w$ – визначена на множині $E$ точок $C$, де $u$ і $v$ не дорівнюють одночасно $-\infty$;

2/ $w=u-v$ на $E$ /в розширеному сенсі, тобто для довільного скінченного дійсного $a$ $a-(-\infty)=+\infty,\ -\infty-a=-\infty$/.

Функцію $w$ $\delta$ - субгармонічну в $\mathbb{C}$ і визначену на $E$ називають повною [3], якщо кожна $\delta$ -субгармонічна функція в $\mathbb{C}$, яка суміщається з $w$ на $E$, має $E$ своєю областю визначення.

Нехай:

1/ $\mu_w = \mu$ - розподіл мас асоційованих за Рісом з функцією $w$; $\mu = \mu^+ - \mu^-$ - розклад Жордана [1, с. 12-13; 2, с.482, 584] і припустимо, що $0 \notin supp\, \mu^+$ і $0 \notin supp\, \mu^-$;

2/ $T(r,w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w^+(re^{i\theta})d\theta + N(r,w)$

характеристика Неванлінни функції $w$ [7], де

$$N(r,w) = \int_0^r \Big\{ \int_{|a|\le t} d\mu^-(a) \Big\} t^{-1} dt.$$

Застосувавши формулу Йенсена до функції $v$, отримаємо

$$T(r,w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(re^{i\theta})d\theta - v(0),$$

де $S = \max\{u, v\}$; $w = u - v$; $u, v$ - субгармонічні в $\mathbb{C}$ і $\mu_u = \mu^+$, $\mu_v = \mu^-$. Надалі вважаємо $u(0) = v(0) = 0$.

Позначимо через $\lambda(r)$ - додатну, неперервну на $]0, \infty[$ функцію, $\lambda(r) \uparrow \infty$ при $r \to \infty$, яка називається функцією росту.

Функція $w$ $\delta$ - субгармонічна в $\mathbb{C}$ називається $\delta$ -субгармонічною функцією скінченного $\lambda$ -типу, якщо існують сталі $A, B > 0$ такі, що нерівність $T(r,w) \le A\lambda(Br)$ має місце для довільного $r > 0$. Клас таких функцій $w$ позначимо через $\Lambda_\delta$, а підклас субгармонічних функцій з $\Lambda_\delta$ через $\Lambda_s$.

Класи $\Lambda_\delta$ введені П.Новеразом [5, 6]. Вони узагальнюють класи мероморфних функцій скінченного $\lambda$ -типу, введених і досліджених методом рядів Фур"є Л.Рубелем і Б.Тейлором [8, 10] /див. також [4, 9]/.

Нехай

$$C_k(r,w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Формули, що виражають коефіцієнти Фур"є $C_k(r,w)$ через розподіл мас $\mu_w = \mu$, асоційованих за Рісом з функцією $w$, встановлені у працях [5, 6].

О з н а ч е н н я 1. Розподіл мас $\mu$ має скінченну $\lambda$ -щільність, якщо існують додатні сталі $A, B$ такі, що для всіх $r>0$ виконується

$$N(r)=\int_0^r n(t)t^{-1}dt < A\lambda(Br), \quad n(t)=\int_{|a|\le t}|d\mu(a)|.$$

О з н а ч е н н я 2. Розподіл мас $\mu \geq 0$ зі скінченною $\lambda$ -щільністю називається $\lambda$ -допустимим, якщо він $\lambda$ -збалансований, тобто існують сталі $A, B > 0$ такі, що

$$\left|k^{-1}\int_{r_1<|a|\le r_2} a^{-k}d\mu(a)\right| \le \frac{A\lambda(Br_1)}{r_1^k}+\frac{A\lambda(Br_2)}{r_2^k}$$

для довільних $r_1, r_2 > 0$ і $k \in N$.

О з н а ч е н н я 3. Нехай $\mu$ дійснозначний розподіл мас, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, $\alpha=\{\alpha_k\}$, $k\in \mathbb{Z}$ – послідовність комплексних чисел. Послідовність $\{C_k(r;\mu,\alpha)\}$, $k\in\mathbb{Z}$, де

$$C_0(r;\mu,\alpha)=\int_0^r \nu(t)t^{-1}dt, \quad \nu(r)=\int_{|a|\le r}d\mu(a);$$

$$C_k(r;\mu,\alpha)=\frac{r^k}{2}\alpha_k+\frac{r^k}{2k}\int_{|a|\le r}a^{-k}d\mu(a)-$$

$$-\frac{1}{2kr^k}\int_{|a|\le r}(\bar a)^k d\mu(a), \quad k\in N;$$

$$C_k(r;\mu,\alpha)=\bar C_{-k}(r;\mu,\alpha), \quad k=-1,-2,\dots$$

називається послідовністю коефіцієнтів Фур'є пари $(\mu,\alpha)$.

Т е о р е м а 1. Нехай послідовність $\{C_k(r)\}=\{C_k(r;\mu,\alpha)\}$, $0\notin \operatorname{supp}\mu$ така, що

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|C_k(r)|^2<+\infty.$$

Тоді існує єдина повна $\delta$ -субгармонічна в $\mathbb{C}$ функція $w(z)$ така, що $w(0)=0$, $\mu_w=\mu$ і $C_k(r,w)=C_k(r)$ для довільних $k\in\mathbb{Z}$, $r>0$.

Доведення. За теоремою Фішера-Ріса функція $\Phi(\rho e^{i\theta}) = \sum C_k(\rho) e^{ik\theta}$ належить до $L^2[0, 2\pi]$, де $\rho>0$. Нехай для довільного $\rho>0$

$$B_\rho(z,a) = \ln\left|\frac{\rho(a-z)}{\rho^2-\bar{a}z}\right|,$$

$$P_\rho(z) = \int_{|a|<\rho} B_\rho(z,a)\,d\mu(a),$$

$$Q_\rho(z) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|W|=\rho}\frac{W+z}{W-z}\,\Phi(W)\,\frac{dW}{W}\right\},$$

$$w_\rho(z) = P_\rho(z) + Q_\rho(z).$$

Провівши міркування, аналогічні наведеним у праці [10] і врахувавши теорему 9 з праці [3], отримаємо, що $w_\rho(z)$ повна $\delta$-субгармонічна в крузі $|z|<\rho$ і $w_\rho(0)=0$, $C_k(r, w_\rho) = C_k(r)$ для довільного $k\in\mathbb{Z}$, розподіл $\mu_{w_\rho}$ дорівнює звуженню $\mu$ на вказаний круг. Нехай $\rho'>\rho$. Розглянемо функцію $W(z) = w_{\rho'}(z) - w_\rho(z)$. Оскільки для $0\le r<\rho$, $|z|=r$
$C_k(r, W) = C_k(r, w_{\rho'}) - C_k(r, w_\rho) = C_k(r) - C_k(r) = 0$
і $W(0)=0$, то $W(z)=0$ майже скрізь.

З іншого боку, оскільки функція

$$W(z) = \int_{\rho\le|a|<\rho'} B_{\rho'}(z,a)\,d\mu(a) + Q_{\rho'}(z) - Q_\rho(z) + \int_{|a|<\rho}\ln\left|\frac{(\rho^2-\bar{a}z)\rho'}{((\rho')^2-\bar{a}z)\rho}\right| d\mu(a)$$

неперервна $\delta$-субгармонічна функція при $|z|<\rho$, то $W(z)$ тотожній нуль у цьому крузі. Таким чином, повна $\delta$-субгармонічна в крузі $|z|<\rho'$ функція $w_{\rho'}(z)$ суміщається з $w_\rho(z)$ при $|z|<\rho$, тобто є $\delta$-субгармонічним продовженням функції $w_\rho(z)$

Приймемо $w(z)=w_\rho(z)$ при $|z|<\rho$. Очевидно, функція $w$ задовольняє умови теореми. Єдиність встановлюється аналогічно наведеним міркуванням про продовження.

О з н а ч е н н я 4. Пара $(\mu,\alpha)$, $\mu\geq 0$ називається $\lambda$-допустимою, якщо $\lambda$-допустима її послідовність коефіцієнтів Фур"є, тобто, коли існують $A,B>0$ такі, що

$$|C_k(r;\mu,\alpha)|\leq\frac{A\lambda(Br)}{|k|+1},\ r>0,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Т е о р е м а 2. Розподіл мас $\mu\geq 0$ $\lambda$-допустимий тоді і лише тоді, коли існує послідовність комплексних чисел $\alpha$ така, що пара $(\mu,\alpha)$ $\lambda$-допустима.

Доведення аналогічне наведеному у праці [10].

Т е о р е м а 3. Для того щоб розподіл $\mu\geq 0$ був розподілом мас, асоційованих за Рісом з функцією $u\in\Lambda_S$, необхідно і достатньо, щоб $\mu$ був $\lambda$-допустимим.

Д о в е д е н н я. Якщо $\mu=\mu_u$ для деякої $u\in\Lambda_S$ то згідно з працею [6] /теорема 4.I/ пара $(\mu,\alpha)$ $\lambda$-допустима. З огляду на теорему 2 розподіл мас $\mu$ $\lambda$- допустимий.

Навпаки, нехай дано $\lambda$-допустимий розподіл мас $\mu$. За теоремою 2 знаходимо послідовність комплексних чисел $\alpha=\{\alpha_k\}$ $k\in\mathbb{Z}$ таку, що пара $(\mu,\alpha)$ є $\lambda$-допустимою. На підставі теореми I існує єдина субгармонічна функція $u$, $u(0)=0$, для якої $\mu_u=\mu$ і $\{C_k(r,u)\}=\{C_k(r;\mu,\alpha)\}$. За теоремою 4.I з праці [6] отримуємо $u\in\Lambda_S$.

Л е м а I. Нехай розподіл мас $\mu\geq 0$ має скінченну $\lambda$-щільність. Тоді існує розподіл $\mu'\geq 0$, зосереджений на системі кіл $\{z:|z|=b2^n\}$ $n\in\mathbb{N}$, $b\in[1,2[$, такий, що розподіл $\mu+\mu'$ є $\lambda$-допустимим.

З а у в а ж е н н я. Розподіл мас $\mu+\mu'$ розуміємо в сенсі праці [2, с.440].

Доведення леми I. Розглянемо множини $E_n(b) = \{a \in \operatorname{supp}\mu : b2^n < |a| \le b2^{n+1}\}$, $b \in [1,2[$, $n \in N$. Тоді для $a \in E_n(b)$ має місце $a = |a|e^{i\theta}$, $|a| = b2^{n+\beta}$, $0 < \beta \le 1$, $\theta = \arg a$.

Приймемо

$$g_n(b,\varphi) = -2\int\limits_{E_n(b)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(b2^{n-1}e^{i\varphi})^m}{a^m}\, d\mu(a),$$

$$f_n(b,\varphi) = \operatorname{Re} g_n(b,\varphi) + 2\mu(E_n(b)).$$

Провівши міркування, аналогічні до наведених у праці [10], отримаємо твердження леми I.

Теорема 4. $\Lambda_\delta = \Lambda_s - \Lambda_s$, тобто для довільної $w \in \Lambda_\delta$ існують $u, v \in \Lambda_s$ такі, що $w = u - v$.

Доведення. Включення $\Lambda_s - \Lambda_s \subset \Lambda_\delta$ випливає з властивостей характеристик Неванлінни /теорема 35 з праці [3]/.

Залишається показати, що $\Lambda_\delta \subset \Lambda_s - \Lambda_s$. Нехай $w \in \Lambda_\delta$, $\mu_w = \mu^+ - \mu^-$. Застосувавши лему I до $\mu^-$, прийдемо до існування розподілу мас $\mu'$ такого, що розподіл мас $\mu^- + \mu'$ є $\lambda$-допустимий. За теоремою 3 він є розподілом мас деякої субгармонічної функції $v \in \Lambda_s$.

Оскільки функція $u = w + v$ субгармонічна і $T(r,u) \le T(r,w) + T(r,v)$, то $u \in \Lambda_s$. Теорема доведена.

Зауваження. Клас $\Lambda_\delta$ слід розуміти як лінійний простір, породжений підкласом субгармонічних функцій скінченного $\lambda$-типу $\Lambda_s$.

Означення 5. Розподіли мас $\mu, \nu \ge 0$ називають диз"юнктними, якщо єдиним невід"ємним розподілом мас, який одночасно мінорує $\mu$ і $\nu$, є нуль. Іншими словами, міра $\nu$ зосереджена на множині, $\mu$-міра якої дорівнює нулеві /див. [2], с.589 /.

Теорема 5. Для того щоб розподіл мас $\mu \ge 0$ був додатною /від"ємною/ варіацією розподілу мас деякої $\delta$-субгармонічної функції скінченного $\lambda$-типу, необхідно і достатньо, щоб він мав скінченну $\lambda$-щільність.

Д о в е д е н н я . Необхідність випливає з нерівності $N(r,\mu) \leq T(r,w)$. Для доведення достатності застосуємо лему I до $\mu$. Тоді розподіл мас $\mu+\mu'$ є $\lambda$-допустимим. Застосуємо знову лему I, але вже до $\mu'$. Отримуємо $\lambda$-допустимий розподіл $\mu'+\mu''$. При цьому вибираємо число $b$ з цієї леми так, щоб розподіли $\mu$ і $\mu''$ були диз"юнктними. Це можливо, оскільки $\mu(K(0,r))=0$, за винятком щонайбільше зліченної множини $J$ дійсних чисел $r>0$, де $K(0,r)=\{z\in\mathbb{C}: |z|=r\}$. На основі теореми 3 існують субгармонічні функції $u$ і $v$ в класу $\Lambda_5$ такі, що $\mu_u=\mu+\mu'$, $\mu_v=\mu'+\mu''$.

За теоремою 4 функція $w=u-v$ шукана і $\mu_w^+=\mu$. Для функції $w_1=-w$, $\mu_{w_1}^-=\mu$.

Висловлюємо вдячність А.А.Кондратюку за постійну увагу до роботи.

Список літератури: I. Л а н д к о ф Н.С. Основы современной теории потенциала. - М.: Наука, 1966. 2. Ш в а р ц Л. Анализ. - М.: Наука, 1972. Т.I. 3. Arsove M. Functions representable as differences of subharmonic functions.- Trans. Amer. Math. Soc., 1953, v.75. 4. Miles J.B. Quotient representations of meromorphic functions.- J. d'Analyse. Math., 1972, v.XXV, p.371-388. 5. Noverraz P. Extensions d'une methode de series de Fourier aux fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques. -- Seminaire P. Lelong, 6-eme anne. 1965-1966, Expose n.3. 6. Noverraz P. Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes. - Ann. Inst. Fourier, 1969, v.19, n.2 p. 419-493. 7. Rao N.V., Shea D. Growth problems for subharmonic functions of finite order in space.- Trans. Amer. Math. Soc., 1977, v. 230. p. 347-370. 8. Rubel L.A. Croissance et zeros des fonctions meromorphes. Espace duals de fonctions entieres - Publ. Seminaire Math, d'Orsay, 1965-1966. 9. Rubel L.A. A survey of a Fourier series method for meromorphic functions.- Lecture Notes in Math., 336, Springer Verlay, 1973, p.51-62. 10. Rubel L.A., Taylor B.A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions. – Bull. Soc. Math. France, 1968, v. 96, p. 53-96.

Стаття надійшла до редколегії 20.08.81

УДК 517.535.4

А.А.Кондратюк

# ЛІНІЙНІ КОМБІНАЦІЇ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ

Нехай $\Lambda^0$ – клас мероморфних функцій цілком регулярного зростання [5] відносно функції зростання $\lambda$, $\lambda(2r)=O(\lambda(r))$, $r\to\infty$. Добуток чи частка двох функцій з цього класу належить до нього [1], лінійна комбінація, взагалі кажучи, – ні. Для цілих функцій цілком регулярного зростання в сенсі Левіна-Пфлюгера [2] зростання лінійних комбінацій таких функцій вивчені у працях [3, 4]. Наступна теорема є узагальненням для класів $\Lambda^0$ відповідних результатів цих праць.

Через $h(\theta,f)$ позначимо індикатор [5] функції $f\in\Lambda^0$.

Т е о р е м а . Нехай $f,g\in\Lambda^0$. Якщо число $-a$ не належить до множини валіронівських виняткових значень [3 , с. 147] функції $f/g$, то $f+ag\in\Lambda^0$ і $h(\theta,f+ag)=\max\{h(\theta,f),h(\theta,g)\}$.

Д о в е д е н н я . Маємо

$$f+ag=g\,(f/g+a). \qquad /1/$$

Позначимо $f/g=w$. Тоді $w\in\Lambda^0$. Для доведення першого твердження теореми досить доказати [7], що

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\frac{\ln|w(re^{i\theta})+a|}{\lambda(r)}-h^+(\theta,w)\right\|_1=0, \qquad /2/$$

коли число $-a$ не належить до множини валіронівських виняткових значень функції $w$. У /2/ $\|\cdot\|_1$ означає норму в просторі Лебега $L_1[0,2\pi]$, $h^+=\frac{1}{2}(|h|+h)$.

Запишемо нерівність

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln|w(re^{i\theta})+a|}{\lambda(r)}-h^+(\theta,w)\right|d\theta\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{\ln^+|w+a|}{\lambda(r)}-h^+(\theta,w)\right|d\theta+ \qquad /3/$$

$$+\frac{1}{\lambda(r)}\int_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{|w+a|}\,d\theta. \qquad /3/$$

Якщо число $-a$ –не валіронівське виняткове значення функції $w$, то за його означенням $m(r,-a,w)/T(r,w)\to 0$ при $r\to\infty$ /користуємось загальноприйнятими позначеннями [3] неванліннівської теорії розподілу значень/. Оскільки $w\in\Lambda^\circ$, то і $m(r,-a,w)/\lambda(r)\to 0$ при $r\to\infty$. Отже, другий доданок у правому боці нерівності /3/ прямує до нуля при $r\to\infty$.

Оскільки $w\in\Lambda^\circ$, то [7]

$$\frac{\ln|w(z)|}{\lambda(r)}\to h(\theta,w),\quad re^{i\theta}=z\to\infty,$$

зовні деякої $C_0^\circ$ –множини [I]. Звідси та з нерівності $|\ln^+|w+a|-\ln^+|w||\leqslant\ln^+|a|+\ln 2$ випливає, що

$$\frac{\ln^+|w+a|}{\lambda(r)}\to h^+(\theta,w),\quad re^{i\theta}=z\to\infty \qquad /4/$$

зовні тієї ж $C_0^\circ$ – множини.

Нехай $C_r=\{\theta: re^{i\theta}\in C_0^\circ\cap\{z:|z|=r\}\}$. Використовуючи теорему 7.3 з праці [3, с. 58], одержуємо

$$\int_{C_r}\left|\frac{\ln^+|w(re^{i\theta})+a|}{\lambda(r)}-h^+(\theta,w)\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant C(d,mes\,C_r)\frac{T(dr,w)}{\lambda(r)}+\max_\theta h^+(\theta,w)\,mes\,C_r,$$

де $d>1$, $0<C(d,mes\,C_r)\to 0$ при $mes\,C_r\to 0$. Звідси з означення $C_0^\circ$ –множини та з /4/ випливає, що і перший доданок в правому боці нерівності /3/ прямує до нуля при $r\to\infty$. Таким чином, справедливе співвідношення /2/, і перше твердження теореми доведено.

Зі співвідношення /2/ випливає [7], що $h(\theta,w+a)=h^+(\theta,w)$. Звідси, враховуючи співвідношення /I/ і рівність $h(\theta,w)=h(\theta,f)-h(\theta,g)$, одержуємо друге твердження теореми.

Множина валіронівських винятковиx значень мероморфної функції має логарифмічну ємність нуль [9, с.280]. Більш тонкий результат належить Хіллентрену [II].

Означення [3,II]. Множина $E \subset \mathbb{C}$ називається $H$ - множиною, якщо вона є не більш ніж злічечним об"єднанням множин $G$, кожна з яких має наступну властивість $(H)$ : існують $\gamma > 0$ і нескінченна послідовність $\{a_n\}$ комплексних чисел такі, що кожен елемент $a \in G$ задовольняє нерівність $|a-a_n| < \exp\{-\exp \gamma n\}$ для безмежної множини значень $n$.

Зауважимо, що $h$ -міра Хаусдорфа [IO, с.238] $H$ -множини дорівнює нулеві [II] для довільної функції $h$, яка задовольняє умову

$$\int\limits_0 h(t) t^{-1} (-\ln t)^{-1} dt < \infty .$$

Відомо [II], що множина скінченних валіронівських виняткових значень довільної мероморфної функції скінченного порядку є $H$ -множиною. Враховуючи цей факт і використовуючи доведену вище теорему, одержуємо наступний результат.

Наслідок. Нехай $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Lambda^0$. Існує $H$ -множина $E = E(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ така, що для довільної раціональної функції $R$ від $n$ змінних, коефіцієнти якої не належать до $E$, виконується $R(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \Lambda^0$.

При $\lambda(r) = r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ - уточнений порядок [2, 8] одержано наступний результат. Якщо $H$ -множина $E$ є об"єднанням скінченного числа множин з властивістю $(H)$ або об"єднанням нескінченної кількості замкнених множин з властивістю $(H)$, то існують такі цілі функції $f, g \in \Lambda_0$, коли $f + ag \notin \Lambda^0$ при $-a \in E$.

У зв"язку з теоремою, доведеною в цій статті, виникає питання /яке поставлене О.Е.Еременком/: чи справедливе $f + ag \in \Lambda^0$ при $f, g \in \Lambda^0$, коли дефект в сенсі Неванлінни $\delta(-a, f/g)$ збігається з відмінним від нуля дефектом у сенсі Валірона $\Delta(-a, f/g)$ ?

Відповідь на нього дає наступний контрприклад, запропонований А.А.Гольдбергом.

Приклад. Нехай $f_1 \in \Lambda^\circ$, функція $\lambda(r)$ опукла відносно $\ln r$, $f_1$ ціла, $h(\theta, f_1)=2$ для всіх $\theta \in R$. Згідно з працею [5], така функція існує. Візьмемо також цілу функцію $f_2 \notin \Lambda^\circ$ таку, що $\max\{\ln|f_2(z)|: |z|=r\} \leq \lambda(r)$ і

$$N(r, \frac{1}{f_2}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f_2(re^{i\theta})|d\theta = b\lambda(r) + o(\lambda(r)),\ r \to \infty$$

при деякому $b$, $0 \leq b \leq 1$. Зауважимо, що при $\lambda(r)=r^n$, $n \in N$, можна взяти $b=0$.

Вважаємо без втрати загальності, що $f_1$ і $f_2$ не мають спільних нулів. Тоді за формулою Картана

$$T(r, \frac{f_2}{f_1}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max\{\ln|f_1(re^{i\theta})|, \ln|f_2(re^{i\theta})|\}d\theta + const.$$

Використовуючи згадані вище асимптотичне поводження $\ln|f_1|$ зовні деякої $C_0^\circ$ - множини і теорему 7.3 з [3, с.58], одержуємо

$$T(r, \frac{f_2}{f_1}) = (2+o(1))\lambda(r),\ r \to \infty.$$

З аналогічних міркувань

$$m(r, \frac{f_1}{f_2}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|\frac{f_1(re^{i\theta})}{f_2(re^{i\theta})}\right|d\theta = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\ln|f_1| - \right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi}\ln|f_2|d\theta\right\} + o(\lambda(r)) = (2-b+o(1))\lambda(r),\ r \to \infty.$$

Таким чином, $\delta(0, f_2/f_1) = \Delta(0, f_2/f_1) = \frac{2-b}{2}$. Приймемо $f=f_1+f_2$, $g=f_1$, $a=-1$. Оскільки $\ln|f_1+f_2| = \ln|f_1| + \ln|1+f_2/f_1|$ і $|\ln|1+f_2/f_1|| < \ln 2$ зовні деякої $C_0^\circ$ -множини, то [7] $f \in \Lambda^\circ$. Крім того, $f/g - 1 = f_2/f_1$, тому $\delta(1, f/g) = \Delta(1, f/g) = \delta(0, f_2/f_1)$. Однак $ag+f \notin \Lambda^\circ$.

Список літератури: 1. Азарин В.С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка. - Мат. сб., 1979, т.108, № 2. 2. Гольдберг А.А., Єременко О.Е., О с т р о в с ь к и й И.В. Про суму цілих функцій цілком регулярного зростання. – ДАН УРСР, сер. А, 1982, № 2. 3. Г о л ь д б е р г А.А., О с т р о в с к и й И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. 4. Г о л ь д б е р г А.А., О с т р о в с ь к и й И.В. Про зростання цілих ермітово-позитивних функцій скінченного порядку. – ДАН УРСР, сер. А, 1981, № 4. 5. К о н д р а т ю к А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. – Мат. сб., 1978, т. 106, № 3. 6. К о н д р а т ю к А.А. Применение теоремы о компактности семейств субгармонических функций к мероморфным. – Усп. мат. наук, 1982, вып. 4 /226/. 7. К о н д р а т ю к А.А. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. II. – Мат. сб., 1980, т.113, № 1. 8. Л е в и н Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. 9. Н е в а н л и н н а Р. Однозначные аналитические функции. – М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 10. Х е й м а н У., К е н н е д и П. Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. 11. Hyllengren A. Valiron deficient values for meromorphic functions in the plane - Acta math., 1970, v. 124.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.82

УДК 539.3

Р.М.Бурда, Д.Г.Хлєбніков

## ВИЗНАЧЕННЯ ЗУСИЛЛЯ ГЕРМЕТИЗАЦІЇ ДЛЯ УЩІЛЬНЮЮЧОГО ЕЛЕМЕНТА У ВИГЛЯДІ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ СЕРЕДНЬОЇ ТОВЩИНИ

Розглянемо ущільнююче з"єднання, що складається з ущільнюючого клапана, який моделюється круглою пластинкою середньої товщини, і жорсткої опори /рис. 1/. Внаслідок недосконалого витотовлення та інших випадкових факторів між клапаном і сідлом /опорою/ є щілини. Для їх усунення і забезпечення герметичності з"єднання клапан притискається до опори деяким зусиллям. Те мінімальне зусилля, яке забезпечує повний контакт пластини з опорою, вважатимемо зусиллям герметизації.

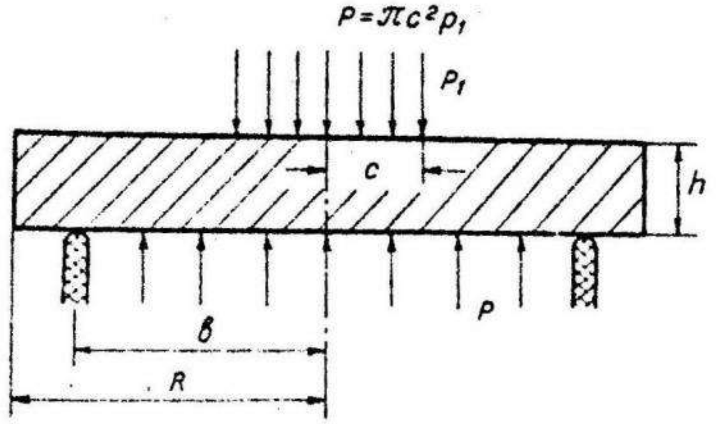



Рис. І.

Нехай відхилення опори від плоскої форми має циклічний характер, тобто край опори є кривою лінією, що має рівняння

$$z = f(\theta) = \frac{d}{2}(1+\cos n\theta), \quad r = b. \qquad /1/$$

Умова контакту пластинки з опорою має вигляд

$$w(b,\theta) = f(\theta). \qquad /2/$$

Прогин пластинки $w(r,\theta)$ визначаємо, використовуючи теорію Е.Рейснера, згідно з якою напруженодеформований стан пластинки середньої товщини описується системою рівнянь [2]:

$$D\Delta\Delta w = q - k\Delta q,$$
$$\Delta\Phi - \delta^2\Phi = 0, \qquad /3/$$

де $\Phi(r,\theta)$ – функція напружень;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2};\ D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)};\ k = \frac{h^2}{10}\frac{2-\nu}{1-\nu};\ \delta^2 = \frac{10}{h^2},$$

$E, \nu$ – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона; $h$ – товщина пластинки.

Зовнішнє навантаження на пластинку $q(r,\theta)$ записуємо у вигляді

$$q(r,\theta) = p_1\chi(c-r) - p\chi(b-r) - q_0(\theta)\delta(r-b),$$

де $\delta(u)$ – дельта функція Дірака; $\chi(u)$ – одинична функція Хевісайда.

До системи рівнянь /3/ додаємо граничні умови вільного краю на контурі $r=R$ ( $R$ – радіус пластинки )

$$M_r \Big|_{r=R} = 0; \quad M_{r\theta} \Big|_{r=R} = 0; \quad Q_r \Big|_{r=R} = 0. \qquad /4/$$

Вирази для $M_r, M_{r\theta}, Q_r$ через $w, \Phi$ наведені у праці [2].

Крім цього, функції $w(r,\theta), \Phi(r,\theta)$ та їх похідні повинні бути обмежені при $r=0$ .

Розв"язок системи диференціальних рівнянь /3/, а також невідомий контактний тиск $q_0(\theta)$ шукаємо у вигляді

$$w(r,\theta) = R_0(r) + R_n(r)\cos n\theta, \qquad /5/$$

$$\Phi(r,\theta) = \rho_0 J_0(\delta r) + \rho_n J_n(\delta r)\cos n\theta, \qquad /6/$$

$$q_0(\theta) = \beta_0 + \beta_n \cos n\theta. \qquad /7/$$

З умов рівноваги пластинки та знакосталості контактного тиску знаходимо

$$\beta_0 = \beta_n = \frac{P - \pi b^2 p}{2\pi b}. \qquad /8/$$

Після підстановки виразів /5/–/7/ у перше з рівнянь системи /3/ одержимо для $R_n(r)$ диференціальне рівняння Ейлера, розв"язуючи яке маємо

$$R_n(r) = \frac{(P - \pi b^2 p) b^2}{16\pi n D}\left[A_n\left(\frac{r}{R}\right)^{n} + B_n\left(\frac{r}{R}\right)^{-n} + C_n\left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} + D_n\left(\frac{r}{R}\right)^{-n+2}\right] + R_n^*(r), \qquad /9/$$

де частковий розв"язок $R_n^*(r)$ , отриманий методом інтегрального лишку [I] , має вигляд

$$R_n^*(r) = \begin{cases} -\dfrac{\beta_n}{8nD}\left\{\left[\dfrac{b^{n+3}}{r^n} - \dfrac{r^{n+2}}{b^{n-1}}\right]\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n-1}\left[\dfrac{r^n}{b^{n-3}} - \dfrac{b^{n+1}}{r^{n-2}}\right] - 4k\left[\dfrac{b^{n+1}}{r^n} - \dfrac{r^n}{b^{n-1}}\right]\right\} & \text{при } r<b. \\ 0 & \text{при } r>b \end{cases} \qquad /I0/$$

Сталі інтегрування $B_n, D_n$ визначаємо з умови обмеженості розв"язку при $r=0$

$$B_n = \frac{b^{n-2}}{(n+1)R^n}\left[b^2 - 4k(n+1)\right],$$

$$D_n = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{b}{R}\right)^{n-2}, \qquad /II/$$

а сталі $A_n, C_n, P_n$ – визначаємо з граничних умов /4/:

$$C_n=\Big\{n(n+1)(1-\nu)B_n+\Big[\frac{8n(n+1)}{\delta^2R^2}-n(1-\nu)+(1+\nu)-2n\Big(1-2\frac{J_n'(\delta R)}{J_n(\delta R)}\Big)-$$

$$-\frac{4n}{R^2}\Big(\delta^2-\frac{R}{\delta}\,\frac{J_n'(\delta R)}{J_n(\delta R)}\Big)\Big](n-1)D_n\Big\}\Big/$$

$$\Big/\Big[(1+\nu)-2n\Big(1-2\frac{J_n''(\delta R)}{J_n(\delta R)}\Big)+\frac{4n}{R^2}\Big(\delta^2-\frac{R}{\delta}\,\frac{J_n'(\delta R)}{J_n(\delta R)}\Big)\Big]$$

$$A_n=\Big\{(n+1)(1-\nu)B_n-\Big[\frac{8(n+1)}{\delta^2R^2}-(1-\nu)+4\Big(1-2\frac{J_n''(\delta R)}{J_n(\delta R)}\Big)\Big](n-1)D_n-$$

$$-\Big[\frac{8(n-1)}{\delta^2R^2}+(1-\nu)+4\Big(1-2\frac{J_n'(\delta R)}{J_n(\delta R)}\Big)\Big](n+1)C_n\Big\}\frac{1}{(n-1)(1-\nu)}, \qquad /12/$$

де $J_n(\omega), J_n'(\omega), J_n''(\omega)$ – бесселеві функції уявного аргумента та їх похідні.

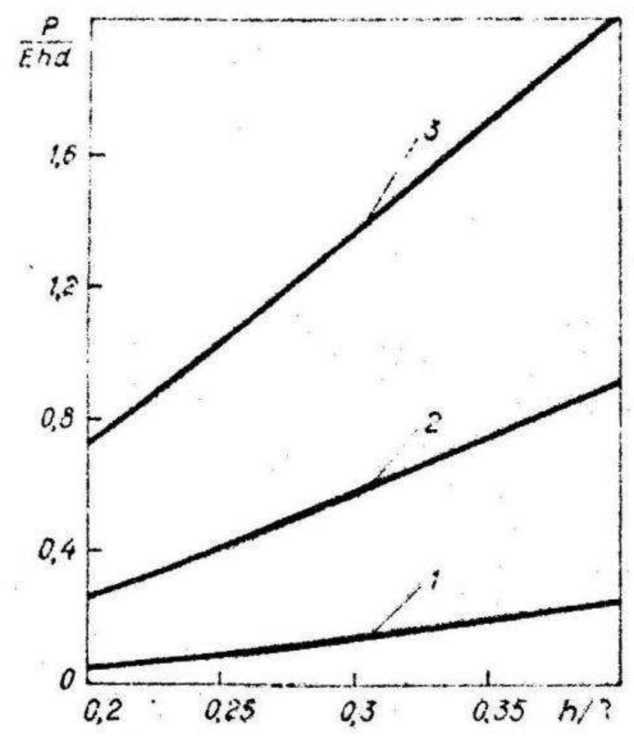



Рис. 2.

Зусилля герметизації визначаємо з умови /2/. Використовуючи /1/ та /5/, дістаємо

$$R_n(b)=\frac{d}{2}. \qquad /13/$$

Звідси на основі /8/–/10/ знаходимо зусилля герметизації

$$P = \pi b^2 p + \frac{8\pi n D d}{b^2 S}, \qquad /14/$$

де
$$S = A_n\left(\frac{b}{R}\right)^n + B_n\left(\frac{b}{R}\right)^{-n} + C_n\left(\frac{b}{R}\right)^{n+2} + D_n\left(\frac{b}{R}\right)^{-n+2},$$

а сталі $A_n, B_n, C_n, D_n$ визначено формулами /11/, /12/.

Одержані результати легко перенести на випадок, коли функція $f$, яка визначає відхилення опори від плоскої форми, зображена рядом Фур"є загального вигляду.

На рис. 2 показана залежність величини $\frac{P}{Ehd}$ від відношення $h/R$, при $p=0;\ \nu=0{,}3;\ b/R=0{,}95$. Криві 1–3 відповідають випадкам $n=2,3,4$.

Список літератури: 1. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. – М.; Л., Гостехиздат, 1950. 2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966.

Стаття надійшла до редколегії 05.04.82

УДК 539.377

В.З.Дідик, Б.М.Кордуба

## ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У НАПІВБЕЗМЕЖНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ ПРИ КУСКОВО-СТАЛОМУ КОЕФІЦІЄНТІ ТЕПЛОВІДДАЧІ

Розглянемо вільно оперту та теплоізольовану по краю $\alpha=0$ циліндричну оболонку, що нагрівається внутрішніми джерелами тепла потужністю $q_0=const$ або зовнішнім середовищем температури $t_0=const$, які діють на відстані $d$ від її краю відповідно по областях $d\le\alpha\le c,\ |\gamma|\le\delta$ і $d\le\alpha\le c,\ \gamma=\pm\delta$. Через поверхні $\gamma=\pm\delta$ оболонки здійснюється конвективний теплообмін зі зовнішнім середовищем нульової температури при нагріванні внутрішніми дже–

релами тепла і температури $t_c = t_0 N(\alpha)$ при нагріванні зовнішнім середовищем. Тут $c=d+2b$, $N(\alpha)=S_-(\alpha-d)-S_+(\alpha-c)$, $S_\pm(\xi)$ – асиметричні одиничні функції.

Усталене температурне поле в оболонці знаходимо з рівняння теплопровідності [1] при граничних умовах

$$\left.\frac{dT}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0; \qquad T\Big|_{\alpha\to\infty} = 0. \qquad /1/$$

Температурне поле в цій оболонці має вигляд

$$T=\frac{q}{\lambda k_0^2}\Big\{\Big(ch 2k_0 b+\frac{k_0}{k_1} sh 2k_0 b-1\Big) ch k_1\alpha\,[1-S_-(\alpha-d)]+$$
$$+\Big[sh 2k_0 b\Big(\frac{k_1}{k_0} sh k_1 d+\frac{k_0}{k_1} ch k_1 d\Big)+e^{k_1 d} ch 2k_0 b-$$
$$-ch k_1 d\, ch k_0(\alpha-d)-\frac{k_1}{k_0} sh k_1 d\,(sh k_0(\alpha-d)-sh k_0(\alpha-c))-$$
$$-sh k_1 d\, ch k_0(\alpha-c)\Big] N(\alpha)+\Big[ch 2k_0 b(ch 2k_0 b-1)(ch k_1(\alpha-b)-$$
$$-e^{k_1 d} ch k_1(\alpha-c))+sh 2k_0 b\,(sh k_1 d\, sh 2k_0 b+$$
$$+\frac{k_0}{k_1} ch k_1 d)\, e^{-k_1(\alpha-c)}\Big] S_+(\alpha-c)\Big\}\times$$
$$\times\Big[sh 2k_0 b\Big(\frac{k_1}{k_0} sh k_1 d+\frac{k_0}{k_1} sh k_1 d\Big)+e^{k_1 d} ch 2k_0 b\Big]^{-1}, \qquad /2/$$

де $q=q_0$ при нагріванні внутрішніми джерелами тепла; $q=t_0\alpha_0/\delta$ при нагріванні зовнішнім середовищем; $k_i^2=\alpha_i/\lambda\delta\ (i=0,1)$; $\lambda, \alpha_0, \alpha_1$ – відповідно коефіцієнти теплопровідності, тепловіддачі з поверхонь області нагрівання та за її межами.

Температурні напруження в оболонці знаходимо за відомими формулам [2].

Задовільнивши граничні умови

$$\{W, N_1, M_1\}\Big|_{\alpha=0}=0; \quad \{N_1, N_2, M_1\}\Big|_{\alpha\to\infty}=0, \qquad /3/$$

одержуємо компоненту вектора переміщень

$$W = Q\Big\{f(\alpha)(\sin n\alpha + \cos n\alpha) - f_1(\alpha)\sin n\alpha + \frac{1}{4n^4+k_1^4}\Big[4n^2 f_2(\alpha) + m_1\Big(k_1 sh(k_1 d)p_1^- + ch(k_1 d)\frac{\partial p_1^-}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=d} - m_2\Big(k_1 p_1^+ - \frac{\partial p_1^+}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big] + \frac{1}{4n^4+k_0^4}\Big[mn^{-2}(4n^4+k_0^4)N(\alpha) - 4n^2 f_3(\alpha) - \Big(m_3 p_0^- - m_4\frac{\partial p_0^-}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=d} + \Big(k_1 m_2 p_0^+ - m_5\frac{\partial p_0^+}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big] + f_4(\alpha) - \varphi(\alpha)\Big\}, \qquad /4/$$

де

$$f(\alpha) = \frac{1}{4n^4+k_1^4}\Big\{m_1\Big[4n^2(S_-(-d)-1)e^{-n\alpha} - \Big(k_1 sh(k_1 d)q_1^- + ch(k_1 d)\,sign_-(-d)\frac{\partial q_1^-}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=d}\Big] + m_2\Big(k_1 q_1^- + \frac{\partial q_1^-}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big\} + \frac{1}{4n^4+k_0^4}\times$$
$$\times\Big\{4n^2\Big[ch k_1 d\, ch k_0 d + sh k_1 d\, ch k_0 c + \frac{k_1}{k_0} sh k_1 d(sh k_0 c - sh k_0 d)\Big]\times S_-(-d)e^{-n\alpha} + \Big(m_3 q_0^- - m_4\, sign_-(-d)\frac{\partial q_0^-}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=d} - \Big(k_1 m_2 q_0^- + m_5\frac{\partial q_0^-}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big\} + \frac{m}{2n^2}\Big[\cos(nd)\,sign_-(-d)e^{-n(\alpha+d)} - 2S_-(-d)e^{-n\alpha} + \cos(nc)e^{-n(\alpha+c)}\Big];$$

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{n(4n^4+k_1^4)}\Big\{m_1\Big(k_1 sh(k_1 d)\,sign_-(-d)\frac{\partial q_1^-}{\partial\xi} + ch(k_1 d)\frac{\partial^2 q_1^-}{\partial\xi^2}\Big)\Big|_{\xi=d} + m_2\Big(k_1\frac{\partial q_1^-}{\partial\xi} + \frac{\partial^2 q_1^-}{\partial\xi^2}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big\} + \frac{1}{4n^4+k_0^4}\Big\{4n\Big[k_1 sh k_1 d(ch k_0 c - ch k_0 d) + k_0(ch k_1 d\, sh k_0 d + sh k_1 d\, sh k_0 c)\Big]S_-(-d)e^{-n\alpha} - \frac{1}{n}\Big[\Big(m_3\, sign_-(-d)\frac{\partial q_0^-}{\partial\xi} - m_4\frac{\partial^2 q_0^-}{\partial\xi^2}\Big)\Big|_{\xi=d} - \Big(k_1 m_2\frac{\partial q_0^-}{\partial\xi} + m_5\frac{\partial^2 q_0^-}{\partial\xi^2}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big]\Big\} + \frac{m}{2n^2}\Big[(\sin nd + \cos nd)e^{-n(\alpha+d)} - (\sin nc + \cos nc)e^{-n(\alpha+c)}\Big].$$

$$f_2(\alpha) = m_1[1 - S_-(\alpha-d)]ch k_1\alpha + [m_6 ch k_1(\alpha-2b) - m_7 sh k_1(\alpha-c) + - m_8 ch k_1(\alpha-c)]S_+(\alpha-c);$$

$$f_3(\alpha)=\Big\{ch\,k_1 d\,ch\,k_0(\alpha-d)+sh\,k_1 d\;\;ch\,k_0(\alpha-c)+$$

$$+\frac{k_1}{k_0}sh\,k_1 d[sh\,k_0(\alpha-d)-sh\,k_0(\alpha-c)]\Big\}N(\alpha);$$

$$f_4(\alpha)=\frac{m}{2n^2}\Big[\cos n|\alpha-c|_+e^{-n|\alpha-c|_+}sign_+(\alpha-c)-\cos n|\alpha-d|_-\times$$

$$\times e^{-n|\alpha-d|_-}sign_-(\alpha-d)\Big];\quad \varphi(\alpha)=f(\alpha)-f_1(\alpha)-f_5(\alpha);$$

$$f_5(\alpha)=\frac{1}{4n^4+k_1^4}\Big\{m_1\big[2k_1^2(1-S_-(-d))e^{-n\alpha}-(k_1 sh(k_1 d)q_1^+ +$$

$$+ch(k_1 d)\;\;sign_-(-d)\frac{\partial q_1^+}{\partial\xi})\Big|_{\xi=d}+m_2(k_1 q_1^+ +\frac{\partial q_1^+}{\partial\xi})\Big|_{\xi=c}\Big\}+$$

$$+\frac{1}{4n^4+k_0^4}\Big\{2k_0\;\;[k_1 sh\,k_1 d(sh\,k_0 d-sh\,k_0 c)-$$

$$-k_0(ch\,k_1 d\,ch\,k_0 d+sh\,k_1 d\,sh\,k_0 c)]\;\;S_-(-d)e^{-n\alpha}+$$

$$+(m_3 q_0^+ -m_4\,sign_-(-d)\frac{\partial q_0^+}{\partial\xi})\Big|_{\xi=d}-(k_1 m_2 q_0^+ +$$

$$+m_5\frac{\partial q_0^+}{\partial\xi})\Big|_{\xi=c}\Big\}-\frac{m}{2n^2}\big[\sin(nd)\,sign_-(-d)\,e^{-n(\alpha+d)}+$$

$$+\sin(nc)\,e^{-n(\alpha+c)}\big];$$

$$q_i^{\mp}=\frac{1}{2n}\big[(2n^2\pm k_i^2)\sin n\xi\mp(2n^2\mp k_i^2)\cos n\xi\big]e^{-n(\alpha+\xi)};$$

$$\rho_i^{\pm}=\frac{1}{2n}\big[(2n^2+k_i^2)\sin n|\alpha-\xi|_\pm-(2n^2-k_i^2)\cos n|\alpha-\xi|_\pm\big]e^{-n|\alpha-\xi|_\pm};$$

$$(i=0,1);$$

$$m=\left(\frac{k_1}{k_0}\,sh k_1 d+\frac{k_0}{k_1}\,ch k_1 d\right)sh 2k_0 b+(sh k_1 d+ch k_1 d)\,ch 2k_0 b;$$

$$m_1=ch 2k_0 b+\frac{k_0}{k_1}\,sh 2k_0 b-1;\quad m_2=sh k_1 d(1-ch 2k_0 b)-$$

$$-\frac{k_0}{k_1}\,ch k_1 d\, sh 2k_0 b;\quad m_3=sh k_1 d\,[k_1(ch 2k_0 b-1)+k_0 sh 2k_0 b];$$

$$m_4=sh k_1 d\left(\frac{k_1}{k_0}\,sh 2k_0 b+ch 2k_0 b\right)+ch k_1 d;\quad m_5=\left(1+\frac{k_1}{k_0}\,sh 2k_0 b\right)\times$$

$$\times sh k_1 d+ch k_1 d\, ch 2k_0 b;\quad m_6=ch 2k_0 b(ch 2k_0 b-1);$$

$$m_7=\left(sh k_1 d\, sh 2k_0 b+\frac{k_0}{k_1}\,ch k_1 d\right)sh 2k_0 b;\quad m_8=m_7-$$

$$-(sh k_1 d+ch k_1 d)\,m_6;\quad Q=\frac{\alpha_t\, q n^2 R}{\lambda m k_0^2};\quad n^2=\sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{4\delta^2 R^2}};$$

$$|\xi|_{\pm}=\xi\, sign_{\pm}\,\xi;\qquad sign_{\pm}\,\xi=2S_{\pm}(\xi)-1;$$

$R$ – радіус середньої поверхні циліндричної оболонки; $\nu$ – коефіцієнт Пуассона.

Температурні напруження, викликані температурним полем /I/, для цієї оболонки мають вигляд

$$\sigma_{\alpha\alpha}=Q_1\Big\{f(\alpha)(\cos n\alpha-\sin n\alpha)-f_1(\alpha)\cos n\alpha-\frac{1}{4n^4+k_1^4}\times$$

$$\times\Big[2k_1^2 f_2(\alpha)-m_1\Big(k_1 sh(k_1 d)\tilde{P}_1^- +ch(k_1 d)\frac{\partial \tilde{P}_1^-}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=d}+$$

$$+m_2\Big(k_1\tilde{P}_1^+-\frac{\partial\tilde{P}_1^+}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big]+\frac{1}{4n^4+k_0^4}\,\Big[2k_0^2 f_3(\alpha)-$$

$$-\Big(m_3\tilde{P}_0^- - m_4\frac{\partial\tilde{P}_0^-}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=d}+\Big(k_1 m_2\tilde{P}_0^+ - m_6\frac{\partial\tilde{P}_0^+}{\partial\xi}\Big)\Big|_{\xi=c}\Big]-$$

$$-f_6(\alpha)-\varphi(\alpha)\Big\};$$

$$\sigma_{\beta\beta} = Q_2 \{ f(\alpha)(\sin n\alpha + \cos n\alpha) - f_1(\alpha)\sin n\alpha -$$

$$- \frac{1}{4n^4 + k_1^4} \left[ k_1^4 n^{-2} f_2(\alpha) - m_1 \left( k_1 sh(k_1 d) \tilde{p}_1^- + ch(k_1 d) \frac{\partial \tilde{p}_1^-}{\partial \xi} \right)\Big|_{\xi = d} + \right.$$

$$\left. + m_2 \left( k_1 \tilde{p}_1^+ - \frac{\partial \tilde{p}_1^+}{\partial \xi} \right)\Big|_{\xi = c} \right] + \frac{1}{4n^4 + k_0^4} \left[ k_0^4 n^{-2} f_3(\alpha) - \right.$$

$$\left. - \left( m_3 \tilde{p}_0^- - m_4 \frac{\partial \tilde{p}_0^-}{\partial \xi} \right)\Big|_{\xi = d} + \left( k_1 m_2 \tilde{p}_0^+ - m_5 \frac{\partial \tilde{p}_0^+}{\partial \xi} \right)\Big|_{\xi = c} \right] +$$

$$+ f_4(\alpha) - \varphi(\alpha) \} + \nu \left[ \sigma_{\alpha\alpha} + Q_1 \psi(\alpha) \right],$$

де $\tilde{p}_i^{\pm} = \frac{1}{2n} \left[ (2n^2 - k_i^2) \sin n|\alpha - \xi|_{\pm} + (2n^2 + k_i^2) \times \right.$

$\left. \times \cos n|\alpha - \xi|_{\pm} \right] e^{-n|\alpha - \xi|_{\pm}} \qquad (i = 0, 1);$

$$f_6(\alpha) = \frac{m}{2n^2} \left[ \sin n|\alpha - c|_+ e^{-n|\alpha - c|_+} \, sign_+ (\alpha - c) - \right.$$

$$\left. - \sin n|\alpha - d|_- e^{-n|\alpha - d|_-} \, sign_- (\alpha - d) \right];$$

$$Q_1 = \frac{2QEn^2\gamma}{1 - \nu^2}; \; Q_2 = \frac{QE}{R}; \; E$$ – модуль Юнга.

Список літератури: 1. К о л я н о Ю.М., Д и д ы к В.З. Установившиеся напряжения в бесконечной цилиндрической оболочке с теплообменом, обусловленные локальным нагревом. – Математические методы и физико-механические поля, 1978, вып. 8. 2. П і д с т р и г а ч Я.С., Я р е м а С.Я. Температурні напруження в оболонках. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.82

УДК 512.512

М.Я.Комарницький, О.Д.Артемович

# ПРО ІДЕАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ КІЛЬЦЯ

Всі розглядувані кільця вважатимемо асоціативними, а всі модулі – лівими та унітарними. Через $\sigma$ позначатимемо кільцевий ендоморфізм кільця $R$. Нагадаємо, що відображення $d: R \to R$ називається $\sigma$-диференціюванням кільця $R$, якщо для довільних $a, b \in R$

$$d(a+b) = da + db,$$
$$d(ab) = da \cdot b + \sigma(a)\, db.$$

Через $\Delta$ позначимо множину всіх $\sigma$-диференціювань, заданих на $R$, причому $\sigma$ пробігає півгрупу всіх кільцевих ендоморфізмів кільця $R$. Якщо в кільці $R$ виділена деяка множина $\Omega$ $\sigma$-диференціювань, то кільце $R$ називатимемо $\Omega$-диференціальним. Елемент $c$ $\Omega$-диференціального кільця $R$ назвемо $\Omega$-константою, якщо для кожного $d \in \Omega$ $dc = 0$. Абсолютними константами кільця $R$ називатимемо $\Delta$ – константи. Очевидно, множина всіх $\Omega$-констант диференціального кільця є підкільцем $C_0$ кільця $R$, а множина всіх абсолютних констант – підкільцем $C$, котре називатимемо підкільцем абсолютних констант. Ясно, що $C \subseteq C_0$.

Лівий /правий, двосторонній/ ідеал $J$ $\Omega$-диференціального кільця $R$ називається $\Omega$ – диференціальним лівим /правим, двостороннім/ ідеалом, якщо для кожного елемента $a \in J$ і кожного $\sigma$-диференціювання $d \in \Omega$ елемент $da$ належить до $J$.

Введемо поняття $\Omega$ – ідеально-диференціального кільця.

$\Omega$ – диференціальне кільце називаємо лівим $\Omega$-ідеально-диференціальним кільцем /скорочено лівим $\Omega$-$ID$ – кільцем/, коли кожний лівий ідеал кільця $R$ є $\Omega$ – диференціальним. Якщо $\Omega = \Delta$, то букву $\Omega$ у записі опускаємо.

Поняття $ID$ – кільця у деякому сенсі дуальне поняттю диференціально простого кільця *.

---

* Posner E.C. Differentiably simple rings – Proc. Amer. Math. Soc., 11, 3(1960), 337-343

Має місце очевидна теорема.

Теорема I. Нехай $R$ - $\Omega$ - диференціальне кільце. Тоді наступні умови еквівалентні:

1/ кільце $R$ - ліве $\Omega$ - $ID$ - кільце;

2/ кожний головний лівий ідеал - $\Omega$ - диференціальний.

Нехай $d: R \to R$ - деяке $\sigma$ - диференціювання кільця $R$. Відображення $\delta$ лівого $R$ -модуля $\mathcal{M}$ в себе називають $(\sigma, d)$ - диференціюванням, якщо для кожних $a \in R, m, n, k \in \mathcal{M}$ наявні рівності:

1/ $\delta(m+n) = \delta m + \delta n$;

2/ $\delta(ak) = da \cdot k + \sigma(a)\delta k$.

Припустимо, що для кожного $\sigma$ -диференціювання $d \in \Omega$ задане $(\sigma, d)$ - диференціювання $\delta$ лівого $R$ -модуля $\mathcal{M}$, множину яких позначимо через $\Omega^*$. Тоді модуль $\mathcal{M}$ називають $\Omega^*$ - диференціальним модулем.

Лема I. Нехай $\sigma \in End\, R$. Тоді для кожного $x \in R$ відображення $\partial_x : R \to R$, задане за правилом $\partial_x(a) = \sigma(a)x - xa$, є $\sigma$ - диференціюванням кільця $R$. Крім того, $\sigma - I$, де $I$ - тотожній ендоморфізм кільця $R$, також є $\sigma$ -диференціювання.

Доведення проводять безпосередньою перевіркою властивостей диференціювань.

Відображення $\partial_x : R \to R$, задане за правилом $\partial_x(a) = \sigma(a)x - xa$ для кожного $a \in R$, називаємо $\sigma$ - внутрішнім диференціюванням кільця $R$. Якщо $\sigma = I$ - тотожній ендоморфізм, то таке диференціювання називаємо внутрішнім.

Відображення $\tau$ модуля $\mathcal{M}$ в себе називаємо $\sigma$ - ендоморфізмом, якщо для кожних $m, n, k \in \mathcal{M}$ і будь-якого $\lambda \in R$ мають місце рівності

$$\tau(m+n) = \tau(m) + \tau(n);$$

$$\tau(\lambda k) = \sigma(\lambda)\,\tau(k).$$

Л е м а 2. Нехай $R$ – кільце, $\sigma$ – його кільцевий ендоморфізм і $\mathcal{M}$ – лівий $R$ -модуль. Тоді для кожного $\sigma$ -ендоморфізму $\tau$ модуля $\mathcal{M}$ відображення $d: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, визначене за правилом

$$d(m) = \tau(m) - m,$$

є $(\sigma, \delta)$ – диференціюванням, де $\delta$ – диференціювання $\sigma - I$.

Доведення проводять безпосередньою перевіркою.

Л е м а 3. Нехай $J$ – інваріантний відносно ендоморфізму $\sigma \in End\, R$ ідемпотентний двосторонній ідеал кільця $R$. Тоді для кожного $\sigma$ – диференціювання $d$ кільця $R$ $d(J) \subseteq J$, тобто $J$ – $d$-диференціальний ідеал кільця $R$.

Доведення випливає з того факту, що кожний елемент ідеала $J$ зображається у вигляді суми добутків елементів із $J$.

Л е м а 4. Головний лівий ідеал $Ra$ кільця $R$ є $\sigma\text{-}Inn(R)$– диференціальним тоді і лише тоді, коли $Ra \supseteq \sigma(a)R$.

Д о в е д е н н я. Лівий ідеал $Ra$ $\sigma\text{-}Inn(R)$ – диференціальний тоді і лише тоді, коли для кожного $\sigma$ -внутрішнього диференціювання $\partial_x$ $\partial_x(a) \in Ra$. Це рівнозначне тому, що для кожного елемента $x \in R$ $\sigma(a)x - xa \in Ra$, яке має місце тоді і лише тоді, коли $\sigma(a)x \in Ra$. Лема доведена.

Т е о р е м а 2. Кільце $R$ є лівим $Inn(R)\text{-}ID$ – кільцем тоді і лише тоді, коли воно ліве дуо-кільце.

Д о в е д е н н я. У лемі 4 досить прийняти $\sigma = I$, де $I$ – тотожній ендоморфізм кільця $R$.

Л е м а 5. Нехай $\sigma \in End\, R$ і $J$ – лівий ідеал кільця $R$. Тоді для $\sigma$ – диференціювання $d = \sigma - I$ $d(J) \subseteq J$ тоді і лише тоді, коли $I$ – $\sigma$ – інваріантний.

Д о в е д е н н я. Справді, $d(J) \subseteq J$ тоді і лише тоді, коли $\sigma(a) - a \in J$ для кожного $a \in J$, а це рівнозначне тому, що $\sigma(a) \in J$, тобто $\sigma(J) \subseteq J$. Лема доведена.

Н а с л і д о к І. Усі ліві ідеали лівого $ID$-кільця $R$ є інваріантними відносно всіх кільцевих ендоморфізмів кільця $R$.

Т е о р е м а 3. Регулярне у сенсі Неймана кільце ідеально-диференціальне тоді і тільки тоді, коли воно строго регулярне.

Доведення безпосередньо випливає з леми 2 тому, що в строго регулярному кільці кожний лівий ідеал двосторонній та ідемпотентний.

Наведемо приклад правого $ID$-кільця, котре не є лівим $ID$-кільцем.

Розглянемо $Q$-алгебру $A$ рангу 3, елементи бази якої задовольняють співвідношення:

$$e_1^2 = e_1, \quad e_1 e_2 = 0, \quad e_1 u = u,$$
$$e_2 e_1 = 0, \quad e_2^2 = e_2, \quad e_2 u = 0,$$
$$u e_1 = 0, \quad u e_2 = u, \quad u^2 = 0.$$

Безпосередніми обчисленнями встановлюємо, що будь-яке диференціювання алгебри $A$ можна отримати за допомогою співвідношень

$$e_1' = au, \quad e_2' = bu, \quad u' = cu,$$

при деяких $a, b, c \in Q$, $a = -b$.

Всі, крім $(u)$, ідеали в $A$ ідемпотентні, але ліві ідеали $(e_1)$, $(e_2)$ не будуть $Inn(A)$-диференціальними ідеалами. Тому $A$ не можна назвати лівою $ID$-алгеброю. Зауважимо, що в $A$ всі праві ідеали двосторонні і $\Delta$-диференціальні. Отже, $A$ – права $ID$-алгебра.

Надалі вивчатимемо кільця, в яких не існує нетривіальних диференціювань.

Назвемо кільце абсолютно диференціально-тривіальним, якщо в ньому не можна задати нетривіальних $\mathfrak{G}$-диференціювань, і диференціально-тривіальним, якщо на ньому не можна задати нетривіальних звичайних диференціювань.

Очевидно, клас абсолютно диференціально-тривіальних кілець міститься головним чином у класі диференціально-тривіальних кілець і, отже, у класі $ID$-кілець. Зауважимо, що кожне абсолютно диференціально-тривіальне і кожне диференціально-тривіальне кільце комутативне. Крім цього, абсолютно диференціально-тривіальне кільце не має нетривіальних кільцевих ендоморфізмів. Зокрема, абсолютно диференціально-тривіальне кільце є нерозкладним.

Т е о р е м а 4. Нехай $R$ – абсолютно диференціально-тривіальне кільце простої характеристики $p$. Тоді $R$ ізоморфне полю із $p$ елементів.

Д о в е д е н н я. Відображення $\sigma: R \to R$, визначене за правилом $a \longmapsto a^p$, є ендоморфізмом кільця $R$. Оскільки, як зазначено вище, $R$ не володіє нетривіальними кільцевими ендоморфізмами і тому $\sigma(a)=a$, тобто $a^p=a$ для кожного $a \in R$. Тепер елемент $a^{p-1}$ ідемпотент, оскільки $(a^{p-1})^2 = a \cdot a^{p-2} = a^{p-1}$. Якщо б $a^{p-1} \neq 1$, то наше кільце було б розкладне і мало нетривіальні ендоморфізми.

Наступна теорема показує, що обмеження, зв"язані з ендоморфізмами, суттєві.

Т е о р е м а 5. Кожне кільце характеристики $n$, що задовольняє поліноміальній тотожності $x^n - x = 0$, є диференціально-тривіальним.

Н а с л і д о к 2. Кожне булеве кільце диференціально-тривіальне.

Надалі множину всіх можливих $I$ – диференціювань кільця $R$ позначатимемо через $Der\, R$.

Т е о р е м а 6. Для комутативної області цілісності $R$ характеристики нуль наступні твердження еквівалентні:

1/ $R$ не диференціально-тривіальне /тобто $Der\, R \neq 0$/;

2/ розширення $R \supset C$, де $C$ – підкільце $(Der\, R)$ – констант, не алгебраїчне.

Д о в е д е н н я. /1/$\Rightarrow$/2/. Нехай $Der\, R \neq 0$, але розширення $R \supset C$ є алгебраїчним. Тоді для кожного $z \in R$ існує

$f(x)\in C[x]$ , такий, що $f(z)=a_n z^n+\ldots+a_1 z+a_0=0$, причому $a_n\neq 0$ і $n$ – найменше серед можливих. Оскільки $Der\,R\neq 0$, то існує $d\in Der\,R$ і $y\in R$ такі, що $dy\neq 0$ Тоді $(na_n y^{n-1}+\ldots+a_1)\,dy=0$ , звідки отримуємо $na_n y^{n-1}+\ldots+2a_2 y+a_1=0$ , причому $na_n\neq 0$ , оскільки $Char\,R=0$ . Але це суперечить мінімальності $n$ . Отже, $y$ трансцендентний над $C$ , і, таким чином, розширення $R\supset C$ не є алгебраїчним.

/2/$\Rightarrow$ /І/. Якщо розширення $R\supset C$ не алгебраїчне, тоді існує елемент $y\in R$ трансцендентний над $C$ , але із умови $dy=0$ для всіх диференціювань $d\in Der\,R$ випливає, що $y\in C$ Отже, для деякого диференціювання $d\in Der\,R$ $dy\neq 0$ , тобто $Der\,R\neq 0$ . Теорема доведена.

Наслідок 3. Нехай $R$ – комутативна область цілісності характеристики нуль і $y$ – деякий елемент кільця. Тоді наступні твердження еквівалентні:

І/ $dy\neq 0$ при деякому диференціюванні $d\in Der\,R$ кільця $R$ .

2/ Елемент у трансцендентний над підкільцем $(Der\,R)$ - констант $C$ кільця $R$ . Якщо ці умови виконуються, тоді $y$ трансцендентний над простим підкільцем $P$ кільця $R$ .

Стаття надійшла до редколегії 22.02.82

УДК 531.8

С.В.Дениско

# ПРО ДЕЯКІ ВІДТВОРЕННЯ ПАР ПЛОСКИХ КРИВИХ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕХАНІЗМІВ

Нехай між точками двох кривих встановлена відповідність так, що відношення довжин відповідних дуг величина стала. Таку відповідність називатимемо відповідністю $S$.

Нехай криві $(\Delta)$, $(\Delta^*)$, що розміщені у площинах /на положення цих площин у просторі ніяких обмежень не накладається/, визначаються рівняннями

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \rho^* = \rho^*(K\varphi),$$

де $K = const$; $\varphi$ і $K\varphi$ – полярні кути; $\rho$, $\rho^*$ – полярні радіуси. Відповідність між точками цих кривих, для якої відповідні точки мають одне і те ж значення $\varphi$, називаємо відповідністю $T$.

Очевидно, для того щоб відповідність $T$ була також відповідністю $S$, необхідно і достатньо

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2 = m^2\left[\left(\frac{d\rho^*}{d\varphi}\right)^2 + K^2\rho^{*2}\right], \qquad /1/$$

де $m$ – додатна стала.

Т е о р е м а I. Нехай криві $(\Delta)$, $(\Delta^*)$ – супутниці циссоїд Діоклеса, а полярні рівняння кривих $(\Delta)$, $(\Delta^*)$ мають відповідно вигляд

$$\rho = a\frac{1+\cos^2\varphi}{\cos\varphi}, \quad \rho^* = a^*\frac{1+\cos^2 K\varphi}{\cos K\varphi}. \qquad /2/$$

де $a$, $a^*$ – додатні сталі. Тоді відповідність $T$ між точками кривих $(\Delta)$, $(\Delta^*)$ буде відповідністю $S$ в тому і тільки тому випадку, коли

$$K = \pm 1, \quad a = ma^*.$$

Д о в е д е н н я . З огляду на /2/ умову /1/ запишемо таким чином

$$a^2(\cos^4\varphi+1+2\cos 2\varphi\cos^2\varphi)\cos^4 k\varphi =$$
$$= m^2a^{*2}k^2(\cos^4 k\varphi+1+2\cos 2k\varphi\cos^2 k\varphi)\cos^4\varphi. \qquad /3/$$

Розклавши в ряд ліву і праву частину цієї рівності, матимемо

$$a^2\left[4-8(k^2+1)\varphi^2+\left(\frac{23}{3}+16k^2+\frac{20}{3}k^4\right)\varphi^4+\ldots\right]=$$
$$=m^2a^{*2}k^2\left[4-8(k^2+1)\varphi^2+\left(\frac{23}{3}k^4+16k^2+\frac{20}{3}\right)\varphi^4+\ldots\right].$$

Звідси знаходимо

$$k=\pm 1, \quad a=ma^*. \qquad /4/$$

Умови /4/ необхідні та достатні. Справді, /4/ задовольняє /3/. Теорему доведено.

Т е о р е м а 2. Нехай криві $(\Delta)$, $(\Delta^*)$ – криві, супровідні цисоїдам Діоклеса, а полярні рівняння кривих $(\Delta)$, $(\Delta^*)$ мають відповідно вигляд

$$\rho=a\frac{1+\sin^2\varphi}{\cos\varphi}, \quad \rho^*=a^*\frac{1+\sin^2 k\varphi}{\cos k\varphi}, \qquad /5/$$

де $a$, $a^*$ – додатні сталі. Для того щоб відповідність $T$ між точками цих кривих була відповідністю $S$, необхідно і достатньо

$$k=\pm 1, \quad a=ma^*.$$

Д о в е д е н н я . Згідно з /5/ умову /1/ перепишемо у такому вигляді:

$$a^2(\cos^4\varphi+4-4\cos 2\varphi\cos^2\varphi)\cos^4 k\varphi =$$
$$= m^2a^{*2}k^2(\cos^4 k\varphi+4-4\cos 2k\varphi\cos^2 k\varphi)\cos^4\varphi$$

Розклавши в ряд ліву та праву частину цієї рівності, матимемо

$$a^2\left[1+(10-2k^2)\varphi^2+\dots\right]=m^2a^{*2}k^2\left[1+(10k^2-2)\varphi^2+\dots\right],$$

звідки

$$k=\pm 1,\quad a=ma^*.$$

Очевидно, ці умови будуть необхідні та достатні.

Т е о р е м а 3. Нехай криві $(\Delta)$, $(\Delta^*)$ є прямими строфоїдами, а полярні рівняння кривих $(\Delta)$, $(\Delta^*)$ мають відповідно вигляд

$$\rho=a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi},\quad \rho^*=a^*\frac{\cos 2k\varphi}{\cos k\varphi}, \qquad /6/$$

де $a$, $a^*$ – додатні сталі. Тоді відповідність $T$ між точками кривих $(\Delta)$, $(\Delta^*)$ буде відповідністю $S$ тоді і тільки тоді, коли

$$k=\pm 1,\quad a=ma^*.$$

Д о в е д е н н я . Підставивши /6/ в /I/, матимемо

$$a^2\left[(\cos 2\varphi\sin\varphi-2\sin 2\varphi\cos\varphi)^2+\cos^2 2\varphi\cos^2\varphi\right]\cos^4 k\varphi=$$

$$=m^2a^{*2}k^2\left[(\cos 2k\varphi\sin k\varphi-2\sin 2k\varphi\cos k\varphi)^2+\right.$$

$$\left.+\cos^2 2k\varphi\cos^2 k\varphi\right]\cos^4\varphi. \qquad /7/$$

Розклавши в ряд ліву та праву частину рівності /7/, дістанемо

$$a^2\left[1+(4-2k^2)\varphi^2+\dots\right]=m^2a^{*2}k^2\left[1+(4k^2-2)\varphi^2+\dots\right].$$

Звідси маємо

$$k=\pm 1,\quad a=ma^*.$$

Оскільки ці умови задовольняють /7/, то необхідність і достатність доведено.

З а у в а ж е н н я . Будемо говорити, що механізм відтворює дану відповідність між точками двох кривих, якщо він відтворює відповідні точки в один і той же момент часу. Розглянуті в теоремах I – 3 відповідності $T$ можна відтворити за допомогою механізмів [1, 2].

Список літератури: I. А р т о б о л е в с к и й И.И. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. 2. А р т о б о л е в с к и й И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1975.

Стаття надійшла до редколегії 22.02.82

УДК 517.913

К.С.Костенко

## АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)}+p_1(x)y''+(p_2(x)+r(x))y'+p_3(x)y=0 \qquad /I/$$

доведена наступна теорема.

Т е о р е м а . Нехай у рівнянні /I/ $p_3(x)$ неперервна, а $r(x)$, $p_1(x)$ і $p_2(x)=\lambda z_1^{-3}(x)\neq 0$ неперервно диференційовані функції відповідно один, два і три рази на інтервалі $x_0\leq x<\infty$. Нехай також

$$A(x)=z_1^2(x)(\mu-5z_1''(x)z_1(x)+\frac{5}{2}z_1'^2(x)),\ B(x)=\lambda z_1^{-3}(x)+A'(x),$$

$$C(x)=(\nu-0{,}09\mu^2-\frac{3}{2}\lambda z_1'(x))z_1^{-4}(x)+0{,}3A''(x)+(0{,}3A(x))^2,$$

$\beta_0\neq 0$ – дійсний розв"язок системи рівнянь

$$20\beta^3+2\mu\beta-\lambda=0,\ 21\beta^4+3\mu\beta^2+\nu=0,$$

результант якої дорівнює нулеві, причому $6\beta_0^2+\mu=0$. Тоді за умов

$$\beta_0 z_1(x)>0,\ \lim_{\lambda\to\infty}\varphi(x,x_0)=\infty,\ \int_{x_0}^{\infty}b_1(x)dx<\infty,\ \lim_{x\to\infty}P_4(x)z_1^2(x)=0,$$

або

$$\beta_0 \zeta(x) < 0,\ \lim_{x\to\infty} \varphi(x,x_0) = \infty,\ \int_{x_0}^{\infty} b_2(x)\,dx < \infty,\ \lim_{x\to\infty} P_i(x)\zeta^2(x) = 0\ (i=1,2,3),$$

де

$$P_1(x) = \Big[(6\zeta''\zeta + 3\zeta'^2 - 8\beta_0\zeta' + 4\beta_0^2)(A(x) - p_1(x)) + 4\zeta(3\zeta' - 2\beta_0)\Big(\frac{A'(x) + r(x)}{2} -$$

$$- p_1'(x)\Big) + 4\zeta^2\big(C(x) + r'(x) - p_3(x) - p_1''(x)\big)\Big]W^{-1},$$

$$P_2(x) = \Big[(6\zeta''\zeta + 3\zeta'^2 + 24\beta_0\zeta' - 28\beta_0^2)(A(x) - p_1(x)) + 12\zeta(\zeta' + 2\beta_0)\Big(\frac{A'(x) + r(x)}{2} -$$

$$- p_1'(x)\Big) + 4\zeta^2\big(C(x) + r'(x) - p_3(x) - p_1''(x)\big)\Big]W^{-1},$$

$$P_3(x) = P_4(x) = \Big[(3\zeta''\zeta + \frac{3}{2}\zeta'^2 + 12\beta_0\zeta' + 18\beta_0^2)(A(x) - p_1(x)) + 6\zeta(\zeta' + 2\beta_0)\times$$

$$\times\Big(\frac{A'(x) + r(x)}{2} - p_1'(x)\Big) + 2\zeta^2\big(C(x) + r'(x) - p_3(x) - p_1''(x)\big)\Big]W^{-1},$$

$$b_1(x) = 4|\zeta(x)| \max_x \big[|P_1(x)\varphi^2(x,x_0)|, |P_2(x)\varphi(x,x_0)|, |P_3(x)|\big],$$

$$b_2(x) = 4|\zeta(x)| \max_x \big[|P_1(x)|, |P_2(x)|, |P_3(x)|\big],$$

$$\varphi(x,x_0) = \int_{x_0}^{x} \zeta^{-1}(t)\,dt, \quad W = 128\beta_0^3,$$

рівняння /I/ має фундаментальну систему розв"язків, асимптотичне зображення яких за $x \to \infty$ дають формули

$$y_1(x,x_0) = \zeta^{\frac{3}{2}}(x)\exp\big[\beta_0\varphi(x,x_0)\big]\varphi^2(x,x_0)(1+o(1)),\ x\to\infty, \quad /2/$$

$$y_2(x,x_0) = \zeta^{\frac{3}{2}}(x)\exp\big[\beta_0\varphi(x,x_0)\big]\varphi(x,x_0)(1+o(1)),\ x\to\infty, \quad /3/$$

$$y_3(x,x_0) = \zeta^{\frac{3}{2}}(x)\exp\big[\beta_0\varphi(x,x_0)\big](1+o(1)),\ x\to\infty, \quad /4/$$

$$y_4(x,x_0) = \zeta^{\frac{3}{2}}(x)\exp\big[-3\beta_0\varphi(x,x_0)\big](1+o(1)),\ x\to\infty. \quad /5/$$

За цих же умов головні частини асимптотичних формул для перших похідних фундаментальної системи розв"язків одержуємо формальним диференціюванням головних частин формул /2/ – /5/.

Те ж саме вірне для похідних другого порядку цих розв"язків, якщо

$$\lim_{x\to\infty}(A(x)-p_1(x))\,\xi_1^2(x)=0$$

і третього порядку, коли

$$\lim_{x\to\infty}(p_1'(x)-r(x))\,\xi_1^3(x)=0$$

додатково.

Список літератури: 1. Костенко Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. – Диф. уравн., 1974, т.10, № 10. 2. Павлюк І.А. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. – Вид-во Київ. ун-ту, 1970.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.82

УДК 517.956.2

В.Г.Костенко, М.Д.Коркуна

## РОЗВ"ЯЗУВАННЯ ПЛОСКОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Плоска крайова задача для системи рівнянь термопружності у випадку, коли на границі $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ двозв"язної області $H \setminus D$ задано лінійний диференціальний оператор першого порядку зі змінними коефіцієнтами, зведена [3, 4] за допомогою методики Я.Б.Лопатинського [5, 6] до регулярної системи інтегральних рівнянь. При цьому фундаментальна матриця відповідної однорідної системи рівнянь [3] і ядра інтегралів типу потенціалу [4] визначені в явній формі, що дало змогу справдати використання як внутрішньої, так і зовнішньої формули "стрибка" інтегралу типу потенціалу в точках границі області та знайти наближений розв"язок задачі на ЕОМ. Одержана [4] система регулярних інтегральних рівнянь у детальному записі набирає вигляду

$$\begin{cases} \mu_1(y) \pm \left\{ \int_{\mathcal{T}} \mathcal{Y}_1^{(1,1)}(y-z,\nu(z),z)\mu_1(z)d_z\mathcal{T} + \int_{\mathcal{T}} \mathcal{Y}_1^{(1,2)}(y-z,\nu(z),z)\mu_2(z)d_z\mathcal{T} \right\} = \psi_1(y), \\ \mu_2(y) \pm \left\{ \int_{\mathcal{T}} \mathcal{Y}_1^{(2,1)}(y-z,\nu(z),z)\mu_1(z)d_z\mathcal{T} + \int_{\mathcal{T}} \mathcal{Y}_1^{(2,2)}(y-z,\nu(z),z)\mu_2(z)d_z\mathcal{T} \right\} = \psi_2(y), \end{cases} \quad /I/$$

де $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$ – густини потенціалів; $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ – відомі вільні члени [3]. У системі рівнянь /I/ перед інтегралом треба брати знак "плюс", коли $y \in \mathcal{T}_2$, і знак "мінус", якщо $y \in \mathcal{T}_1$.

Оскільки вихідна задача розглядається у двозв"язній області, то для забезпечення єдиності розв"язку вона повинна бути доповнена трьома умовами однозначності [2]. Умова однозначності для кута повороту

$$\int_{\mathcal{T}_1} d\left(\frac{dU_1}{dx_2}\right) = \int_{\mathcal{T}_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)dx_2 \right\} = 0 \quad /2/$$

і умови однозначності для переміщень $U_1$, $U_2$

$$\int_{\mathcal{T}_1} dU_1 = \int_{\mathcal{T}_1} \left\{ \frac{\partial U_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2}dx_2 \right\} = 0, \quad /3/$$

$$\int_{\mathcal{T}_1} dU_2 = \int_{\mathcal{T}_1} \left\{ \frac{\partial U_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}dx_2 \right\} = 0, \quad /4/$$

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \tilde{U} + v; \quad \tilde{U} = \iint_{H \setminus D} \varphi(x_1, x_2; y_1, y_2)\mathcal{F}(y_1, y_2)dy_1dy_2;$$

$$v = \int_{\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2} \mathcal{Y}_0(x-z,\nu(z),z)\mu(z)d_z\mathcal{T}; \quad \varphi(x_1, x_2; y_1, y_2)$$

– фундаментальна матриця [3] ; $\mathcal{Y}_0(x-z, \nu(z), z)$ – ядро інтеграду типу потенціалу [4]. Таким чином, отримуємо систему інтегральних рівнянь /I/ з додатковими умовами на густину /2/ – /4/.

Для розв"язування системи інтегральних рівнянь використаємо метод Боголюбова-Крилова [I]. Для цього в системі інтегральних рівнянь /I/ і в умовах /2/–/4/ криволінійні інтеграли зведемо до означених введенням заміни

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = R_c \sin\omega \\ x_2 = R_c \cos\omega \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} y_1 = r\sin\varphi \\ y_2 = r\cos\varphi \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} z_1 = \rho\sin\theta \\ z_2 = \rho\cos\theta \end{array}\right\},$$

а криву $\mathcal{T}_1 (T(x,y) = 343^\circ C)$ апроксимуємо тригонометричним поліномом

$$r = r(\varphi) = R_0 + \varepsilon R_1 \sin\varphi + \varepsilon^2 R_2 \sin^2\varphi + \varepsilon^3 R_3 \sin^3\varphi,$$

де $R_0$ = I,9I2; $R_1$ = –3,747; $R_2$ = I9,658; $R_3$ = –5I,787; $\varepsilon$ = 0,2803 /за $\mathcal{T}_2$ взято коло радіуса $A$ /.

Припустивши, що густини $\mu_i(\theta)$ можна наближено замінити постійними, і вибравши точки на кривій $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$

$$\theta_i = \theta_0 + (i-1)\Delta\theta, \quad i = \overline{1,M}$$

$$\varphi_j = \varphi_0 + (j-1)\Delta\varphi, \quad j = \overline{1,M},$$

зводимо систему /I/ і умови /2/–/4/ до перевизначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв"язок останньої знаходимо методом найменших квадратів і тим самим одержуємо наближений розв"язок системи інтегральних рівнянь /I/.

Розподіл температурних напружень по осі $x_1$

| $x_1$, см | $\sigma_{x_1x_1}$ кг/мм$^2$ | $\sigma_{x_2x_2}$ кг/мм$^2$ |
|---|---|---|
| I,267 | –97,36 | –II,90 |
| I,927 | –2I,02 | 24,37 |
| 2,587 | I9,27 | 30,86 |
| 3,247 | I0,02 | 29,I9 |
| 9,I87 | 7,35 | 9,6 |

Оскільки в кінцевому результаті при розв"язуванні цієї задачі нас цікавитимуть напруження $\sigma_{x_1x_1}$, $\sigma_{x_2x_2}$, $\sigma_{x_1x_2}$, які з переміщеннями зв"язані співвідношеннями [3], то потрібно мати похідні $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ $(i,j=1,2)$, знаходження яких не становить труднощів, а також $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ $(i,j=1,2)$. Останні знаходимо зі співвідношень

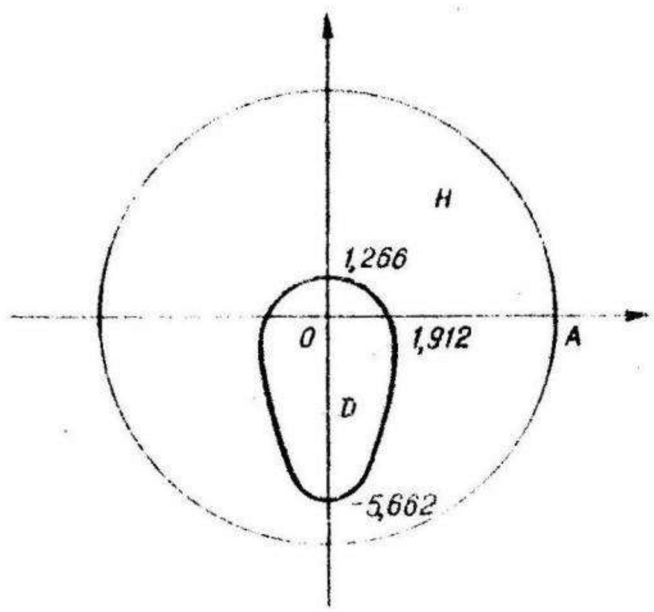
$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=\int_{\Gamma}\gamma^{(1,1)}_{0x_1}(x-z,\nu(z),z)\mu_1(z)d_z\Gamma+\int_{\Gamma}\gamma^{(1,2)}_{0x_1}(x-z,\nu(z),z)\mu_2(z)d_z\Gamma,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1}=\int_{\Gamma}\gamma^{(2,1)}_{0x_1}(x-z,\nu(z),z)\mu_1(z)d_z\Gamma+\int_{\Gamma}\gamma^{(2,2)}_{0x_1}(x-z,\nu(z),z)\mu_2(z)d_z\Gamma,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2}=\int_{\Gamma}\gamma^{(1,1)}_{0x_2}(x-z,\nu(z),z)\mu_1(z)d_z\Gamma+\int_{\Gamma}\gamma^{(1,2)}_{0x_2}(x-z,\nu(z),z)\mu_2(z)d_z\Gamma,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=\int_{\Gamma}\gamma^{(2,1)}_{0x_2}(x-z,\nu(z),z)\mu_1(z)d_z\Gamma+\int_{\Gamma}\gamma^{(2,2)}_{0}(x-z,\nu(z),z)\mu_2(z)d_z\Gamma,$$

де через $\gamma^{(i,j)}_{0x_k}(x-z,\nu(z),z),(i,j=1,2;\ k=1,2)$ позначено похідні ядер інтегралів типу потенціалу.



Деякі результати обчислень вихідної задачі наводимо в таблиці для області, що зображена на рисунку.

Список літератури: I. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. - М.; Л.: Физматгиз, 1962. 2. Коваленко А.Д. Термоупругость. - К.: Вища школа, 1975. 3. Костенко В.Г., Коркуна М.Д. Фундаментальна матриця розв"язків однієї лінійної еліптичної системи рівнянь в частинних похідних. - Вісн. Львів ун-ту, сер. мех.-мат., 1982, вип. 20. 4. Костенко В.Г., Коркуна М.Д. Зведення однієї крайової задачі до системи регулярних інтегральних рівнянь. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1982, вип. 20. 5. Лопатинский Я.Б. Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений. - Укр. мат. журн., 1951, т. 3, № 1. 6. Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр. мат. журн., 1953, т.5, № 2.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.82

УДК 517.946

В.М.Цимбал

# ЗМІШАНА СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Інтегродиференціальні гіперболічні рівняння використовуються у багатьох прикладних галузях науки [9, 10]. Якщо у вивченні сингулярно збурених гіперболічних рівнянь в останній час досягнуто певного прогресу [2, 11], то сингулярно збурені інтегродиференціальні гіперболічні рівняння практично не досліджувалися.

Вивчимо змішану задачу для сингулярно збуреного гіперболічного інтегродиференціального рівняння другого порядку.

В області $D=\{(x,t): 0\leq x\leq l, 0\leq t\leq T\}$ розглянемо задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} +$$
$$+ d(x,t)u + \int_0^t K(x,s)\, u(x,s)ds = f(x,t), \qquad /I/$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ u(x,0) = 0,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Вважаємо, що виконані наступні умови:

I/ функції, що входять в /I/, достатньо гладкі в $D$ ;

2/ $a(x,t) > 0$ в $D$;

3/ $\dfrac{\partial^{i+j} f(0,0)}{\partial t^i\, \partial x^j} = \dfrac{\partial^{i+j} f(l,0)}{\partial t^i\, \partial x^j} = 0\ (i+j = 0,\dots,2N;\ i = 0,\dots,N-1),$

де $N$ – деяке натуральне число /точність побудованого нижче асимптотичного розкладу/.

Очевидно, беручи до уваги припущення 2/, вихідне рівняння /I/ гіперболічне, а вироджене рівняння /I/, якщо в ньому формально прийняти $\varepsilon = 0$, параболічне [8]. При кожному фіксованому $\varepsilon > 0$ задача /I/, /2/ однозначно розв"язна. Справді, це безпосередньо випливає з того, що задачу /I/, /2/ можна звести до змішаної задачі для інтегродиференціальної гіперболічної системи першого порядку [7], а далі застосувати метод характеристик [I].

Асимптотичний розклад розв"язку задачі /I/, /2/ будуємо методом примежового шару [3–5] у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \bar{u}_i(x,t) + \varepsilon \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x,\tau) + \varepsilon^{N+1} R_N(x,t,\varepsilon), \qquad /3/$$

де $\tau = t/\varepsilon$, а всі функції з /3/ визначені нижче. Підставимо $\sum\limits_{i=0}^{N} \varepsilon^i \bar{u}_i(x,t) + \varepsilon \sum\limits_{i=0}^{N} \varepsilon^i \Pi_i(x,\tau)$ у /I/. При цьому перетворюємо вирази виду $\int_0^t K(x,s)\, \Pi_i(x,\sigma)ds$ $(\sigma = \frac{s}{\varepsilon})$ аналогічно тому, як це зроблено у працях [3, 5] при дослідженні звичайних інтегродиференціальних систем з оператором типу Вольтерра, наступним чином:

$$\int_0^t K(x,s)\Pi_i(x,\sigma)ds = \varepsilon\int_0^\infty K(x,\varepsilon\sigma)\Pi_i(x,\sigma)d\sigma - \varepsilon\int_\tau^\infty K(x,\varepsilon\sigma)\Pi_i(x,\sigma)\,d\sigma,$$

а далі розвиваємо $K(x, \varepsilon \sigma)$ за степенями $\varepsilon$. Невласні інтеграли, що з"являються при цьому, збіжні з огляду на те, що $\Pi_i(x, \sigma)$ – функції типу примежового шару [4] /це покажемо нижче/. Зрівнюючи тепер коефіцієнти при однакових степенях $\varepsilon$ окремо, які залежать від $t$, окремо, що залежать від $\tau$, одержуємо рівняння для визначення $\bar{U}_i(x,t)$, $\Pi_i(x,\tau)$ $(i = 0, \dots, N)$.

Запишемо

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x^2} + C(x,t)\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x} + d(x,t)\bar{U}_i + \int_0^t K(x,s)\bar{U}_i(x,s)\,ds = f_i(x,t), \qquad /4/$$

де $f_0(x,t) = f(x,t)$; $f_1(x,t) = -\left(\frac{\partial^2 \bar{U}_0}{\partial t^2} - a(x,t)\frac{\partial^2 \bar{U}_0}{\partial x^2}\right)$; $f_i(x,t)$ $(i>1)$ явно виражаються через $\bar{U}_j(x,t)$ $/j = 0, \dots, i-1/$ та їх похідні, а також вирази виду $\int_0^\infty \sigma^k \Pi_j(x,\sigma)\,d\sigma$ $(j = 0, \dots, i-2)$, $k \geq 0$ цілі.

Далі

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} = \psi_i(x,\tau), \qquad /5/$$

де $\psi_0(x,\tau) \equiv 0$, $\psi_i(x,\tau)$ явно виражаються через $\Pi_j(x,\tau)$ $(j = 0, \dots, i-1)$ та їх похідні, а також вирази виду $\int_\tau^\infty \sigma^k \Pi_j(x,\sigma)\,d\sigma$ $(j = 0, \dots, i-2)$, $k \geq 0$ цілі.

Використовуючи /2/, дістаємо умови, при яких слід розв"язувати /4/, /5/

$$\bar{U}_i(x,0) = -\Pi_{i-1}(x,0), \ \bar{U}_i(0,t) = 0, \ \bar{U}_i(\ell,t) = 0 \ (i = 0, \dots, N), \qquad /6/$$

де $\Pi_{-1}(x,0) \equiv 0$;

$$\frac{\partial \Pi_i(x,0)}{\partial \tau} = -\frac{\partial \bar{U}_i(x,0)}{\partial t}, \ \Pi_i(x,\tau) \to 0 \quad \text{при } \tau \to \infty \ (i = 0, \dots, N). \ /7/$$

При цьому останні умови в /7/ необхідні для того, щоб функції $\Pi_i(x,\tau)$ $(i = 0, \dots, N)$ були функціями типу примежового шару. Більш того у /6/ враховано, що $\Pi_i(0,\tau) = \Pi_i(\ell,\tau) = 0$ $(i = 0, \dots, N)$. Це достатньо елементарно безпосередньо перевіряється з врахуванням припущення 3).

Отже, $\bar{U}_i(x,t)\,(i=0,\dots,N)$ визначаються як розв"язки змішаних задач для інтегродиференціальних параболічних рівнянь /4/, /6/. Функції $\Pi_i(x,\tau)\,(i=0,\dots,N)$ є розв"язками задач /5/, /7/ для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Легко перевірити, що $\Pi_0(x,\tau)=\frac{\partial U_0(x,0)}{\partial t}e^{-\tau}$, тобто $\Pi_0(x,\tau)$ – функція типу примежового шару. Аналогічно [4] методом математичної індукції з врахуванням структури $\psi_i(x,\tau)$ легко показати, що і всі $\Pi_i(x,\tau)\,(i=0,\dots,N)$ – це функції типу примежового шару. Задачі /4/, /6/ однозначно розв"язні [6]. Усі функції $\bar{U}_i(x,t)$ $(i=0,\dots,N)$, $\Pi_i(x,\tau)\,(i=0,\dots,N)$ можна знайти, якщо їх визначати у послідовності $\bar{U}_0(x,t)$, $\Pi_0(x,\tau)$, $\bar{U}_1(x,t)$ і т.д.

Використовуючи зображення /3/, рівняння /1/, початкові та граничні умови /2/, а також співвідношення /4/ – /7/, стандартним методом [4] одержимо задачу для визначення $R_N(x,t,\varepsilon)$

$$L_\varepsilon R_N = F(x,t,\varepsilon),\ R_N(l,t,\varepsilon)=\frac{\partial R_N(x,0,\varepsilon)}{\partial t}=0,\ R_N(x,0,\varepsilon)=-\Pi_N(x,0), \qquad /8/$$

де $F(x,t,\varepsilon)$ – відома функція і, що суттєво, обмежена в $D$.

Методом інтегралів енергії [7] одержана оцінка

$$\| R_N(x,t,\varepsilon) \|_{L_2(D)} \le C, \qquad /9/$$

де стала $C$ не залежить від $\varepsilon$. Оцінка /9/ доводить асимптотичну коректність розвинення /3/.

Результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

Т е о р е м а . При виконанні умов 1/ – 3/ розв"язок задачі /1/, /2/ допускає асимптотичне представлення /3/, де функції $\bar{U}_i(x,t)\,(i=0,\dots,N)$ – розв"язки задач /4/, /6/; функції типу примежового шару $\Pi_i(x,\tau)\quad(i=0,\dots,N)$ – розв"язки задач /5/, /7/.

З а у в а ж е н н я . Аналогічна задача для рівняння без вольтеррового доданку у багатовимірному випадку розглянута у праці [12].

Список літератури: І. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. - Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, т.20, вып.3. 2. Б у т у з о в В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений. - Мат. сб., 1977, т.104, № 3. 3. В а с и л ь е в а А.Б., Б у т у з о в В.Ф. Асимптотические разложения решения сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. 4. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Усп. мат. наук, 1957, т.12, № 5. 5. И м а н а л и е в М. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегродифференциальных систем. - Фрунзе: Илим, 1972. 6. К р и в о ш е и н Л.Е. Решение некоторых задач для интегродифференциальных уравнений. - В кн.: Исследования по интегродифференциальным уравнениям в Киргизии, 1965, вып.3. 7. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. 8. П е т р о в с к и й И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. - М.: Физматгиз, 1961. 9. Р о з о в с к и й М.И Об интегродифференциальных телеграфных уравнениях. - ДАН СССР, 1948, т.59, № 3. 10. Р о з о в с к и й М.И. Применение и.-д.у. к изучению деформирования реальных материалов. - Изв. АН СССР, сер. техн. 1948, № 5. 11. Т р е н о г и н В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника - Вишика. - Усп. мат. наук, 1970, т.25, № 4. 12. Ц и м б а л В.М. Асимптотичний розв"язок змішаної задачі для гіперболічного рівняння з параметром. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. 1981, вип. 18.

Стаття надійшла до редколегії 20.10.81

УДК 517.946

В.М.Цимбал

# ОЦІНКИ РОЗВ"ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

При дослідженні сингулярно збурених задач звичайно розрізняють два етапи: побудову формального асимптотичного розв"язку за допомогою якого-небудь асимптотичного методу та доведення коректності одержаної асимптотики чи асимптотичної збіжності одержаного ряду.

Друга частина, обгрунтування асимптотики, яка, звичайно, відсутня у працях прикладного характеру, необхідна, оскільки існують приклади, які показують, що формальний асимптотичний розклад не завжди асимптотичний [5]. Доведення асимптотичної коректності одержаного наближення до розв"язку задачі зводиться до знаходження відповідної оцінки різниці між точним і наближеним розв"язком задачі, або, що те ж саме, оцінки залишкового члена ряду. Методи одержання відповідних оцінок у випадку задач для еліптичних і параболічних рівнянь розглянуті у праці [5]. Аналогічні методи для гіперболічних сингулярно збурених задач мають свою специфіку, вони менш розвинені.

Обгрунтуємо асимптотики для задач, розглянутих у працях [3,4], де відповідна оцінка дається без доведення. Задача зводиться до знаходження оцінки розв"язку задачі

$$\varepsilon^n\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)+\varepsilon\left(a(x,t)\frac{\partial U}{\partial t}+b(x,t)\frac{\partial U}{\partial x}\right)+c(x,t)U=f(x,t), \quad (n\geq 2) \qquad /1/$$

$$U(x,0,\varepsilon)=0, \quad \frac{\partial U(x,0,\varepsilon)}{\partial t}=0 \qquad /2/$$

у будь-якому характеристичному трикутнику $K=D=\{(x,t): x_0<x_0+t<x<x_1-t<x_1\}$, $\varepsilon>0$ – малий параметр. Тут $f(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})$, де $N$ – натуральне число, початкові умови /2/ для залишкового члена, взагалі кажучи, не нульові, однак це не суттєво. Відзначимо також, що у працях [3,4] розглянута задача для дещо більш загального рівняння /коефіцієнт при $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ не дорівнює – I, однак одержання оцінки у цьому випадку повністю аналогічне/. Для простоти викладу розглянемо нескладний випадок.

Припустимо, що виконуються умови:

1/ $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ неперервно диференційовані в $D$. Справді, для побудови асимптотики потрібна більш висока гладкість функцій, що входять в /1/;

2/ $a(x,t)>0$, $c(x,t)>0$, $|b(x,t)|<a(x,t)$ в $D$.

У пункті I/ оцінка одержана методом інтегралів енергії [2], у 2/ використано аналог принципу максимуму разом з методом порівняння.

I. Виходимо зі співвідношення

$$\varepsilon^n\Big\{\frac{\partial}{\partial t}\Big[a\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2+2b\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x}+a\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]+\frac{\partial}{\partial x}\Big[-b\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2-$$

$$-2a\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x}-b\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]\Big\}+\varepsilon^n\Big[\Big(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial t}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2+$$

$$+2\Big(\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial t}\Big)\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x}+\Big(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial t}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]+ \qquad /3/$$

$$+2\varepsilon\Big(a\,\frac{\partial u}{\partial t}+b\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\frac{\partial}{\partial t}(acu^2)+\frac{\partial}{\partial x}(bcu^2)-$$

$$-\Big[\frac{\partial(ac)}{\partial t}+\frac{\partial(bc)}{\partial x}\Big]u^2=2f\Big(a\,\frac{\partial u}{\partial t}+b\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big),$$

яке одержується у результаті домноження /I/ на $2\Big(a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}\Big)$ і зведення до дивергентного виду. Зауважимо, що тут і далі для скорочення опускаємо аргументи функцій там, де це не викличе непорозуміння. Перетнемо $K$ прямою $t=\tau$ /$\tau$ - довільне/ і позначимо через $K_\tau$ трапецію, що утворюється у результаті цього перетину. Бічні сторони цієї трапеції /відрізки характеристик/ позначимо через $\Gamma_1'$ і $\Gamma_2'$, основу $t=0$, $x_0\le x\le x_1$ через $\Gamma$. Інтегруючи /3/ по $K_\tau$, використовуючи формулу Остроградського і приймаючи до уваги /2/, одержуємо

$$\varepsilon^n\int\limits_{t=\tau}\Big[a\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2+2b\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x}+a\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]dx+\int\limits_{t=\tau}acu^2dx+$$

$$+\varepsilon^n\int\limits_{\Gamma_1'+\Gamma_2'}\Big\{\Big[a\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2+2b\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial x}+a\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2\Big]\cos n\hat{}t+$$

$$+\left[-b\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-2a\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}-b\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\cos n\hat{x}\Big\}ds+$$

$$+\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} c(a\cos n\hat{t}+b\cos n\hat{x})u^2 ds+2\varepsilon\int_{K_\tau}\left(a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dK_\tau=$$

$$=2\int_{K_\tau} f\left(a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}\right)dK_\tau+\varepsilon^n\int_{K_\tau}\left[\left(\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial b}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial b}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dK_\tau+ \qquad /4/$$

$$+\int_{K_\tau}\left(\frac{\partial(ac)}{\partial t}+\frac{\partial(bc)}{\partial x}\right)u^2 dK_\tau .$$

Враховуючи, що $\Gamma_1$ і $\Gamma_2$ – характеристики, а також припущення 2/ елементарно перевіряється, третій і четвертий інтеграли зліва у рівності /4/ невід"ємні. Крім того, з уваги на припущення 2/ квадратична форма $aj_{\partial_1}^2+2bj_{\partial_1}j_{\partial_2}+aj_{\partial_2}^2$ додатно визначена. Отже, в $K$ має місце

$$a(x,t)j_{\partial_1}^2+2b(x,t)j_{\partial_1}j_{\partial_2}+a(x,t)j_{\partial_2}^2\geqslant\alpha\left[j_{\partial_1}^2+j_{\partial_2}^2\right]\quad(\alpha>0). \qquad /5/$$

Застосувавши до першого праворуч у рівності /4/ інтегралу нерівність Коші з параметром, записуємо

$$2\int_{K_\tau} f\left(a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}\right)dK_\tau\leqslant\frac{1}{2\varepsilon}\int_{K_\tau} f^2 dK_\tau+2\varepsilon\int_{K_\tau}\left(a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dK_\tau . \qquad /6/$$

Оцінюємо в /4/ праворуч за модулем і враховуючи /6/, а також опускаючи третій і четвертий зліва інтеграли, маємо

$$m\int_{t=\tau}\left\{\varepsilon^n\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]+u^2\right\}dx\leqslant P+M\int_{K_\tau}\left\{\varepsilon^n\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]+u^2\right\}dK_\tau, \qquad /7/$$

де $m = \min\{\alpha, \min\limits_{(x,t)\in K}(a(x,t)c(x,t))\}$; $\rho = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{K_\tau} f^2 dK_\tau$ ;

$\rho = O(\varepsilon^{2N+1})$; $M$ - константа, що залежить від максимумів модулів коефіцієнтів у $K$ . Оцінюючи $\rho$ і застосовуючи до /7/ нерівність Гронуолла-Беллмана та інтегруючи по $\tau$ , одержуємо

$$\iint\limits_K \left\{\varepsilon^n\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] + u^2\right\} dK \leqslant C\varepsilon^{2N+1},$$

де $C^K$ - константа, що не залежить від $\varepsilon$ . Звідси випливає потрібна оцінка в інтегральній метриці

$$\|u\|_{L_2(K)} = O(\varepsilon^{N+1/2}). \qquad /9/$$

Зазначимо, що метод інтегралів енергії для обгрунтування асимптотики розв"язку задачі Коші для сингулярно збуреного гіперболічного рівняння / $\varepsilon$ знаходять тільки при старших похідних/ застосовано у працях [I, 6].

2. Має місце таке твердження.

Т в е р д ж е н н я . Нехай $u(x,t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння /I/ в області $D$ , виконуються умови I/, 2/ і умови

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &\geqslant 4\varepsilon^{n-2}c + 2\varepsilon\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{\partial b}{\partial x}\right), \\ a^2 - b^2 &\geqslant 4\varepsilon^{n-2}c - 2\varepsilon\left(\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial x}\right). \end{aligned} \qquad /I0/$$

Припустимо, що $f(x,t,\varepsilon) \geqslant 0$ в $D$ і початкові умови задовольняють

$$u \geqslant 0, \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{на } \Gamma.$$

Тоді у всій області $D$ $u \geqslant 0$ і

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{b}{2\varepsilon^{n-1}}u\right| \leqslant \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a}{2\varepsilon^{n-1}}u.$$

Д о в е д е н н я . Це твердження аналогічне теоремі 2.I. праці [7] і доводиться подібним чином. Перейшовши до змінних $r=t+x,\ s=t-x$ і застосувавши теорему 3.I в праці [8], одержимо потрібне твердження. Таким чином, використовуючи його та повторюючи майже дослівно доведення теореми 2.3 з праці [7], дістаємо потрібну оцінку в $D$

$$|u(x,t,\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon^{N+1}, \qquad /II/$$

де константа $C$ не залежить від $\varepsilon$ . Як видно, оцінка /II/ сильніша, ніж /9/, однак вона виконується при виконанні додаткових умов /I0/. Умови /I0/ при $n=2$ досить обмежуючи, при $n>2$ вони, очевидно, виконуються завжди при достатньо малому $\varepsilon$ .

Список літератури: I. Д ж а в а д о в М.Г. Задача Коши для гиперболического уравнения с малым параметром при старших производных. - Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, I963, № 6. 2. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, I964. 3. Ц и м б а л В.М. Задача Коші для гіперболічного рівняння з малим параметром. - У кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. Київ, I978, 4. Ц и м б а л В.М. Задача Коші для сингулярно збуреного гіперболічного рівняння. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., I98I, вип. I8. 5. Eckhaus W. Formal approximations and singular perturbations.- SIAM Riview, 1977, 19, N4. 6. Jarger E.M. Singular perturbations of hyperbolic type.- Niew. Arch. Wisk., 1975, 23, N3. 7. Weinstein M.B., Smith D.R. Comparison techniques for certain overdamped hyperbolic partial differential equations.- Rocky Mount. J. Math., 1976, 6, N4. 8. Smith D.R. Sturm transformations and linear hyperbolic differential equations in two variables.- J. Math. Anal. Applic., 1976, 56.

Стаття надійшла до редколегії 24.II.8I

УДК 517.946

В.М.Кирилич

# НЕКЛАСИЧНА ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ ДЛЯ ДВОВИМІРНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

П о с т а н о в к а  з а д а ч і . Нехай $\ell_1$ і $\ell_2$ – дві гладкі криві в площині $xot$, задані при $t \geqslant 0$ відповідно рівняннями $x = a(t)$ і $x = b(t)$ $(a(0) = b(0) = 0, a(t) < b(t)$ для $t > 0$. Через $T$ позначимо криволінійний сектор у півплощині $t > 0$, обмежений кривими $\ell_1$ і $\ell_2$. У $T$ розглянемо гіперболічну систему першого порядку

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j + f_i(x,t), (i = 1,\dots,n), \qquad /1/$$

де $\lambda_i(x,t)$ – двічі, а $a_{ij}(x,t)$ і $f_i(x,t)$ – один раз неперервно диференційовані по $x$ і $t$ у $\overline{T}$.

Для системи /1/ задаються інтегральні обмеження

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{si}(\xi,t)u_i(\xi,t)d\xi = h_s(t), \ (s = 1,\dots,n) . \qquad /2/$$

Функції $\gamma_{si}(\xi,t)$ і $h_s(t)$ вважають неперервно диференційованими по своїх аргументах відповідно у $\overline{T}$ і на $[0,\infty[$.

Задачу з праці [2] можна розв"язати, взагалі кажучи, як деякий граничний варіант даної задачі.

Припускаємо, що для всіх $t \geqslant 0$ виконуються умови:

$$\lambda_i(x(t),t) - x'(t) > 0, \ i = 1,\dots,k . \qquad /3/$$

$$\lambda_i(x(t),t) - x'(t) < 0, \ i = k+1,\dots,n$$ при

$$x = a(t) \text{ і } x = b(t), \quad \det A_a^b(t) \neq 0 , \qquad /4/$$

де

$$A_a^b(t) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(a(t),t)\dots\gamma_{1k}(a(t),t)\,\gamma_{1,k+1}(b(t),t)\dots,\gamma_{1n}(b(t),t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{n1}(a(t),t)\dots\gamma_{nk}(a(t),t)\,\gamma_{n,k+1}(b(t),t)\dots\gamma_{nn}(b(t),t) \end{pmatrix}.$$

**І с н у в а н н я  і  є д и н і с т ь  р о з в"я з к у.** Введемо додаткові невідомі функції $v_i^a(t)=u_i(a(t),t),\ (i=1,\dots,k)$ і $v_i^b(t)=u_i(b(t),t),\ (i=k+1,\dots,n)$ і приймемо $F_i(x,t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_j+f_i(x,t)$. Тоді інтегруванням вздовж характеристик [1] задачу знаходження розв"язку системи /1/ зводимо до еквівалентної системи інтегральних рівнянь

$$u_i(x,t)=\omega_i(x,t)+\int_{t_i(x,t)}^{t}F_i(\varphi_i(\tau,x,t),\tau)\,d\tau,\quad (i=1,\dots,n), \qquad /6/$$

де $\varphi_i(\tau,x,t)$ – розв"язок задачі Коші $\xi'_\tau=\lambda_i(\xi,\tau),\ \xi(t)=x;$

$$t_i(x,t)=\begin{cases} t_i^a(x,t), & i=1,\dots,k,\\ t_i^b(x,t), & i=k+1,\dots,n,\end{cases}\qquad \omega_i(x,t)=\begin{cases} v_i^a(t_i^a(x,t)), & i=1,\dots,k,\\ v_i^b(t_i^b(x,t)), & i=k+1,\dots,n,\end{cases}$$

$t_i^a(x,t)$ – ордината точки перетину характеристики $\xi=\varphi_i(\tau,x,t)$ з кривою $\ell_1$ при $i=1,\dots,k;$ $t_i^b(x,t)$ – ордината точки перетину характеристики $\xi=\varphi_i(\tau,x,t)$ з кривою $\ell_2$ при $i=k+1,\dots,n.$

Таким чином, знаходження розв"язку задачі /1/ – /2/ зводиться до знаходження допоміжних функцій $v_i^a(t)$ і $v_i^b(t)$. Для цього поступаємо так.

Нехай $\rho_i^a(x,t)$ і $\rho_i^b(x,t)$ – обернені функції до функцій $x\to t_i^a(x,t)$ і $x\to t_i^b(x,t)$, а $\gamma_i(x,\tau,t)$ – обернені до $x\to\varphi_i(\tau,x,t)$. Існування та єдиність обернених функцій очевидна.

Приймемо

$$\rho_{si}^a(t,\tau)=\gamma_{si}(\xi,t)(\lambda_i(t_i^a(\xi,t),\xi,t),t_i^a(\xi,t))-a'(t_i^a(\xi,t)))\times$$
$$\times\exp\Big(\int_\tau^t\lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma,\xi,t),\sigma)\,d\sigma\Big)\qquad \text{при } \xi=\rho_i^a(\tau,t),$$

$$\rho^{b}_{si}(t,\tau) = \gamma_{si}(\xi,t)(\lambda_i(t^a_i(\xi,t),\xi,t),\ \dot{t}^a_i(\xi,t)) - a'(t^a_i(\xi,t))\times$$
$$\times \exp\left(\int_\tau^t \lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma,\xi,t),\sigma)\,d\sigma\right) \quad \text{при} \quad \xi = \rho^b_i(\tau,t),$$
$$Q_{si}(y,t,\tau) = \gamma_{si}(\xi,t)\exp\left(\int_\tau^t \lambda'_{ix}(\varphi_i(\sigma,\xi,t)\sigma)\,d\sigma\right) \quad \text{при} \quad \xi = z_i(y,\tau,t).$$

Легко перевірити, що $\rho^a_i(t,t) = a(t)$ і $\rho^b_i(t,t) = b(t)$.

Підставляючи /6/ у /2/ і здійснюючи очевидні перетворення, одержуємо систему інтегральних рівнянь Вольтерра першого роду для визначення допоміжних функцій $\vartheta^a_i$ і $\vartheta^b_i$

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{t^a_i(b(t),t)}^{t} P_{si}(t,\tau)\,\vartheta^a_i(\tau)\,d\tau - \sum_{i=k+1}^{n} \int_{t^b_i(a(t),t)}^{t} \rho^b_{si}(t,\tau)\,\vartheta^b_i(\tau)\,d\tau =$$
$$= h_s(t) - \sum_{i=1}^{k} \int_{t^a_i(b(t),t)}^{t} d\tau \int_{\varphi_i(\tau,\rho^a_i(\tau,t),t)}^{\varphi_i(\tau,b(t),t)} Q_{si}(y,t,\tau)\,F_i(y,\tau)\,d\tau -$$
$$- \sum_{i=k+1}^{n} \int_{t^b_i(a(t),t)}^{t} d\tau \int_{\varphi_i(\tau,a(t),t)}^{\varphi_i(\rho^b_i(\tau,t),t)} Q_{si}(y,t,\tau)\,F_i(y,\tau)\,d\tau. \qquad /7/$$

Диференціюючи /7/ по $t$ і враховуючи умову /4/, одержуємо

$$\vartheta(t) = M(t)\vartheta + \delta \int_{\varphi(t)}^{t} A(\tau)\,\vartheta(\tau)\,d\tau + G(t, u(y,\tau)), \qquad /8/$$

де $\vartheta(t) = (\vartheta^a_1(t),\ldots,\vartheta^{(a)}_k(t),\ \vartheta^b_{k+1}(t),\ldots,\vartheta^b_n(t))$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^a_i(b(t)t), & i=1,\ldots,k, \\ t^b_i(a(t)t), & i=k+1,\ldots,n; \end{cases} \qquad \delta = \begin{cases} 1, & i=1,\ldots,k, \\ -1, & i=k+1,\ldots,n; \end{cases}$$

$A(t)$ і $G(t,u)$ – очевидні з /7/. Оператор $M(t)$ має вигляд

$$M(t)\vartheta = \Lambda^b_a(t)^{-1}\,\Lambda^b_a(t)^{-1}\,\Lambda^a_b(t)\,\Lambda^a_b(t)\,R(t)\,\vartheta,$$

де

$$\Lambda^b_a(t) = \mathrm{diag}\{\lambda_1(a(t),t) - a'(t),\ldots,\lambda_k(a(t),t) - a'(t),$$
$$\lambda_{k+1}(b(t),t) - b'(t),\ldots,\lambda_n(b(t),t) - b'(t)\};$$

$$R(t)v = col\left(v_1^a(t_1^a(b(t),t)),\dots,v_k^a(t_k^a(b(t),t)), v_{k+1}^b(t_{k+1}^b(a(t),t)),\dots, v_n^b \times \right.$$
$$\left.\times (t_n^b(a(t),t))\right).$$

Оскільки $A_a^b(0) = A_b^a(0)$, $R(0) = I$, $|\Lambda_a^{b-1}(\theta)\Lambda_b^a(0)| < 1$, то для всіх $t \geq 0$

$$\| M(t) \| < 1. \qquad /9/$$

З /8/ з огляду на /9/ записуємо

$$v(t) = (E - M(t))^{-1}\left[\delta \int_{\varphi(t)}^{t} A(\tau)v(\tau)d\tau + G(t, u(y,\tau))\right]. \qquad /10/$$

При будь-якому заданому наборі функцій $u_1, \dots, u_n$ система інтегральних рівнянь /10/ має єдиний розв"язок.

Підставивши розв"язки системи /10/ в /6/, одержимо систему інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду для визначення розв"язку вихідної задачі, яка розв"язується методом послідовних наближень. Будь-який неперервно диференційований або неперервний розв"язок одержаної системи інтегральних рівнянь називатимемо класичним або узагальненим неперервним розв"язком задачі /1/ - /2/. Отже, доведена наступна теорема.

Т е о р е м а . Нехай: 1/ функції $\lambda_i(x,t)$, $\gamma_{ij}(x,t)$, $h_i(t)$ - неперервно диференційовані, а функції $a_{ij}(x,t)$ і $f_i(x,t)$ неперервні в $T$ ; 2/ виконуються умови /3/-/5/. Тоді задача /1/-/2/ має єдиний узагальнений неперервний у $T$ розв"язок.

Якщо крім того $\lambda_i(x,t)$ , $\gamma_{ij}(x,t)$ , $h_i(t)$ мають другі, а $a_{ij}(x,t)$ і $f_i(x,t)$ неперервні перші похідні, то задача /1/-/2/ має єдиний класичний розв"язок.

Автор висловлює вдячність З.О.Мельнику за допомогу під час написання цієї статті.

Список літератури: I. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. – Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, т.20, вып. 3. 2. М е л ь н и к З.О. Одна неклассическая граничная задача для гиперболической системы первого порядка с двумя независимыми переменными. – Диф. уравнения, 1981, т.17, № 6.

Стаття надійшла до редколегії 26.01.82

УДК 517.946

С.П.Лавренюк

## ІСНУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Нехай $D \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial D \subset C^2$. Розглянемо задачу

$$u_{tt} + b(x,t)u_t + \sum_{|\alpha| \le 2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x,t) D^\alpha u) = f(x,t), \qquad /1/$$

$$u\big|_\Gamma = 0, \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \qquad /2/ \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \qquad /3/$$

в області $Q = D \times \mathbb{R}_+$, де $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\mathbb{R}_+ = \{0 < t < +\infty\}$, $\Gamma = \{x \in \partial D,\ t \in \mathbb{R}_+\}$.

Позначимо через $Q_T = D \times (0,T)$, $T > 0$, $\Gamma_T = \bar{Q}_T \cap \Gamma$, $D_\tau = \{x \in D,\ t = \tau\}$. Нехай $\tilde{H}^{2,1}(Q_T)$ – замикання множини функцій

$$\left\{ v(x,t) \in C^{4,2}(\bar{Q}_T);\ v\big|_{\Gamma_T} = 0;\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\Big|_{\Gamma_T} = 0,\ i = 1, \dots, n;\ v\big|_{t=T} = 0 \right\}$$

у нормі простору $H^{2,1}(Q_T)$.

Функція $u(x,t) \in H^{2,1}(Q_T)$, яка задовольняє умови /2/, умову $u(x,0) = \varphi(x)$, а також тотожність

$$\int_{Q_T} \Big( \sum_{|\alpha| \le 2} a_\alpha D^\alpha u D^\alpha v + b u_t v - u_t v_t \Big) dx dt = \int_{Q_T} f v \, dx dt + \int_{D_0} \psi v \, dx, \qquad /4/$$

для довільної функції $v(x,t) \in \tilde{H}^{2,1}(Q_T)$ називається узагальненим розв"язком задачі /I/ – /3/ в $Q_T$.

Якщо функція $u(x,t)$ – узагальнений розв"язок задачі /I/–/3/ у $Q_T$ для довільного $T>0$, то назвемо її узагальненим розв"язком цієї задачі в області $Q$.

Т е о р е м а . Нехай виконуються умови:

I/ $a_\alpha, b \in C(\mathbb{R}_+; L^\infty(D)),\ f \in C(\mathbb{R}_+; L^2(D)),$
$\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2(D),\ \psi \in L^2(D);$

2/ $a_\alpha \geq \mu,\ \mu > 0,\ |\alpha| = 2;\ a_\alpha \geq 0,\ |\alpha| < 2;\ (x,t) \in Q;$

3/ $\left|\frac{\partial a_\alpha}{\partial t}, b\right| \leq \mu_1,\ (x,t) \in Q.$

Тоді існує узагальнений розв"язок задачі /I/ – /3/ в $Q$, причому функція

$$V(t) = \int_D \Big( \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x,t) |D^\alpha u|^2 + u_t^2 \Big) dx$$

неперервна при $t \in \mathbb{R}_+$.

Д о в е д е н н я . Розглянемо в $\overset{\circ}{H}{}^2(D)$ повну лінійно незалежну систему функцій $\{v_m(x)\},\ v_m \in C^4(\bar{D})$. Вважаємо, що система $\{v_m(x)\}$ ортонормована в $H^2(D)$ і позначимо через

$$\varphi^m(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_i v_i(x), \quad \psi^m(x) = \sum_{i=1}^m \psi_i v_i(x).$$

Тут

$$\|\varphi^m(x) - \varphi(x)\|_{H^2(D)} \to 0,\ \|\psi^m(x) - \psi(x)\|_{L^2(D)} \to 0,$$

при $m \to \infty$. Шукаємо функцію

$$u_m(x,t) = \sum_{i=1}^m c_i(t) v_i(x)$$

як розв"язок задачі

$$\int_D \Big( u_{mtt} v_r + \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha D^\alpha u_m D^\alpha v_r + b u_{mt} v_r \Big) dx = \int_D f v_r \, dx, \qquad /5/$$

$$c_r(0) = \varphi_r,\ c_r'(0) = \psi_r,\ r = 1, \ldots, m. \qquad /6/$$

Легко показати, що задача /5/, /6/ має єдиний розв"язок

$$C_s(t)\in C^2[0,T],\ s=1,\dots,m.$$

Аналогічно як і в праці [I, с.20I], можна одержати оцінку

$$\int\limits_{D_t}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}a_\alpha |D^\alpha u_m|^2+u_{mt}^2\Big)dx\le$$

$$\le C_1\big(\|\varphi\|^2_{H^2(D)}+\|\psi\|^2_{L^2(D)}+\|f\|^2_{L^2(Q_\tau)}\big). \qquad /7/$$

Коли проінтегрувати нерівність /7/ по $t$ від $0$ до $T$, то одержимо

$$\|u_m\|_{\tilde H^{2,1}(Q_T)}\le C_2\big(\|\varphi\|_{H^2(D)}+\|\psi\|_{L^2(D)}+\|f\|_{L^2(Q_T)}\big). \qquad /8/$$

Сталі $C_1, C_2$ залежать від $T,\mu,\mu_1,n$. Тут у $\tilde H^{2,1}(Q_T)$ введена еквівалентна норма за формулою

$$\|u\|^2_{\tilde H^{2,1}(Q_T)}=\int\limits_{Q_T}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}a_\alpha |D^\alpha u|^2+u_t^2\Big)dx\,dt.$$

Отже, /8/ перепишемо як

$$\|u_m\|_{\tilde H^{2,1}(Q_T)}\le C_3,$$

а це означає, що $\{u_m\}$ слабокомпактна і з неї можна виділити підпослідовність $\{u_{m_k}\}$, яка слабо збігається до деякої функції $u(x,t)$ у просторі $\tilde H^{2,1}(Q_T)$. Неважко переконатися, що $u(x,t)$ – узагальнений розв"язок задачі /I/ – /3/ у $Q_T$.

Розглянемо тепер послідовність

$$g_{m_k}=\int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|\le 2}|D^\alpha u_{m_k}|^2dx\,dt=\int\limits_0^T\sum_{i=1}^{m_k}c_i^2(t)\,dt=\int\limits_0^T\hat V_{m_k}(t)\,dt.$$

Вона монотонно зростає і обмежена, отже, має границю $\lim\limits_{k\to\infty}g_{m_k}=g$. Крім цього, послідовність $\{\hat V_{m_k}\}$ також монотонно зростає і обмежена. Тому

$$\lim_{k\to\infty}\hat V_{m_k}(t)=A_0(t),\quad t\in[0,T]$$

і за теоремою Леві [2, с.50] одержимо, що

$$g=\int\limits_0^T A_0(t)\,dt,$$

або
$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \hat V_{m_k}(t)dt = \int_0^T A_0(t)dt.$$

Далі переконуємось в тому, що $A_0(t) = \hat V(t)$, де
$$\hat V(t) = \int_{D_t}\sum_{|\alpha|\le 2} |D^\alpha u|^2 dx,$$
а також, що $\{\hat V_{m_k}(t)\}$ рівномірно на $[0,T]$ збігається до $\hat V(t)$ при $k\to\infty$. Отже, $\hat V(t)$ – неперервна функція на $[0,T]$. Виходячи з цього, можна показати, що послідовність $\{\tilde V_{m_k}(t)\}$ рівномірно збігається на $[0,T]$ при $k\to\infty$ до функції $\tilde V(t)$. Тут
$$\tilde V_{m_k}(t) = \int_{D_t}\sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha |D^\alpha u_{m_k}|^2 dx,$$
$$\tilde V(t) = \int_{D_t}\sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha |D^\alpha u|^2 dx.$$
Крім цього, неважко довести, що
$$\lim_{k\to\infty}\int_{Q_T} u^2_{m_k t}\, dxdt = \int_{Q_T} u_t^2\, dxdt.$$
Розглянемо тепер послідовність $\{V_{m_k}(t)\}$, де
$$V_{m_k}(t) = \int_{D_t}\Big(\sum_{|\alpha|\le 2} a_\alpha |D^\alpha u_{m_k}|^2 + u^2_{m_k t}\Big)dx.$$
Виходячи з доведеного вище, можемо записати
$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T V_{m_k}(t)dt = \int_0^T V(t)dt. \qquad /9/$$
Користуючись рівностями /5/, легко одержати оцінку
$$\left|\frac{dV_{m_k}}{dt}\right| \le C_4,\quad k=1,2,\dots$$
Крім цього, $V_{m_k}(t) \le C_4$, $k=1,2,\dots$ Тому $\{V_{m_k}(t)\}$ компактна в $C[0,T]$. Припустимо, що сама $\{V_{n_k}(t)\}$ рівномірно збігається на $[0,T]$ при $k\to\infty$ до деякої неперервної функції $B(t)$. Тоді
$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T V_{m_k}(t)dt = \int_0^T B(t)dt. \qquad /10/$$
З рівностей /9/ і /10/ випливає, що $B(t) = V(t)$. Отже, $V(t)$ – неперервна функція на $[0,T]$ і теорема доведена.

Зазначимо, що задачі типу /1/–/3/ розглядалися також у працях [3, 4].

Список літератури: 1. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Краевые задачи математической физики. - М.: Наука, 1973. 2. М и х а й л о в В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1976. 3. Х у д а в е р д и е в К.И., Т а х и р о в Б.О. Исследование сильно обобщенного решения многомерной смешанной задачи с общими краевыми условиями для гиперболических уравнений с нелинейной операторной правой частью. - Изв. АН АзССР, сер. физ.-мат. и мат. наук, 1980, № 2. 4. Philip Brenner, Wolf von Walf. Global Classical Solutions of Nonlinear Wave Equations. - Mathematische Zeitschrift, 1981, 176, N1.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.82

УДК 517.946

Л.Я. Івахненко, С.П. Лавренюк

ІСНУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ"ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ

У циліндрі $Q = D \times J \subset R^{n+1}$, де $D = \{x \in R^n,\ 0 < x_i < 1\}$; $J = \{t \in R,\ t > 0\}$; а $S = \{x \in \partial D,\ t \in J\}$ - бокова поверхня циліндра, розглянемо задачу

$$\Delta^2 u + a\Delta u + u_{tt} + cu = f(x, t, u, \dots, u_{x_i}, \dots, u_{x_i x_j}, \dots, u_t), \quad /1/$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \ (2_1) \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \ (2_2)$$

$$u\big|_S = 0, \ (3_1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_S = 0 \ (3_2)$$

$a$, $c$ - деякі сталі.

Розв"язок задачі шукаємо у класі функцій

$$u \in B_1 = C^1(J, L_2(D)) \cap C(J, H^2(D)).$$

Розглянемо обмежений циліндр $Q_T = \{x \in D,\ 0 < t < T\}$ і позначимо через $D_\tau$ його перетин площиною $t = \tau$.

Нехай $u(x,t) \in C^{4,2}(Q) \cap C^{2,1}(Q \cup S \cup D_0)$ - класичний розв"язок задачі. Вважаємо, що права частина рівняння $f \in L_2(Q_T)$

для довільної функції $u \in B_1$ і довільного $T>0$. Детальніше ці умови сформулюємо пізніше. Тоді легко показати, що $u(x,t)$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\iint\limits_{Q_T}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}-a\nabla u\nabla v+cuv\Big]dxdt=\iint\limits_{Q_T} fv\,dxdt+\int\limits_{D_0}\psi v\,dx \qquad /4/$$

для довільних $v(x,t)\in H^{2,1}(Q_T)$, що задовольняють умови:

$$v\Big|_S=0,\quad v\Big|_{D_T}=0. \qquad /5/$$

Функція $u(x,t)\in H^{2,1}(Q_T)$, яка відповідає початковій умові /2/, граничну умову /3/ і тотожність /4/ для всіх $v(x,t)\in H^{2,1}(Q_T)$, що задовольняють умови /5/, називається узагальненим розв"язком задачі /I/ – /3/ в $Q_T$.

Отже, класичний у $Q$ розв"язок задачі – це узагальнений розв"язок цієї задачі в $Q_T$ для довільного $T>0$.

Узагальненим розв"язком в $Q$ задачі /I/ – /3/ називатимемо функцію $u(x,t)$, яка є узагальненим розв"язком цієї задачі в $Q_T$ для довільного $T>0$.

Можна показати, що узагальнений розв"язок задачі /I/ – /3/ класу $C^{4,2}(Q)\cap C^{2,1}(Q\cup S\cup D_0)$ є її класичним розв"язком.

Розглянувши задачу $\Delta^2 v+a\Delta v+cv=-\lambda v$,

$$v\Big|_S=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2}\Big|_S=0,$$

аналогічно як у праці [I], можна показати, що існує ортонормована в $L_2(D)$ система $v_1, v_2, \dots$, яка складається з узагальнених власних функцій задачі, що відповідають власним значенням $\lambda_1,\lambda_2,\dots$ У $\tilde H^2(D_t)=\{u\in H^2(D_t),\ u\big|_S=0\}$ вводимо еквівалентний при $a<0$ і $c>0$ скалярний добуток

$$(u,v)=\int\limits_{D_t}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}-a\nabla u\nabla v+cuv\Big)dx$$

і доводимо ортонормованість в $\tilde H^2(D_t)$ системи власних функцій $v_1/\sqrt{-\lambda_1},\ v_2/\sqrt{-\lambda_2},\dots$

Існує така константа $L>0$, що для довільної функції

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s| f_s^2 \leq L \|f\|^2_{\tilde{H}_2(D)}, \quad f_s=(f,\varphi_s)_{L_2(D)}. \qquad /6/$$

Розглянемо спочатку лінійну задачу

$$\Delta^2 u + a\Delta u + u_{tt} + cu = F(x,t) \qquad /1'/$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \qquad /2'/$$

$$u\big|_S = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_S = 0. \qquad /3'/$$

Позначимо через $B$ банахів простір функцій

$$u \in C^1(J, L_2(D)) \cap C(J, H^2(D)),$$

обмежених по нормі $\|u\|_B = \sup\limits_{t\in J} \|u\|_{H^2(D_t)} + \sup\limits_{t\in J} \|u_t\|_{L_2(D_t)}$.

Теорема 1.

Нехай $a<0,\ c>0$

$$\varphi \in \tilde{H}^2(D),\ \psi \in L_2(D),\ F \in C(J, L_2(D))$$

та існує таке $\varepsilon>0$, що $\int\limits_0^{\infty} \|F\|^2_{L_2(D_t)} (1+t)^{1+\varepsilon} dt$ збіжний. Тоді існує узагальнений розв"язок задачі /1'/ /2'/ /3'/, зображається він у вигляді ряду по узагальнених власних функціях задачі, а для нього має місце оцінка

$$\|u\|_B \leq C_0 \left(\|\varphi\|_{H^2(D)} + \|\psi\|_{L_2(D)} + \left(\int\limits_0^{\infty} \|F\|^2_{L_2(D_t)} (1+t)^{1+\varepsilon} dt\right)^{1/2}\right). \qquad /7/$$

Доведення.

Розглянемо $S_N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} U_k(t)\varphi_k(x)$,

де $U_k(t) = \varphi_k \cos\sqrt{-\lambda_k}\, t + \dfrac{\psi_k}{\sqrt{-\lambda_k}} \sin\sqrt{-\lambda_k}\, t +$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \int\limits_0^t F_k(\tau) \sin\sqrt{-\lambda_k}(t-\tau)\, d\tau. \qquad /8/$$

Легко перевірити, що функція $S_N(x,t)$ задовольняє тотожність

$$\int\limits_{Q_T} \Big( \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 S_N}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - a\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S_N}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - S_{N_t}\varphi_t + cS_N\varphi \Big) dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_T} \sum_{k=1}^{N} F_k(t)\varphi_k(x)\varphi(x)\,dx\,dt + \int\limits_{D_0} \sum_{k=1}^{N} \psi_k \varphi_k(x)\varphi(x)\,dx. \qquad /9/$$

Покажемо, що послідовність $\{S_N\}$ збіжна у $B$. З /8/ маємо

$$U_k^2(t) \le C_1(\varphi_k^2 + |\lambda_k|^{-1}\psi_k^2 + |\lambda_k|^{-1}\int_0^\infty F_k^2(t)(1+t)^{1+\varepsilon}dt)$$

$$U_k'^2(t) \le C_2(|\lambda_k|\varphi_k^2 + \psi_k^2 + \int_0^\infty F_k^2(t)(1+t)^{1+\varepsilon}dt). \qquad /10/$$

Оскільки система $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ ортонормована у $L_2(D_t)$, а система $\sigma_1/\sqrt{-\lambda_1}, \sigma_2/\sqrt{-\lambda_2}, \ldots$ ортонормована в $\overset{\circ}{H}{}^1(D_t)$, то для довільних $M, N$ і $t>0$ можна одержати оцінку

$$\|S_N(x,t) - S_M(x,t)\|_B^2 \le C_3\sum_{k=N+1}^{M}(|\lambda_k|\varphi_k^2 + \psi_k^2 + \int_0^\infty F_k^2(t)(1+t)^{1+\varepsilon}dt), \qquad /11/$$

і для довільного $N$ і $t>0$ таку оцінку

$$\|S_N(x,t)\|_B^2 \le C_4\sum_{k=1}^{N}(|\lambda_k|\varphi_k^2 + \psi_k^2 + \int_0^\infty F_k^2(t)(1+t)^{1+\varepsilon}dt). \qquad /12/$$

Для функції $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2(D)$ можемо використати нерівність /6/, $\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|\varphi_k^2 \le L\|\varphi\|_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)}$, а для функції $\psi$ і $F$ – рівність Парсеваля.

Як видно з /11/, збіжність цих рядів забезпечує фундаментальність послідовності $\{S_N(x,t)\}$ у повному просторі $B$. Отже, сума ряду $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)\sigma_k(x) \in B$.

Очевидно, що $u(x,t)$ задовольняє початкову умову /$3_1$/ і граничну умову /$2_1$/.

Використовуючи той факт, що послідовність, збіжна в нормі простору $B$, збігається також у просторі $H^{2,1}(Q_T)$ при довільному $T>0$, можемо перейти до границі у тотожності /9/ при $N \to \infty$.

Отже, $u(x,t)$ задовольняє тотожність /4/ для будь-яких функцій $\sigma(x,t) \in H^{2,1}(Q_T)$ таких, що $\sigma|_S = 0$, $\sigma|_{D_T} = 0$.

Таким чином, $u(x,t)$ – узагальнений розв"язок задачі /1'/, /2/, /3/.

Щоб одержати апріорну оцінку /7/, треба в нерівності /12/ перейти до границі при $N \to \infty$. Теорему доведено.

Повернемось до вихідної задачі /I/–/3/. Розв"язок задачі шукаємо у класі функцій

$$M = \{ u \in B,\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x),\ \|u\|_B \le K \}.$$

Введемо позначення

$$f(x,t,u,\dots,u_{x_i},\dots,u_{x_i x_j},\dots,u_t) = F(x,t).$$

Будемо говорити, що функція $f$ задовольняє умови типу Ліпшиця, якщо існують сталі $L_1, L_2, \varepsilon$ такі, що

$$\|F\|_{L_2(D_t)} \le L_1 \|u\|_B \big/ (1+t)^{1+\varepsilon},$$

$$\|F_1 - F_2\|_{L_2(D_t)} \le L_2 \|u_1 - u_2\|_B \big/ (1+t)^{1+\varepsilon},$$

де

$$F_k(x,t) = f(x,t,u_k,\dots,u_{kx_i},\dots,u_{kx_ix_j},\dots,u_{k_t}).$$

Т е о р е м а 2.

Нехай виконуються такі умови:

1/ $a<0,\ c>0;\ \varphi \in \tilde{H}^2(D),\ \psi \in L_2(D)$.

2/ $f(x,t,\xi)$ визначена на $D \times J^2 \times R^m$, $(m = n^2+n+2)$; для довільних $\xi \in R^m$, $t \in J$ функція $x \to f(x,t,\xi)$ вимірна на $D$; майже для всіх $x \in D$ функція $(t,\xi) \to f(x,t,\xi)$ неперервна на $J \times R^m$ і має місце оцінка

$$|f(x,t,\xi)| \le K'\Big(g(x,t) + \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|\Big),\ \text{де}\ g(x,t) \in C(J, L_2(D));$$

3/ $f$ задовольняє умови типу Ліпшиця;

4/ існує $\eta,\ 0<\eta<1$ i $\left(\|\varphi\|_{\tilde{H}^2(D)} + \|\psi\|_{L_2(D)}\right) \le \eta K;$

$$C_0(\eta + L_1/\sqrt{\varepsilon}) \le 1 \quad i \quad C_0 \cdot L_2/\sqrt{\varepsilon} < 1.$$

Тоді змішана задача /I/–/3/ має єдиний розв"язок $u \in M$.

Д о в е д е н н я . На основі міркувань, проведених для лінійного випадку, розв"язок задачі можна розглядати як нерухому точку перетворення $A: u \to \sigma$

$$\sigma = Au = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t)\,\sigma_k(x), \qquad /13/$$

де $U_k(t)$ дається виразом /8/. Використовуючи перші дві умови теореми, легко показати, що для довільної функції $u \in B$ її образ $Au \in B$. З виразу /8/ для $U_k(t)$ очевидно, що $Au|_{t=0} = \varphi(x)$ і $Au_t|_{t=0} = \psi(x)$.

Скориставшись оцінкою /7/, одержимо

$$\|Au\|_B \le C_0(\|\varphi\|_{\overset{\circ}{H}{}^2(D)} + \|\psi\|_{L_2(D)} + (\int_0^\infty \|F\|^2_{L_2(D_t)} (1+t)^{1+\varepsilon} dt)^{1/2}) \le$$

$$\le C_0(\eta K + \|u\|_B L_1/\sqrt{\varepsilon}) \le C_0(\eta + L_1/\sqrt{\varepsilon}) K \le K$$ для всіх $u \in M$.

Отже, перетворення $A$ переводить повний метричний простір $M$ у себе. $A$ стискаюче відображення. У цьому легко переконатись

$$\|Au_1 - Au_2\|_B \le C_0(\int_0^\infty \|F_1 - F_2\|_{L_2(D_t)} (1+t)^{1+\varepsilon} dt)^{1/2} \le$$

$$\le C_0 \|u_1 - u_2\|_B L_2/\sqrt{\varepsilon} \le r \|u_1 - u_2\|_B ,$$

де $0 < r = C_0 L_2/\sqrt{\varepsilon} < 1$.

Згідно з принципом стискаючих відображень існує єдина нерухома точка перетворення $A$, яка і є узагальненим розв"язком задачі $u \in B$. Причому $\|u\|_B \le K$. Теорему доведено.

Список літератури: 1. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1976. 2. Худавердиев К.И., Тахиров Б.О. Исследование сильно обобщенного решения многомерной смешанной задачи с общими краевыми условиями для гиперболического уравнения с нелинейной операторной правой частью. - Изв. АН АзССР, сер. физ.техн. и мат. наук, 1980, № 2.

Стаття надійшла до редколегії 02.02.82

УДК 517.946

Т.О.Мельник

# ЗАДАЧА З НЕВІДОМОЮ ГРАНИЦЕЮ ДЛЯ ГІПЕРБОЛО-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Нехай прямокутник $G=\{(x,t)\in \mathbb{R}^2: -1<x<1,\ 0<t<T,\ T>0\}$ деякою гладкою кривою $\gamma: x=\varphi(t),\ (\varphi(0)=0, -1<\varphi(t)<1$ для всіх $t\in[0,T])$ розділяється на дві компоненти $G_1$ і $G_2$. Ставиться задача про знаходження функцій $u_1(x,t)$ в $G_1$, $u_2(x,t)$ в $G_2$ і $\varphi(t)$ на $]0,T]$ таких, щоб справджувались рівняння

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-a_1^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=b_1(x,t)u_1+f_1(x,t) \quad \text{в} \quad G_1, \qquad /1/$$

рівняння

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=b_2(x,t)u_2+f_2(x,t) \quad \text{в} \quad G_2, \qquad /2/$$

початкові умови

$$u_1(x,0)=g_1(x),\ \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t}=h_1(x),\ x\in[-1,0],\ u_2(x,0)=g_2(x),\ x\in[0,1], \qquad /3/$$

крайові умови на бічних сторонах

$$u_1(-1,t)=H_1(t),\ u_2(1,t)=H_2(t),\ t\in[0,T], \qquad /4/$$

умови спряження на $\gamma$

$$u_1(\varphi(t),t)=u_2(\varphi(t),t),\ \left[m_1(t)\frac{\partial u_1}{\partial x}-m_2(t)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right]_{x=\varphi(t)}=H(t),\ t\in[0,T], \qquad /5/$$

додаткова умова на $\gamma$

$$\varphi''(t)=n_1(t)u_1(\varphi(t),t)+n_2(t)\frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\varphi(t)}+f(t),$$

$$\varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=\varphi_0,\ t\in[0,T] \qquad /6/$$

і умова $|\varphi'(t)|<a_1$ для всіх $t\in[0,T]$. $\qquad /7/$

Тут $a_1$ і $a_2$ – задані додатні сталі; $b_i(x,t)$, $f_i(x,t)$ – задані неперервні в $G_i$ функції $(i=1,2)$; $g_1(x), h_1(x)$ і $g_2(x)$ – задані неперервні відповідно на $[-1,0]$ і $[0,1]$ функції;

$h_i(t), m_i(t), n_i(t), H(t), \ell(t)$ – задані неперервні на $[0,T]$ функції; $\varphi_0$ – задане число таке, що $|\varphi_0| < a_1$.

Для розв"язування задачі використовуємо метод характеристик, застосований у праці [1] для гіперболічних рівнянь, і метод потенціалів для параболічних рівнянь в областях з криволінійною границею [2, 3]. Якщо продовжити функції $f_1$ і $f_2$ на всю смугу $\{-\infty < x < \infty, 0 \le t \le T\}$, а функції $g_1, g_2, h_1$ на всю числову вісь, а також записати розв"язки відповідних задач Коші /1/, /3/ і /2/ /3/ і зробити належні заміни шуканих функцій, то прийдемо до задачі вигляду /1/ – /7/, де $f_i \equiv 0$, $g_i \equiv 0$, $h_i \equiv 0$, $(i=1,2)$. Залишивши ці ж нумерації і позначення, вважатимемо без обмеження загальності, що $T \le \frac{1}{2} a_1$. Приймемо

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=\varphi(t)} = v_1(t), \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=\varphi(t)} = v_2(t). \qquad /8/$$

Для розв"язку $u_1(x,t)$ рівняння /1/ в $G_1$ з першими двома початковими умовами /3/, першою граничною умовою /4/ і першою умовою /8/ методом характеристик одержимо співвідношення:

$$u_1(x,t) = \begin{cases} H_1\left(t-\frac{1+x}{a_1}\right) + \frac{1}{2a_1}\int\limits_0^{t-\frac{1+x}{a_1}} d\tau \int\limits_{-x+a_1(t-\tau)-2}^{x+a_1(t-\tau)} b_1(y,\tau)\, u_1(y,\tau)\, dy + \\ + \frac{1}{2a_1}\int\limits_{t-\frac{1+x}{a_1}}^{t} d\tau \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_1(t-\tau)} b_1(y,\tau)\, u_1(y,\tau)\, dy, \quad -1 \le x \le a_1 t - 1; \\ \frac{1}{2a_1}\int\limits_0^{t} d\tau \int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_1(t-\tau)} b_1(y,\tau)\, u_1(y,\tau)\, dy, \quad a_1 t - 1 \le x \le -a_1 t; \end{cases} \qquad /9/$$

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^{\alpha(x+a_1t)}(\varphi'(\tau)+a_1)\vartheta_1(\tau)d\tau+\frac{1}{2a_1}\int\limits_0^{\alpha(x+a_1t)}d\tau\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_1t+a_1\tau-2a_1\alpha(x+a_1t)}b_1(y,\tau)u_1(y,\tau)dy+ \\
+\frac{1}{2a_1}\int\limits_{\alpha(x+a_1t)}^{t}d\tau\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_1(t-\tau)}b_1(y,\tau)u_1(y,\tau)dy-\int\limits_0^{\alpha(x+a_1t)\varphi(\tau)}d\tau\int\limits_{\varphi(\alpha(x+a_1t))-a_1\alpha(x+a_1t)+a_1\tau}\frac{b_1(y,\tau)u_1(y,\tau)dy}{\varphi'(\beta(y-a_1\tau))-a_1} \\
-a_1t\le x\le\varphi(t),
\end{cases}
$$

де $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ – обернені функції відповідно до функцій $t\to\varphi(t)+a_1t$ і $t\to\varphi(t)-a_1t$. Для того щоб функція $u_1$, визначена із системи інтегральних рівнянь /9/ /при довільно заданій неперервно диференційованій функції $\vartheta_1$/, була двічі неперервно диференційована в $G_1$, необхідно виконання умов узгодження:

$$H_1(0)=H_1'(0)=H_1''(0)=0, \qquad /10/$$

$$\vartheta_1(0)=\vartheta_1'(0)=0. \qquad /11/$$

Нехай $\varphi(t)$ – довільно задана, два рази неперервно диференційована на $[0,T]$ функція, що задовольняє умову /7/ і $\varphi(0)=0,\varphi'(0)=\varphi_0$. Позначимо через $R(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна рівняння

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-a_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=F(x,t)$$

з третьою початковою умовою /3/, другою граничною умовою /4/ і другою умовою /8/. Тоді задача знаходження розв"язку $u_2(x,t)$ рівняння /2/ в $G_2$ з тими самими умовами еквівалентна інтегральному рівнянню

$$u_2(x,t)=\int\limits_0^t R(x,t,\varphi(\tau),\tau)\vartheta_2(\tau)d\tau+\int\limits_0^t\frac{\partial R(x,t,1,\tau)}{\partial\xi}H_2(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{\varphi(\tau)}^1 K(x,t,\xi,\tau)\, b_2(\xi,\tau)\, u_2(\xi,\tau)\, d\xi .$$

З /9/, /I2/ і другої умови /5/ отримуємо $m_1(t)\nu_1(t)-m_2(t)\nu_2(t)=H(t)$. Припустимо, що $m_1(t)\neq 0$, $m_2(t)\neq 0$ при всіх $t\in[0,T]$. Тоді

$$\nu_2(t)=\frac{m_1(t)}{m_2(t)}\nu_1(t)-\frac{H(t)}{m_2(t)}=m(t)\nu_1(t)+h(t).$$

Підставляємо цей вираз в /I2/, а потім /I2/ і /9/ в першу умову /5/. Отримаємо

$$\int_0^t R(\varphi(t),t,\varphi(\tau),\tau)\, m(\tau)\nu_1(\tau)\,d\tau=\int_0^t(\varphi'(\tau)+a_1)\nu_1(\tau)\,d\tau+P(t,u_1,u_2), \qquad /I3/$$

де $P$ –відомий лінійний інтегральний оператор Вольтерра. Оскільки при $t\to\tau$ ядро $R$ поводить себе як $c(t-\tau)^{1/2}$, то інтегральне рівняння /I3/ звичайним способом зводиться до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду

$$\nu_1(t)=\int_0^t R_1(t,\tau)\,\nu_1(\tau)\,d\tau+P_1(t,u_1,u_2), \qquad /I4/$$

де $P_1$ знову є оператором Вольтерра. Не трудно переконатись, що будь-який, розв"язок отриманого рівняння задовольняє умови /I/, якщо має місце /I0/ і

$$H(0)=H'(0)=H_2(0)=0. \qquad /I5/$$

Знайшовши функції $\nu_1$ і $\nu_2$ з /I4/ і підставивши їх значення в /9/ і /I2/, для розв"язку вихідної задачі отримуємо нелінійну систему інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра другого роду /6/, /9/, /I2/. Доводимо, що для малих значень змінної $t$ ця система розв"язна за методом ітерацій і будь-який розв"язок її задовольняє умову /7/. Таким чином доведено наступну теорему.

Т е о р е м а . Припустимо, що: а/ функції $b_i$, $f_i$ неперервні та неперервно диференційовані в $\bar{G}_i$ $(i=1,2)$ ; б/ функції $g$, $g_1'$, $g_1''$, $h_1$, $h_1'$ і $g_2$ неперервні відповідно на

$[-1,0]$ і $[0,1]$ ; в/ функції $m_i$, $m_i'$, $H$, $H'$, $H_1$, $H_1'$, $H_1''$, $H_2$ неперервні на $[0,T]$ ; г/ функції $\eta_1, \eta_2$ і $f^1$ неперервні на $[0,T]$ ; д/ виконані умови узгодження /10/ і /14/. Тоді задача /1/ – /7/ має класичний розв"язок.

Список літератури: 1. М е л ь н и к Т.О. Спряження розв"язків гіперболічного рівняння другого порядку вздовж невідомої границі. – ДАН УРСР, сер. А, 1980, № 12. 2. Р а с у л о в Т.М. Плоские смешанные задачи для параболических систем в областях с переменными по времени границами. – Диф. уравн., 1979, т.15, № 12. 3. Т и х о н о в А.Н. С а м а р с к и й А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.

Стаття надійшла до редколегії 29.03.82

УДК 517.196

І.М.Колодій, Д.І.Баб"ячок

НЕРІВНІСТЬ ХАРНАКА ДЛЯ НЕВІД"ЄМНИХ ОБМЕЖЕНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДУ З ВИРОДЖЕННЯМ

Вивчаємо властивості узагальнених розв"язків параболічних рівнянь

$$\begin{gathered} u_t - \operatorname{div} A(x,t,u,u_x) = B(x,t,u,u_x), \\ x=(x_1,\dots,x_n),\ u_x=(u_{x_1},\dots,u_{x_n}), \\ A(x,t,u,u_x)=(A_1(x,t,u,u_x),\dots,A_n(x,t,u,u_x)). \end{gathered} \qquad /1/$$

Використовуючи відому методику та техніку робіт Ю.Мозера [1], [2], Серіна Д. Аронсона Д. [3] і Кружкова С.Н. [4], доведемо нерівність Харнака для невід"ємних обмежених узагальнених розв"язків рівняння /1/. Ця праця є продовженням досліджень, розпочатих у статті [5].

Нехай $\Omega$ – обмежена область в $n$ – мірному евклідовому просторі $E^n$ векторів $x=(x_1,\dots,x_n)$. Для кулі $\{x\in E^n, |x|<r\}$

введемо позначення $\mathcal{K}(\tau)$. У просторі $E^{n+1}$ векторів $(x,t)$ через $Q$ і $Q(\tau)$ позначимо циліндри $\Omega\times(T_1,T_2)$, $\mathcal{K}(\tau)\times(-\tau^2,0)$. Для будь-яких чисел $p\geq 1$ і $q\geq 1$ позначимо через $L_{p,q}(Q)$ банаховий простір вимірних у $Q$ функцій з нормою

$$\|u\|_{p,q,Q}=\left(\frac{1}{T_2-T_1}\int_{T_1}^{T_2}\left(\frac{1}{mes\,\Omega}\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{1/q}.$$

Припустимо, що функції $A(x,t,u,\bar p)$, $B(x,t,u,\bar p)$ для всіх значень $(x,t)\in Q$ і всіх значень $u$ і $\bar p=(p_1,\ldots,p_n)$ задовольняють умови

$$A(x,t,u,\bar p)\bar p\geq a_1(u)\sum_{i=1}^n \lambda_i(x,t)|p_i|^2-g(x,t,u),$$

$$|A(x,t,u,\bar p)|\leq a_2(u)\sum_{i=1}^n \mu_i(x,t)|p_i|+\ell(x,t,u), \qquad /2/$$

$$|B(x,t,u,\bar p)|\leq a_2(u)\sum_{i=1}^n \lambda_i(x,t)|p_i|^2+f(x,t,u),$$

де $\lambda_i(x,t)$, $\mu_i(x,t)$, $g(x,t,u)$, $\ell(x,t,u)$, $f(x,t,u)$ - невід"ємні функції; $a_1(u)$, $a_2(u)$ - додатні функції, причому існують постійні $\bar a_1^{-1}$ і $\bar a_2$ такі, що $a_1^{-1}(u)\leq \bar a_1^{-1}$, $a_2(u)\leq \bar a_2$, коли $|u|\leq M$. Функції $\lambda_i^{-1}(x,t)\in L_{t_i,t_0}(Q)$; $\mu_i(x,t)$, $\mu_i^2(x,t)\lambda_i^{-1}(x,t)\in L_{p,q}(Q)$; $g(x,t,u)$, $\ell(x,t,u)$, $f(x,t,u)\in L_{p,q}(Q)$, коли $|u|\leq M$, причому числа $p$, $q$, $t_i$, $t_0$ такі, що

$$\frac{p}{q}>\theta, \qquad /3/$$

$$\theta=n\left(2-\sum_{i=1}^n\frac{1}{t_i}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{t_0}\right),\ \sum_{i=1}^n\frac{1}{t_i}<2,\ n\geq 2,\ \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1.$$

Позначимо

$$Q^*(\rho):|x|<\frac{\rho}{\sqrt 2},\ \left|t+\frac{3\tau^2}{2}\right|<\frac{\rho^2}{2};\quad D^+(\tau)=Q\left(\frac{\tau}{2}\right);$$

$$D^-(\tau)=Q^*\left(\frac{\tau}{\sqrt 2}\right);\ R^+(\tau)=Q(\tau);\ R^-(\tau)=Q^*(\tau);$$

$$M(\tau)=M(Q(\tau))=\sum_{i=1}^n\|\mu_i^2\lambda_i^{-1}\|_{p,q,Q(\tau)};\ P(\tau)=P(Q(\tau))=\sum_{i=1}^n\|\lambda_i^{-1}\|_{t_i,t_0,Q(\tau)};$$

$$\varkappa(\tau)=\left(\tau^2\sum_{i=1}^n\|\ell_i\mu_i^{-1}\|_{p,q,Q(\tau)}\right)^{\frac12}+\left(\tau^2\|g\|_{p,q,Q(\tau)}\right)^{\frac12}+\tau^2\|f\|_{p,q,Q(\tau)}.$$

Т е о р е м а . Нехай $u(x,t)$ невід"ємний узагальнений розв"язок * рівняння /1/ за умов /2/, /3/ у $Q(2r)\subset Q$ і $\underset{Q(2r)}{\operatorname{vrai\,max}} |u(x,t)|\le M$. Тоді

$$\underset{D^-(r)}{\operatorname{vrai\,max}}\, u(x,t)\le C\,(\underset{D^+(r)}{\operatorname{vrai\,min}}\, u(x,t)+\varkappa(2r)), \qquad /4/$$

де $C=C(n,t_1,t_0,a_1^{-1},a_2,p,q,M,P(2r),M(2r),\|g\|_{p,q,Q(2r)})$.

Д о в е д е н н я . Доведення цієї теореми дуже близьке до доведення відповідної теореми 3.1 праці [5]. Нехай $\bar u=u+\varkappa+\varepsilon$, $\varkappa=\varkappa(2r),\ \varepsilon>0;\ \mathcal{I}(u)=\bar u^{\alpha-1}e^{\sigma\bar u\, sign(\alpha-1)}$, $\alpha\neq 1,\ \sigma>0$,

$\varphi=\eta^2\mathcal{I}(u)\chi(t;\tau_1,\tau_2)$ , де $\eta=\eta(x,t)$ – гладка функція, що обертається в нуль на нижній основі та боковій поверхні циліндра $Q(2r)$; $\chi(t;\tau_1,\tau_2)$ – характеристична функція інтервалу $\tau_1,\tau_2\in(-4r^2,0)$.

Оцінимо вираз $(A\varphi_x-B\varphi)\,sign(\alpha-1)$ , використавши нерівність Юнга і вважаючи, що $\sigma=\frac{a_2}{a_1}$, $E=e^{\sigma u\, sign(\alpha-1)}$:

$$(A\varphi_x-B\varphi)\,sign(\alpha-1)\ge\eta^2\mathcal{I}'(u)\,sign(\alpha-1)(a_1\sum_{i=1}^n\lambda_i(x,t)|\bar u_{x_i}|^2-$$
$$-g(x,t,u))-2\eta|\eta_x|\mathcal{I}(u)(a_2\sum_{i=1}^n\mu_i(x,t)|\bar u_{x_i}|+l(x,t,u))-$$
$$-\eta^2\mathcal{I}(u)(a_2\sum_{i=1}^n\lambda_i(x,t)|\bar u_{x_i}|^2+f(x,t,u))\ge(\tfrac12 a_1|\alpha-1|\eta^2\bar u^{\alpha-2}\sum_{i=1}^n\lambda_i(x,t)|\bar u_{x_i}|^2-$$
$$-\eta^2\bar u^{\alpha}\Big(\frac{a_2}{a_1}\frac{g(x,t,u)}{\varkappa}+\frac{f(x,t,u)}{\varkappa}+|\alpha-1|\frac{g(x,t,u)}{\varkappa^2}+\sum_{i=1}^n\frac{l^2(x,t,u)}{\mu_i(x,t)}\frac{1}{\varkappa^2}\Big)-$$
$$-|\eta_x|^2\bar u^{\alpha}\Big(\frac{8a_2^2}{a_1}\frac{1}{|\alpha-1|}+4a_2^2\Big)\sum_{i=1}^n\frac{\mu_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}.$$

Якщо первісну $\mathcal{I}(u)$ позначити $\mathcal{H}(u)$ , то, як і в праці [5], з інтегральної тотожності й оцінки /5/ випливає нерівність

$$sign(\alpha-1)\Big(\int_{K(2r)}\eta^2\mathcal{H}(u)\,dx\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}+(\alpha-1)\frac{a_1}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{K(2r)}\eta^2\bar u^{\alpha-2}\sum_{i=1}^n\lambda_i(x,t)|\bar u_{x_i}|^2E\,dx\,dt\le$$

* Означення узагальненого розв"язку наведено у праці [5].

$$\le \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\mathcal{K}(2\tau)} \eta^2 \bar{u}^{-\alpha}\Big(\frac{a_2}{a_1}\,\frac{g(x,t,u)}{x}+\frac{f(x,t,u)}{x}+|\alpha-1|\frac{g(x,t,u)}{x^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\ell_i^2(x,t,u)}{\mu_i(x,t)}\frac{1}{x^2}\Big)E\,dx\,dt+$$

$$+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\mathcal{K}(2\tau)} |\eta_x|^2\bar{u}^{-\alpha}\Big(\frac{8a_2^2}{a_1}\frac{1}{|\alpha-1|}+4a_2^2\Big)\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}E\,dx\,dt+2\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\mathcal{K}(2\tau)}|\eta||\eta_t||\mathcal{H}(u)|\,dx\,dt. \qquad /6/$$

Виберемо $\mathcal{H}(u)=\int_{u_0}^{u}\mathcal{I}(u)\,du$, де $u_0=\begin{cases}0 & \text{при } \alpha\ge 0,\\ M & \text{при } \alpha<0.\end{cases}$

Неважко перевірити, що при $\alpha\ne 0$ і $\alpha\ne 1$ мають місце оцінки:

$$\frac{\bar{u}^{\alpha}-(x+\varepsilon)^{\alpha}}{\alpha}\le \mathcal{H}(u)\le e^{-bM}\frac{\bar{u}^{\alpha}}{\alpha},\quad \alpha>1;$$

$$e^{-bM}\frac{\bar{u}^{\alpha}-(x+\varepsilon)^{\alpha}}{\alpha}\le \mathcal{H}(u)\le \frac{\bar{u}^{\alpha}}{\alpha},\quad 0<\alpha<1;$$

$$e^{-bM}\frac{\bar{u}^{\alpha}-(x+M+\varepsilon)^{\alpha}}{|\alpha|}\le -\mathcal{H}(u)\le \frac{\bar{u}^{\alpha}}{|\alpha|},\quad \alpha<0.$$

При $\alpha>1$ і $v^2=\bar{u}^{\alpha}$ з нерівності /6/ отримуємо оцінку:

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t\in(-4\tau^2,0)}\int_{\mathcal{K}(\tau)}(\eta v)^2dx+\iint_{Q(2\tau)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|(\eta v)_{x_i}|^2dx\,dt\le C\alpha^2\Big(1+\frac{1}{(\alpha-1)^2}\Big)\mathfrak{M}, \qquad /7/$$

де
$$\mathfrak{M}=\iint_{Q(2\tau)}(\eta v)^2\Big(g(x,t,u)+\frac{f(x,t,u)}{x}+\frac{g(x,t,u)}{x^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\ell_i^2(x,t,u)}{\mu_i(x,t)}\frac{1}{x^2}+1\Big)+$$

$$+\Big(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}\Big)|\eta_x|^2v^2+\eta|\eta_t|v^2\Big)\,dx\,dt. \qquad /8/$$

При $0<\alpha<1$ ліву частину нерівності /7/ можна оцінити зверху величиною $C\big(1+\frac{1}{(\alpha-1)^2}\big)\mathfrak{M}$. Таким чином, при $\alpha>0$ і $\alpha\ne 1$ маємо

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t\in(-4\tau^2,0)}\int_{\mathcal{K}(2\tau)}(\eta v)^2dx+\iint_{Q(2\tau)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|(\eta v)_{x_i}|^2dx\,dt\le C(1+\alpha^2)\Big(1+\frac{1}{(\alpha-1)^2}\Big)\mathfrak{M}. \qquad /9/$$

Оцінка /9/ збігається з оцінкою /5.7/ праці [5].

При $\alpha<0$ і $v^2=\bar{u}^{\alpha}$ з нерівності /6/ одержуємо

$$\operatorname*{vraimax}_{t\in(-4\tau^2,0)}\int\limits_{K(2\tau)}(\eta v)^2dx+\iint\limits_{Q(2\tau)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|(\eta v)_{x_i}|^2dxdt\le C(\alpha-1)^2 M. \qquad /10/$$

З нерівностей /9/, /10/ випливає справедливість леми 3.1 праці [5]. Доведення лем 3.2 і 3.4 праці [5] залишається без змін. Для доведення леми 3.3. [5] приймемо в /6/ $\alpha=0$, $v=-\mathcal{H}(u)$. Тоді одержимо

$$\int\limits_{K(2\tau)}\eta^2 v\,dx\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}+\frac{1}{2}a_1\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{K(2\tau)}\eta^2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)|v_{x_i}|^2dxdt\le C\Big(\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{K(2\tau)}\eta^2\Big(\frac{g(x,t,u)}{x^2}+$$

$$+g(x,t,u)+\frac{f(x,t,u)}{x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\ell_i^2(x,t,u)}{\mu_i(x,t)}+\eta_x^2\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i^2(x,t)}{\lambda_i(x,t)}+\eta|\eta_t|\,|v|\Big)dxdt\Big). \qquad /11/$$

Ця нерівність збігається з нерівністю /3.16/ праці [5]. Отже, з /11/, повторивши перетворення, наведені у праці [5], маємо

$$m\{(x;t)\in R^+(\tau),\ v>s-a+C(1+M(2\tau))\}+$$

$$+m\{(x,t)\in R^-(\tau),\ v<-s-a-C(1+M(2\tau))\}\le C\tau^{n+2}P^{\frac{1}{2}}(2\tau)\frac{1}{\sqrt{s}}. \qquad /12/$$

Враховуючи, що функція $v=-\mathcal{H}(u)$, $\mathcal{H}(u)=\int\limits_{0}^{u}\bar{u}^{-1}e^{-\nu u}du$, а також нерівність $e^{-\delta M}\ln\bar{u}\le\mathcal{H}(u)\le\ln\bar{u}$ з /12/, отримуємо

$$m\{(x,t)\in R^+(\tau),\ \ln\bar{u}<-s+a-C(1+M(2\tau))\}+$$

$$+m\{(x,t)\in R^-(\tau),\ e^{-\delta M}\ln\bar{u}>s+a+C(1+M(2\tau))\}\le C\tau^{n+2}P^{\frac{1}{2}}(2\tau)\frac{1}{\sqrt{s}}. \qquad /13/$$

Нерівність /13/ аналогічна нерівності /3.6/ леми 3.3 праці [5]. Тепер залишилось повторити доведення теореми 3.1.[5] з тією лише різницею, що як функцію $w$ на циліндрі $R^-(\tau)$ треба взяти функцію $\bar{u}^{e^{-\delta M}}e^{-a-C(1+M(2\tau))}$. Тоді одержуємо

$$\operatorname*{vraimax}_{D^-(\tau)}\bar{u}^{e^{-\delta M}}\ \operatorname*{vraimax}_{D^+(\tau)}\bar{u}^{-1}\le N_1N_2e^{2C(1+M(2\tau))} \qquad /14/$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати $\mu<1$ , тоді $\mu^{e^{-6M}} \geq \mu$ ,
і з нерівності /I4/одержуємо оцінку /4/.

Список літератури: I. Кружков С.Н. Априорные оценки для обобщенных решений эллиптических и параболических уравнений. - ДАН СССР, 1963, I50, № 4. 2. Кружков С.Н., Колодий И.М. Априорные оценки и неравенство Харнака для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений. - Сиб. мат. журн. 1977, т.I8, № 3. 3. Aronson D.G., Serrin J. Local behavior of solutions of quasi-linear parabolic equations.- Arch. Rational Mech. and Analysis, 1967, v.25. 4. Moser J. On pointwise estimate for parabolic differential equations.- Comm. Pure and Appl. Math., 1971, v.24, N5. 5. Moser J. A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations.- Comm. Pure and Appl. Math., 1960, v.13, N3.

Стаття надійшла до редколегії 30.I2.80

УДК 5I7.9I7

Л.М.Лісевич, Л.І.Блавацька

## ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ"ЯЗКУ КВАЗІЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПРАВОЮ $S^p$ -МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНОЮ ЧАСТИНОЮ

Розглянемо функціональну матрицю $\varphi(x)=[\varphi_{ij}(x)]$ виміру $m\times n$ , елементи якої виміряні $S^p$ - сумовні функції / $p\geq 1$ / в кожному скінченному інтервалі, а також норму

$$\|\varphi\| = \sum_{i,j}\left\{\int_x^{x+1}|\varphi_{ij}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}. \qquad /1/$$

Приймемо

$$\rho_{S^p}\left\{\varphi(x), g(x)\right\} = \sup_{-\infty<x<+\infty}\|\varphi(x)-g(x)\|.$$

Як відомо [3] , матриця $\varphi(x)$ називається $S^p$ - майже періодичною, якщо її елементи $\varphi_{ij}(x)$ $S^p$ - майже періодичні функції.
Іншими словами, матриця $\varphi(x)$ $S^p$ - майже періодична, коли

для кожного $\varepsilon>0$ існує відносно щільна множина $S^P, \varepsilon$ – майже періодів $\tau=\tau(\varepsilon)$ таких, що

$$\rho_{S^P}\{\varphi(x+\tau),\varphi(x)\}=$$

$$=\sup_{-\infty<x<\infty}\sum_{i,j}\left\{\int_x^{x+1}|\varphi_{ij}(t+\tau)-\varphi_{ij}(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}<\varepsilon. \qquad /2/$$

Надалі $S^P$ – майже періодичні функції $f(x)$ позначаємо $f(x)\in S^P$ – м.п.

Розглянемо тепер лінійну дійсну систему

$$\frac{dy}{dt}=Ay+f(t), \qquad /3/$$

де $y=colon(y_1,y_2,\dots,y_n)$; $f=colon(f_1,f_2,\dots,f_n)$; $A=[a_{ij}]$ – стала виміру $n\times n$ матриця.

Вважаємо, що

$$A=S^{-1}diag(P,Q)S,$$

де $S$ – неособлива матриця; $P$ і $Q$ – відповідно матриці з додатними та від'ємними дійсними частинами характеристичних чисел $\lambda_i$ матриці $A$, тобто $Re\lambda_j(P)>0$ $/j=1,2,\dots,m/$, $Re\lambda_j(Q)<0$ $/j=m+1,\dots,n/$.

Розглянемо матрицю

$$G(t)=\begin{cases}-S^{-1}diag(e^{Pt},0)S & \text{, коли } t<0,\\ S^{-1}diag(0,e^{Qt})S & \text{, коли } t>0.\end{cases} \qquad /4/$$

Матриця $G(t)$ має такі властивості [I]:

I$^0$. $G(+0)-G(-0)=E$, де $E$ – одинична матриця;

2$^0$. $\|G(t)\|\leq Ce^{-\alpha|t|}$, $/t\neq 0/$, $C,\alpha$ – додатні сталі;

3$^0$. $\frac{d}{dt}G(t)=\dot G(t)=AG(t)$.

Зауважимо, що властивість 2$^0$ доведена у праці [I] для норми

$$\|G\|=\left\{\sum_{i,j}|g_{ij}|^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad /5/$$

Властивість 2$^0$ має місце й у нормі /I/.

Т е о р е м а І. Якщо $Re\lambda_j(A)\neq 0, /j=1,2,\ldots,n/$ , а $f(t)\in S^p_{+\infty}$ – м.п. така, що

$$\int_{-\infty}^{} \|f(t)\|dt = M<+\infty,$$

то існує єдиний обмежений на $J_t = ]-\infty,+\infty[$ і $S^p$ – майже періодичний розв"язок системи /3/, який описується формулою

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\xi)f(\xi)d\xi. \qquad /6/$$

Д о в е д е н н я . Те, що /6/ – єдиний обмежений розв"язок системи /3/, доводиться так само, як у праці [I].

Доведемо, що в /6/ $S^p$ – м.п. розв"язок. Нехай $\tau=\tau(\varepsilon)$ $S^p$, $\varepsilon$ – м.п. функції $f(t)$ . Тоді

$$\rho_{S^p}\{\eta(t+\tau),\eta(t)\}\leq$$

$$\leq \sup_{-\infty<t<+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\|G(t-\xi)\|\|f(\xi+\tau)-f(\xi)\|d\xi<$$

$$<\varepsilon C\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t-\xi|}d\xi\leq K\varepsilon,\ (K=const).$$

Тобто $\eta(t)$ $S^p$ – м.п. Теорема доведена.

Розглянемо нелінійну дійсну систему

$$\frac{dy}{dt}=Ay+f(t,y), \qquad /7/$$

де $A=[a_{ij}]$ – стала виміру $n\times n$ матриця;

$$y=(y_1,y_2,\ldots,y_n);\ f=colon(f_1,f_2,\ldots,f_n).$$

Т е о р е м а 2. Нехай

1/ $Re\lambda_j(A)\neq 0$ , де $\lambda_j$ $/j=1,2,\ldots,n/$ – характеристичні числа матриці $A$ ;

2/ $f(t,y)\in C_{ty}$ $/-\infty<t<+\infty; \|y\|<\infty/$ ;

3/ $\int_{-\infty}^{+\infty}\|f(t,0)\|dt = \Gamma<\infty$ ; /8/

4/ $\int_{-\infty}^{+\infty}\|f(t,y)-f(t,z)\|dt\leq L\|y-z\|$, /9/

$L>0$ досить мала константа;

5/ $f(t,y)\in S^p$ – м.п. змінної $t$ рівномірно відносно $y$ .

Тоді існує обмежений на $J_t = ]-\infty, +\infty[$ і $S^p$ – м.п. розв"язок системи /7/.

Д о в е д е н н я . Приймаючи $f(t,y)$ за вільний член, за аналогією до /6/ розглянемо інтегральне рівняння

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\xi) f(\xi, y(\xi))\, d\xi, \qquad /10/$$

де функція $G(t)$ визначена /4/. Використовуючи умови I/–4/ теореми та властивості функції $G(t)$ доводимо [I] існування обмеженого розв"язку $\eta(t)$ системи /7/, який є обмеженим розв"язком інтегрального рівняння /10/.

Доведемо, що цей розв"язок є $S^p$ – м.п. Маємо

$$\rho_{S^p}\{y(t+\tau), y(t)\} = \sup_{-\infty<t<+\infty} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\xi)\left[f(\xi+\tau, y(\xi+\tau)) - f(\xi, y(\xi))\right] d\xi \right\| \leq$$

$$\leq \sup_{-\infty<t<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-\xi)\| \, \|f(\xi+\tau, y(\xi+\tau)) - f(\xi, y(\xi+\tau))\| \, d\xi +$$

$$+ \sup_{-\infty<t<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-\xi)\| \, \|f(\xi, y(\xi+\tau)) - f(\xi, y(\xi))\| \, d\xi.$$

Нехай

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \|G(t)\| \leq M_1, \qquad /11/$$

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-\xi)\| \, d\xi \leq M_2. \qquad /12/$$

Якщо $\tau = \tau(\varepsilon)$ $S^p$ – майже період функції $f(t,y)$ по $t$, то

$$\rho_{S^p}\{f(t+\tau, y), f(t,y)\} < \varepsilon.$$

Тоді, беручи до уваги /9/, /11/ і /12/, записуємо

$$\rho_{S^p}\{y(t+\tau), y(t)\} \leq \varepsilon \sup_{-\infty<t<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t-\xi)\| \, d\xi +$$

$$+\mathcal{M}_1 \sup_{-\infty<t<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \| f(\xi, y(\xi+\tau)) - f(\xi, y(\xi)) \| d\xi \leq$$
$$\leq \varepsilon \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_1 L \rho_{S^p} \{ y(t+\tau), y(t) \}.$$

Звідси

$$\rho_{S^p} \{ y(t+\tau), y(t) \} \leq \frac{\mathcal{M}_2 \varepsilon}{1-\mathcal{M}_1 L}. \qquad /13/$$

Але за умовою $L>0$ досить мала константа. Приймаючи $0<\mathcal{M}_1 L<1$ та $\frac{\mathcal{M}_2}{1-\mathcal{M}_1 L} = N$, отримуємо

$$\rho_{S^p} \{ y(t+\tau), y(t) \} \leq N\varepsilon,$$

тобто $y(t)$ є $S^p$ – м.п. функція з $S^p$, $N\varepsilon$ – майже періодом.


Список літератури: І. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. 2. Левитан Б.М. Почти периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. 3. Лісевич Л.М., Ковальчук Б.В. $S^p$ – майже періодичні матриці та лінійна система диференціальних рівнянь з $S^p$ – майже періодичною правою частиною. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1973, вип. 8.



Стаття надійшла до редколегії 21.06.82



УДК 517.512.2



Б.В.Ковальчук, З.Д.Фаріон


## ДОСТАТНІ УМОВИ АБСОЛЮТНОЇ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ФУР"Є ДЕЯКИХ КЛАСІВ $S^p$-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

Нехай $F(x)=[f_{jk}(x)]$ $/-\infty<x<\infty/$ є $S^p$ – майже періодична матриця $/p\geq 1$; якщо $p=1$, то замість $S^1$ пишемо $S$ /.

У праці [2] вивчені умови збіжності рядів Фур"є $S$ –майже періодичних матриць, показники Фур"є яких при відповідних властивостях розрідженості мають єдину граничну точку на нескінченності.

Знайдемо достатні умови абсолютної збіжності рядів Фур"є майже періодичних матриць з рідкими спектрами. Відзначимо, що для класу майже періодичних функцій Степанова ці питання досліджені у праці [I].

Оцінки модулів коефіцієнтів Фур"є $S$ – майже періодичних матриць. Якщо позначити через $\{\lambda_k\}$ / $k=1,2,\dots;\ \lambda_k>0$ / послідовність абсолютних величин показників Фур"є $S$ – майже періодичної матриці $F(x)$, то ряд Фур"є такої матриці можна записати у вигляді

$$F(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k e^{i\lambda_k x},$$

де $A_k=\mathcal{M}\{F(x)e^{-i\lambda_k x}\}$ – її матричні коефіцієнти Фур"є [3].

Позначимо через $S^*$ клас $S$ – майже періодичних матриць $F(x)$, показники Фур"є яких мають єдину граничну точку $\lambda^*$ на нескінченності. Якщо ж $\lambda^*\neq 0$, то, прийнявши $\lambda^*\neq 0$ і $\mathcal{M}\{F(x)\}=0$, позначимо клас таких матриць $F(x)$ через $B^*$.

Вважатимемо $F(x)\in B^*$ належить до класу $B_n^*$, якщо існують матриці $F_0(x), F_1(x), F_2(x),\dots, F_n(x)$ такі, що

$$F_0(x)=F(x),\quad F'_{r+1}(x)=F_r(x)\qquad (r=0,1,\dots,n-1),$$

де $F_r(x)\in B^*$ $\quad (r=1,2,\dots,n)$.

Введемо величину

$$\omega(x,\delta)=\sup_{|t|\le\delta}\|F(x+t)-F(x)\|_S .$$

Позначимо

$$\mathcal{J}(F_n,u)=\int_0^u\int_0^v F_n(x)\,dx\,dv.$$

Т е о р е м а  I. Якщо показники Фур"є матриці $F(x)\in S^*$ мають властивості

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k\ge N(\lambda_k),\quad \lambda_k-\lambda_{k-1}\ge N(\lambda_k)\qquad (k=1,2,\dots),$$

де $N(\lambda_k)\to\infty$ при $k\to\infty$ і

$$\omega(0,\delta) = O(\delta^{\alpha}) \qquad (\alpha > 0),$$

то

$$A_k = O\{[N(|\lambda_k|)]^{-\alpha}\}. \qquad /1/$$

Т е о р е м а  2. Якщо показники Фур"є матриці $F(x) \in S^*$ мають властивості

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \geq \theta > 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

і

$$\omega(0,\delta) = O(\delta^{\alpha}) \qquad (\alpha > 0),$$

то

$$A_k = O(|\lambda_k|^{-\alpha}). \qquad /2/$$

Т е о р е м а  3. Якщо показники Фур"є матриці $F(x) \in B_n^*$ / $n = 0, 1, 2, \ldots$ / мають властивості

$$\lambda_k - \lambda_{k+1} \geq N(\lambda_k), \; \lambda_{k-1} - \lambda_k \geq N(\lambda_k) \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

де $N(\lambda_k) \to 0$ при $k \to \infty$ і

$$J(F_n, u) = O(|u|^{2-\alpha}) \qquad (0 < \alpha < 1),$$

то

$$A_k = O\left\{\frac{|\lambda_k|^{n+2}}{[N(|\lambda_k|)]^{2-\alpha}}\right\}. \qquad /3/$$

Т е о р е м а  4. Якщо показники Фур"є матриці $F(x) \in B_n^*$ / $n = 0, 1, 2, \ldots$ / мають властивості

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \geq \theta > 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

і

$$J(F_n, u) = O(|u|^{2-\alpha}),$$

то

$$A_k = O(|\lambda_k|^{n+\alpha}). \qquad /4/$$

Зауважимо, що оцінки модулів коефіцієнтів Фур"є, які виражені формулами /2/ і /4/, є остаточними. При доведенні цих теорем опираємося на результати, одержані у праці [I].

2. Ознаки абсолютної збіжності рядів Фур"є $S$ - майже періодичних матриць з рідкими спектрами. Нехай матриця $F(x)$ має скінченну або зчисленну множину граничних точок $\{\Lambda_j^*\}$, які не належать до спектра. Позначимо через $R_j = ]\Lambda_j^* - \varepsilon, \Lambda_j^* + \varepsilon[$ інтервали, які містять всі показники Фур"є матриці $F(x)$. Тоді множина $Z_j(F)$ показників Фур"є матриці $F(x)$, які належать до інтервалу $R_j$, є симетрична відносно точки $\Lambda_j^*$.

Точки $\lambda$ множини $Z_j(F)$, які задовольняють умову $\lambda > \Lambda_j^*$, перенумеруємо у порядку їх спадання. Тоді одержимо послідовність $\{\lambda_k^{(j)}\}$ $/ k = 1, 2, \ldots /$ таку, що $\lambda_k^{(j)} - \Lambda_j^* \to 0$ при $k \to \infty$.

У такому випадку ряд Фур"є $S$ - майже періодичної матриці $F(x)$ запишемо у вигляді

$$F(x) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{(j)} e^{i\lambda_k^j x}, \qquad /5/$$

де $A_k^j = M\left\{ F(x) e^{-i\lambda_k^{(j)} x} \right\}$ - її матричні коефіцієнти Фур"є.

Користуючись методом з праці [I], можна довести справедливість тверджень.

Л е м а I. Якщо показники Фур"є матриці $F(x)$ мають властивості

$$\lambda_k^{(j)} - \lambda_{k+1}^{(j)} \geq N(\lambda_k^{(j)}),\ \lambda_{k-1}^{(j)} - \lambda_k^{(j)} \geq N(\lambda_k^{(j)}) \ (k = 2, 3, \ldots), \qquad /6/$$

де $N(\lambda_k^{(j)}) \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$A_k^{(j)} = \frac{3\mu}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u, \Lambda_j^*) \varphi_\mu(u, k, \Lambda_j^*) du, \qquad /7/$$

де $\Phi(u, \Lambda_j^*) = F(u) e^{-i\Lambda_j^* u}$; $\varphi_\mu(u, k, \Lambda_j^*) = e^{-i(\lambda_k^{(j)} - \Lambda_j^*)u} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4$;

$t = \frac{\mu u}{4}$; $\mu = N(|\lambda_k^{(j)}|)$.

Лема 2. Якщо матриця $\Phi(x, \Lambda_j^*)$ має послідовні обмежені та неозначені інтеграли $\Phi_\tau(x, \Lambda_j^*)$ / $\tau = 0, 1, \ldots, n$ ; $\Phi_0(x, \Lambda_j^*) = \Phi(x, \Lambda_j^*)$ / і

$$\left| \int_0^u dv \int_0^v \Phi_n(x, \Lambda_j^*) dx \right| = O(|u|^{2-\alpha_j}) \quad (0 < \alpha_j \leq 1; j = 1, 2), \qquad /8/$$

то

$$A_k^{(j)} = O\left\{ \frac{|\lambda_k^{(j)} - \Lambda_j^*|^{n+2}}{[N(|\lambda_k^{(j)}|)]^{2-\alpha_j}} \right\} \quad (j = 1, 2, \ldots). \qquad /9/$$

На основі лем I і 2 можна знайти достатню ознаку абсолютної збіжності ряду Фур"є $S$ -майже періодичної матриці $F(x)$, спектр якої має зчисленну множину граничних точок.

Теорема 5. Якщо показники Фур"є матриці $F(x)$ мають властивості /6/ і наявна оцінка /8/ при $\alpha_j = \alpha$ рівномірно відносно $\alpha$ і $j$, то ряд Фур"є /5/ збігається абсолютно, коли

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\lambda_k^{(j)} - \Lambda_j^*|^{n+2}}{[N(|\lambda_k^{(j)}|)]^{2-\alpha}} < \infty .$$

Список літератури: I. Бредихина Е.А. Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти периодических функций с редкими спектрами. - Мат. сб., 1970, т.81 /123/, . I. 2. Ковальчук Б.В., Фаріон З.Д. Про збіжність рядів Фур"є деяких класів $S^p$ -майже періодичних матриць. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1981, вип. 18. 3. Лісевич Л.М., Ковальчук Б.В. Середнє значення і поняття ряду Фур"є для $S^p$ - майже періодичних матриць.- Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1975, вип. 10.

Стаття надійшла до редколегії 26.06.82

УДК 519.21

І.Д.Квіт, В.М.Косарчин

# ЗВОРОТНА ФОРМУЛА ДЛЯ ЗОБРАЖЕННЯ ВИПАДКОВОГО ВЕКТОРА

Нехай невід"ємний випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ має функцію розподілу ймовірностей $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(t_1, \dots, t_n)$. Позначимо $n$ - вимірний інтервал у першому гіпероктанті $R_n^{0+}$

$$R_n^{0+} = \{t_k \geq 0,\ k = 1, \dots, n\} \qquad /1/$$

через $\mathcal{J}_n$

$$\mathcal{J}_n = \{a_k < t_k \leq b_k\ ;\ k = 1, \dots, n\},\ 0 \leq a_k < b_k \leq \infty. \qquad /2/$$

Приріст $n$ -вимірно неспадної функції розподілу на інтервалі $\mathcal{J}_n$ виражається формулою [1]

$$\mathcal{F}(b_1, \dots, b_n) - \sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}(b_1, \dots, a_k, \dots, b_n) + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \mathcal{F}(b_1, \dots, a_j, \dots, a_k, \dots$$
$$\dots, b_n) - \dots + (-1)^n \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n) = \int_{\mathcal{J}_n} d\mathcal{F}(t) = \mathcal{P}(\xi \in \mathcal{J}_n). \qquad /3/$$

Зображення випадкового вектора $\xi$

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-z_1 t_1 - \dots - z_n t_n}\, d\mathcal{F}(t_1, \dots, t_n) \qquad /4/$$

є аналітичною функцією принаймні в $n$ -вимірній півплощині

$$S_n = \{Re\, z_k > 0;\ k = 1, \dots, n\} \qquad /5/$$

$n$ - вимірного комплексного простору $C_n$ [2]. Інтеграл /4/ розуміємо у сенсі Радона-Стільт"еса.

**О з н а ч е н н я .** Інтервальним обмежником у $R_n^{0+}$ називаємо довільну функцію, яка на інтервалі $\mathcal{J}_n \in R_n^{0+}$ дорівнює одиниці, а зовні нього - нулю.

Наприклад, інтервальним обмежником у $R_n^{0+}$ є вираз

$$R_n^{0+}(a,b)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k-i\infty}^{c_k+i\infty}\frac{e^{(b_k-t_k+0)z_k}-e^{(a_k-t_k+0)z_k}}{z_k}dz_k=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\begin{Bmatrix}0,\ 0<t_k\le a_k,\ t_k>b_k\\ 1,\ a_k<t_k\le b_k\end{Bmatrix}=\prod_{k=1}^{n}\frac{Sgn(t_k-a_k-0)-Sgn(t_k-b_k-0)}{2},$$

$$(c_k>0;\ k=1,2,\dots,n). \qquad /6/$$

Зворотна формула. Нехай невід"ємний випадковий вектор $\xi$ має зображення /4/ в $n$ -вимірній півплощині /5/ Тоді приріст функції розподілу /3/ вектора $\xi$ на інтервалі /2/ з області /I/ виражається формулою

$$\mathcal{P}(\xi\in\mathcal{I}_n)=\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\cdots\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{(b_k+0)z_k}-e^{(a_k+0)z_k}}{2\pi i z_k}\varphi(z_1,\dots,z_n)dz_1\dots dz_n,$$

де $c_k>0;\ k=1,\dots,n$. Інтеграл /7/ розуміємо у сенсі головного значення Коші.

Доведення. Коли врахувати /4/, то правий бік /7/ можна записати у вигляді $2n$ - кратного інтеграла

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_{c_1-i\tau_1}^{c_1+i\tau_1}\cdots\int_{c_n-i\tau_n}^{c_n+i\tau_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{(b_k+0)z_k}-e^{(a_k+0)z_k}}{2\pi i z_k}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-z_1t_1-\dots-z_nt_n}d\mathcal{F}(t_1\dots t_n)\times$$
$$\times dz_1\dots dz_n,$$

де $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$. Оскільки у виразі /8/ інтеграли відносно $t=(t_1,\dots,t_n)\in R_n^{0+}$ абсолютно збігаються для $z=(z_1,\dots,z_n)$ із $n$ -вимірної півплощини /5/ і, зокрема, на сукупності прямих $\mathcal{Z}_n=\{Re z_k=c_k>0;\ k=1,\dots,n\}$, а відносно $z=(z_1,\dots,z_n)$ межі інтегрування скінченні, то переставимо черговість інтегрування. Дістаємо

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k-i\tau_k}^{c_k+i\tau_k}\frac{e^{(b_k-t_k+0)z_k}-e^{(a_k-t_k+0)z_k}}{z_k}dz_k\right\}d\mathcal{F}(t_1,\dots,t_n). \qquad /9/$$

Границя добутку внутрішніх інтегралів /9/ існує та збігається в /6/. Отже, маємо

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty R_n^{0+}(a,b]\, dF(t_1,\dots,t_n) = \int_{J_n} dF(t) = P(\xi \in J_n) -$$

лівий бік /7/. Зворотна формула /7/ доведена.

Безпосереднім наслідком зворотної формули /7/ є $n$ -вимірна теорема єдиності. Зображення /4/ в $n$ -вимірній півплощині /5/ однозначно визначає свою функцію розподілу $F(t)$ , причому

$$F(t_1,\dots,t_n) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \dots \int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{(t_k+0)z_k} - e^{(a_k-0)z_k}}{z_k} \varphi(z_1\dots z_n)\, dz_1 \dots dz_n, \quad /10/$$

де $a = (a_1,\dots,a_n),\ t_k > 0;\ k = 1,\dots,n.$

Для доведення співвідношення /10/ досить у зворотній формулі /7/ замість $b_k$ прийняти $t_k$ та спрямувати $a_k$ до нуля для всіх $k = 1,\dots,n$.

Формальним посереднім наслідком зворотної формули /7/ є зворотна формула для густини. Якщо невід"ємний випадковий вектор $\xi$ абсолютно неперервний та має густину $f(t_1,\dots,t_n)$, то /4/ набирає вигляду

$$\varphi(z_1,\dots z_n) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-z_1 t_1 - \dots - z_n t_n} f(t_1,\dots,t_n)\, dt_1 \dots dt_n,\ (z_1,\dots z_n) \in S_n \quad /11/$$

і зі співвідношення /10/ дістаємо у точках існування густини

$$f(t_1,\dots,t_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \dots \int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty} e^{t_1 z_1 + \dots + t_n z_n} \varphi(z_1,\dots,z_n)\, dz_1 \dots dz_n . \quad /12/$$

Відзначимо, що формули /11/ і /12/ наявні у праці [2].

Проілюструємо формули /10/ та /12/ прикладами.

Знайти функцію розподілу ймовірностей, відповідну зображенню

$$\varphi(z_1,z_2) = \left(1 + p(e^{-z_1} - 1) + q(e^{-z_2} - 1)\right)^n,\ 0 < p, q < 1,\ p+q < 1;\ n = 1,2,\dots$$

За формулою /10/ запишемо

$$\mathcal{F}(t_1,t_2)=\lim_{a_1\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\frac{e^{(t_1+0)z_1}-e^{(a_1+0)z_1}}{z_1}\left\{\lim_{a_2\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\frac{e^{(t_2+0)z_2}-e^{(a_2+0)z_2}}{z_2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left(1-p-q+pe^{-z_1}\right)+qe^{-z_2}\right)^n dz_2\right\}dz_1 .$$

Оскільки

$$\{\}=\sum_{\ell=0}^{n}C_n^\ell q^\ell\left(1-p-q+pe^{-z_1}\right)^{n-\ell}\lim_{a_2\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\frac{e^{(t_2-\ell+0)z_2}-e^{(a_2-\ell+0)z_2}}{z_2}\,dz_2$$

і при $c>0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{\alpha z}}{z}\,dz=\begin{cases}1, & \alpha>0,\\ 0, & \alpha<0,\end{cases} \qquad /13/$$

то

$$\{\}=\sum_{\ell=0}^{[t_2]}C_n^\ell q^\ell\left(1-p-q+pe^{-z_1}\right)^{n-\ell}=\sum_{\ell=0}^{[t_2]}C_n^\ell q^\ell\sum_{k=0}^{n-\ell}C_{n-\ell}^k p^k e^{-kz_1}(1-p-q)^{n-\ell-k},$$

і отже,

$$\mathcal{F}(t_1,t_2)=\sum_{\ell=0}^{[t_2]}C_n^\ell q^\ell\sum_{k=0}^{n-\ell}C_{n-\ell}^k p^k(1-p-q)^{n-\ell-k}\lim_{a_1\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\frac{e^{(t_1-k+0)z_1}-e^{(a_1-k+0)z_1}}{z_1}\,dz_1 .$$

Звідси, знову враховуючи співвідношення /13/, дістаємо

$$\mathcal{F}(t_1,t_2)=\sum_{k=0}^{[t_1]}\sum_{\ell=0}^{[t_2]}\frac{n!}{k!\,\ell!\,(n-k-\ell)!}p^k q^\ell(1-p-q)^{n-k-\ell},\quad 0\le[t_1]+[t_2]\le n$$

функцію розподілу двовимірного біномного вектора [3].

Знайдемо густину розподілу ймовірностей, відповідну зображенню

$$\varphi(z_1,z_2)=\left(\frac{\alpha\beta(1-r^2)}{(\alpha+(1-r^2)z_1)(\beta+(1-r^2)z_2)-\alpha\beta r^2}\right)^\nu,\ (\alpha>0,\beta>0,\nu>0,\ 0<r<1).$$

За формулою /12/ записуємо

$$f(t_1,t_2)=(\alpha\beta)^{\nu}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\frac{e^{t_1 z_1}}{(\alpha+(1-r^2)z_1)^{\nu}}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty}\frac{e^{t_2 z_2}\,dz_2}{\left(z_2+\frac{\beta}{1-r^2}-\frac{\alpha\beta r^2}{1-r^2}\cdot\frac{1}{\alpha+(1-r^2)z_1}\right)^{\nu}}\right\}dz_1 .$$

Оскільки

$$\{\}=\frac{t_2^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}e^{\left(-\frac{\beta}{1-r^2}+\frac{\alpha\beta r^2}{1-r^2}\frac{1}{\alpha+(1-r^2)z_1}\right)t_2}=\frac{t_2^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}e^{-\frac{\beta t_2}{1-r^2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha\beta r^2}{1-r^2}\right)^{j}}{j!}\frac{1}{\alpha+(1-r^2)z_1}$$

та

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\frac{e^{t_1 z_1}}{\left(z_1+\frac{\alpha}{1-r^2}\right)^{\nu+j}}dz_1=\frac{t_1^{\nu+j-1}}{\Gamma(\nu+j)}e^{-\frac{\alpha t_1}{1-r^2}},$$

то густина

$$f(t_1,t_2)=\frac{(\alpha\beta)^{\nu}(t_1t_2)^{\nu-1}}{(1-r^2)^{\nu}\Gamma(\nu)}e^{-\frac{\alpha t_1+\beta t_2}{1-r^2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha\beta r^2 t_1t_2}{1-r^2}\right)^{j}}{j!\,\Gamma(\nu+j)}=$$

$$=\frac{(\alpha\beta)^{\frac{\nu+1}{2}}}{(1-r^2)r^{\nu-1}\Gamma(\nu)}e^{-\frac{\alpha t_1+\beta t_2}{1-r^2}}(t_1t_2)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(\frac{2r\sqrt{\alpha\beta t_1t_2}}{1-r^2}\right),$$

$$t_1>0,\ t_2>0.$$

Це густина двовимірного гама розподілу [3].

Список літератури: 1. Квіт І.Д. Уточнення зворотної формули для характеристичної функції випадкового вектора. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1971, вип.6, 2. Квіт І.Д. Зображення випадкового вектора. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1972, вип. 7. 3. Mardia K.V. Families of bivariate distributions. L., 1970.

Стаття надійшла до редколегії 26.01.82

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко,

Михайло Д.Мартиненко

# ПРО ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА ДРУГОГО РОДУ

Інтегральні рівняння виду

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = f(x) \qquad /1/$$

називатимемо рівняннями Вольтерра П-го роду, якщо $a$ -скінчене, і рівняннями типу Вольтерра П-го роду, коли $a$ - безмежне. Ця класифікація рівнянь /1/ не є загальноприйнятою [2]. Однак вона доцільна в зв"язку з тим, що при занадто загальних умовах ряди послідовних наближень для /1/ у випадку $|a| < +\infty$ збігаються при будь-яких значеннях параметра $\lambda$. Якщо ж $a = -\infty$, то цей факт не підтверджується. Зокрема, мають місце такі теореми.

Теорема 1. Якщо $f(x)$, $K(x,t)$ - обмежені та неперервні при $x,t \in ]-\infty, A]$ функції / $A = const$ /, причому

$$|K(x,t)| \leqslant M \exp\{-\alpha^2 (x-t)\} \qquad /2/$$

( $\alpha^2 = const$ ), то для $a = -\infty$ ряд послідовних наближень для рівняння /1/ збігається і /1/ розв"язальне в класі неперервних функцій при

$$|\alpha| < \frac{\alpha^2}{M}. \qquad /3/$$

Теорема 2. Якщо $f(x)$ і $K(x,t)$ обмежені та неперервні при $x,t \in ]-\infty, A] (A = const)$, причому

$$|K(x,t)| \leqslant \frac{M}{(1+x^2)(1+t^2)}, \qquad /4/$$

то при $a = -\infty$ ряд послідовних наближень для /1/ і, отже, рів-



13-3132

няння /I/ розв"язальне в класі неперервних функцій при

$$|\lambda| < \frac{2}{(1+\pi)M}. \qquad /5/$$

Доведення цих теорем проводиться як і у праці [3] для рівнянь Вольтерра за допомогою оцінки ітерованих ядер і загального члена ряду послідовних наближень.

Теореми I, 2 допускають очевидні узагальнення на різні класи функцій $f(x)$. Вони показують, що на межі області комплексної $\lambda$ - площини, яка визначається нерівностями /3/ та /5/, знаходиться хоча б один полюс резольвенти відповідного інтегрального рівняння [3] і тому фігуруючий в /I/ інтегральний оператор не є вольтеровим у розумінні визначення, даного у праці [I], і його не можна одержати як границю /за рівномірною метрикою/ послідовності вольтерових операторів.

Список літератури: I. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 2. Забрейко П.П. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 3. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959.

Стаття надійшла до редколегії 04.09.82

УДК 517.5

М.М.Сумовский

## ПРО КОЛИВНІ УТОЧНЕНІ ПОРЯДКИ

Нехай $\ell$ - неперервно диференційована додатна функція на $[0,\infty]$ така, що $\ell'(r) r \ln r \to 0$ при $r \to \infty$. Тоді називатимемо її коливним уточненим порядком /у праці [2] вжито термін "загальний уточнений порядок"/. Якщо існує границя $\lim_{r\to\infty} \ell(r) = \rho < \infty$, то $\ell(r)$ називають уточненим порядком. Нехай $\alpha$ - невід"ємна неспадна на $[0,\infty)$ функція. Коли $\ell$ - коливний уточнений порядок такий, що то $\ell$ називають коливним уточненим порядком для $\alpha$ .

У теорії мероморфних функцій важливу роль відіграє така теорема: якщо $\alpha$ має скінченний порядок $\rho$ , то для неї існує уточнений порядок $\rho(r)$ такий, що $\rho(r)\to\rho$ при $r\to\infty$ [1]. Природно постає питання: якщо $\alpha$ має скінченний порядок $\rho$ та нижній порядок $\lambda<\rho$ , чи існує для неї коливний уточнений порядок $\ell$ такий, що

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\ell(r)=\rho,\quad \underline{\lim_{r\to\infty}}\,\ell(r)=\lambda.$$

Негативну відповідь на це питання дає наступна теорема.

Т е о р е м а . Нехай $0<\lambda<\rho<\infty$ існує невід'ємна неспадна на $[0,\infty)$ функція $\alpha$ , опукла відносно логарифма, порядку $\rho$ та нижнього порядку $\lambda,\ 0<\lambda<\rho<\infty$ така, що довільний коливний уточнений порядок для $\alpha$ є уточненим порядком.

Д о в е д е н н я . Нехай

$$\delta=(\rho+\lambda)/2,\ \varepsilon=(\rho-\lambda)/2,\ 0<a<((\delta/\varepsilon)^2-1)^{1/2}$$

$$d(x)=\varepsilon\sin(a\ln_2 x)+\delta \text{ при } x\geq x_0\geq e,\ d(x)=d(x_0)$$

при $0\leq x\leq x_0$, $\alpha(x)=x^{d(x)}$.

Простий підрахунок дає при $x>x_0$

$$\alpha'(x)\geq x^{d(x)-1}(\delta-\varepsilon\sqrt{1+a^2})>0,$$

$$\frac{d^2\alpha(x)}{(d\ln x)^2}=\alpha(x)\{(d(x)+x\ln x\, d'(x))^2+$$

$$+x d'(x)(2+\ln x)+x^2 d''(x)\ln x\}>0$$

при досить великому $x_0$ , з огляду на те, що

$$d(x)+x\ln x\,d'(x)>\delta-\varepsilon\sqrt{1+a^2},\ a\ \ x d'(x)(2+\ln x)+x^2d''(x)\ln x\to 0.$$

Отже, функція $\alpha$ неспадна та опукла відносно логарифма.

Припустимо, що $\ell(r)$ – коливний уточнений порядок для $\alpha$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, \ell(r)=\rho, \quad \underline{\lim_{r\to\infty}}\, \ell(r)=\beta, \quad \beta<\rho.$$

Очевидно, що $\beta\ge\lambda$. Позначимо

$$\Delta_n = \exp\exp\{\tilde{a}^{-1}(\pi/2+2\pi n)\}.$$

Тоді $d(\Delta_n)=\rho$ із /I/ випливає, що $\ell(\Delta_n)=\rho+o(1)$ при $n\to\infty$. Нехай $\beta<\gamma<\rho$ та $(t_k)$ – деяка послідовність, що прямує до $+\infty$ така, що $\ell(t_k)=\gamma$. Нехай $\Delta_{n_k}<t_k<\Delta_{n_k+1}$. За теоремою Лагранжа про скінченні прирости існує $r_k\in(\Delta_{n_k}, t_k)$ таке, що

$$\ell(t_k)-\ell(\Delta_{n_k})=\ell'(r_k)r_k\ln r_k(\ln_2 t_k-\ln_2\Delta_{n_k}).$$

Оскільки $0<\ln_2 t_k-\ln_2\Delta_{n_k}<\ln_2\Delta_{n_k+1}-\ln_2\Delta_{n_k}=2\pi/d,$

то

$$|\ell'(r_k)r_k\ln r_k|\ge a(\rho-\gamma+o(1))/2\pi, \quad k\to\infty.$$

Отже, $\ell'(r)r\ln r$ не прямує до $0$ при $r\to\infty$. Одержана суперечність доводить теорему.

Н а с л і д о к . Нехай $0<\lambda<\rho<\infty$. Існує ціла функція $f$ порядку $\rho$ та нижнього порядку $\lambda$ з невід"ємними тейлорівськими коефіцієнтами така, що довільний коливний уточнений порядок для $T(r,f)$ або для $\ln M(r,f)$ є уточненим порядком.

Дійсно, за теоремою Клуні [3], існує ціла функція з невід"ємними тейлорівськими коефіцієнтами така, що

$$T(r,f)\sim\ln M(r,f)\sim\alpha(r)$$

при $r\to\infty$, де $\alpha$ –функція, вказана при доведенні теореми, оскільки вона є неспадною та опуклою відносно логарифма.

З а у в а ж е н н я . Дещо ускладнивши побудову $\alpha$, можна зняти в теоремі та у наслідку вимогу $\lambda>0$.

Автор висловлює глибоку подяку А.А.Гольдбергу за керівництво роботою.

Список літератури: I. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. 2. Valiron J. Lectures on the general theory of integral functions. Toulouse Ed. Privat, 1923. 3. Clunie J. On integral functions having prescribed growth. – Canad. J. Math., 1965, 17, N3

Стаття надійшла до редколегії 5.03.82

УДК 512.553

О.Л.Горбачук

## $S$ – КРУЧЕННЯ І ПІВДОСКОНАЛІ КІЛЬЦЯ

Всі кільця, які розглядаємо, асоціативні з одиницею, модулі праві й унітарні. Означення та факти, пов"язані з крученням, наведені у праці [2]. Кільце називають нерозкладним, коли воно не розкладається у пряму суму двох кілець, а це означає, що в кільці всі центральні ідемпотенти тривіальні. Кільце назвемо правим дуо-кільцем, коли всі праві ідеали двосторонні. Кручення $r$ – називають розщеплюваним, коли для довільного модуля $M$ підмодуль $r(M)$ виділяється прямим доданком.

Для кожного правого ідеалу $S$ кільця $R$ позначимо через $\mathcal{E}_S = \{ J \in R,\ J$ – правий ідеал і $J+S=R \}$.

Л е м а . Якщо $R$ –дуо-кільце, то система ідеалів $\mathcal{E}_S$ утворює радикальний фільтр.

Доведення проводять безпосередньою перевіркою умов радикального фільтру, беручи $1 = i + s$, де $i \in J,\ s \in S$.

Зауважимо, що, взагалі кажучи, така конструкція не переноситься на некомутативні кільця, якщо навіть взяти $S$ – двосторонній ідеал. Кручення, яке відповідає радикальному фільтру $\mathcal{E}_S$, називається $S$ -крученням.

Т е о р е м а 1. Наступні умови для нерозкладного дуо-кільця $R$ еквівалентні:

1/ всі $S$ -кручення над кільцем $R$ розщеплюються;

2/ всі $S$ -кручення над кільцем $R$ тривіальні;

3/ кільце $R$ -локальне.

Д о в е д е н н я . Імплікації 3/$\Rightarrow$ 2/$\Rightarrow$ 1/ очевидні. Покажемо, що з 1/ випливає 2/. Радикальний фільтр $\mathcal{E}_S$ має базу з головних ідеалів, тому до цього $S$ -кручення можна застосувати теорему 1 праці [1] при умові, що для доведення теореми достатньо вимагати двосторонності ідеалів замість породження їх центральними елементами. Оскільки кільце нерозкладне за умовою, то $S$ -кручення тривіальне. Для доведення імплікації 2/$\Rightarrow$ 3/ покажемо, що в $R$ міститься один тільки максимальний ідеал. Візьмемо максимальний правий ідеал $J$ і нехай $S$ - довільний правий ідеал /в кільці всі праві ідеали двосторонні/, який не збігається з кільцем. Покажемо, що $S \subset J$ . Розглянемо $S$ -кручення. За умовою воно тривіальне, тобто $\mathcal{E}_S = \{R\}$ . Оскільки $J$ - максимальний і $J \notin \mathcal{E}_S$ , то $J + S \neq R$ , звідси $S \subseteq J$ .

Т е о р е м а 2. Над дуо-кільцем всі $S$ -кручення розщеплюються тоді і тільки тоді, коли кільце скінченна пряма сума локальних кілець.

Д о в е д е н н я . Нехай над дуо-кільцем $R$ всі $S$ -кручення розщеплюються. Покажемо, що кільце $R$ - скінченна пряма сума нерозкладених кілець. Припустимо, що це не так, тоді існує безмежна множина центральних ортогональних ідемпотентів $e_1$ , $e_2$ , ... , $e_n$ , ..., Розглянемо ідеал $S = e_1 R \oplus \ldots \oplus e_n R \oplus \ldots$ /пряма сума/. $S$ -кручення тоді не тривіальне, тому що $\{0\} \notin \mathcal{E}_S$ /завжди можна вважати, що $S \neq R$ /. Використовуючи теорему 1 праці [1] у зміненому формулюванні, одержуємо, що $S$ -кручення радикально-півпросте. Нехай $J_0$ - найменший ідеал радикального фільтру так, що $R = S + J_0$ . Для кожного $i$, $e_i J_0 = 0$ , тому що в іншому разі $J_0 = e_i J_0 \oplus (1-e_i) J_0$ і $(1-e_i) J_0 \in \mathcal{E}_s$, оскільки $J_0 \in \mathcal{E}_s$ і $e_i J_0 \subset S$. З умови мінімальності $J_0$ випливає, що $J_0 = (1-e_i) J_0$, а звідси $e_i J_0 = 0$. З розкладу $1 = s_1 + i_0$ і з рівності $e_i J_0 = 0$ маємо, $s_1 e_i = e_i s_1 = s_1$. Таким чином, в ідеалі $S$ міститься одиниця кільця $R$, що протирічить вибору $S$. Одержане протиріччя встановлює, що кільце $R$ є скінченною прямою сумою нерозкладних кілець. Дальше переходимо до прямих доданків /див. [I], лема I/, використовуючи теорему I, одержуємо, що кільце – це скінченна пряма сума . кальних кілець.

У другий бік проводимо доведення, переходячи до прямих доданків з використанням теореми I.

Безпосередньо з теореми I і 2 випливає такий наслідок.

Наслідок. Над дуо-кільцем всі $S$-кручення тривіальні тоді і тільки тоді, коли кільце – локальне.

Список літератури: I. Горбачук Е.Л. Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы. – Математические исследования, 1972, т.7, № 3. 2. Мишина А.П., Скорняков Л.А. Абелевы группы и модули. – М.: Наука, 1969.

Стаття надійшла до редколегії 09.02.82

З М І С Т

П р и т у л а Я.Г., Я ц и м і р с ь к и й М.М. Оцінки наближень $B^2$ майже періодичних функцій....... 3

М и к и т ю к Я.В. Спектральні властивості одного еліптичного оператора........................ 8

Ш е р е м е т а М.М. Раціональна апроксимація цілих функцій швидкого зростання.................. 10

С к а с к і в О.Б. Про ріст цілої функції, яка задовольняє диференціальне рівняння $n$ -го порядку з експоненціальними коефіцієнтами та зображається рядом Діріхле............................................ 13

В а с и л ь к і в Я.В. Деякі властивості $\delta$ - субгармонічних функцій скінченного $\nu$ -типу............ 14

К о н д р а т ю к А.А. Лінійні комбінації мероморфних функцій цілком регулярного зростання......... 21

Б у р д а Р.М., Х л є б н і к о в Д.Г. Визначення зусилля герметизації для ущільнюючого елемента у вигляді круглої пластинки середньої товщини........... 25

Д і д и к Д.З., К о р д у б а Б.М. Температурні напруження у напівбезмежній циліндричній оболонці при кусково-сталому коефіцієнті тепловіддачі.......... 29

К о м а р н и ц ь к и й М.Я., А р т е м о в и ч О.Д. Про ідеально-диференціальні кільця......... 35

Д е н и с к о С.Б. Про деякі відтворення пар плоских кривих за допомогою механізмів.............. 41

К о с т е н к о К.С. Асимптотична поведінка розв"язків лінійних звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку...................................... 44

К о с т е н к о В.Г., К о р к у н а М.Д. Розв"язування плоскої крайової задачі для системи рівнянь термопружності........................................ 46

Ц и м б а л В.М. Змішана сингулярно збурена задача для інтегродиференціального гіперболічного рівняння.............................................. 50

Цимбал В.М. Оцінки розв"язку задачі Коші для сингулярно збуреного гіперболічного рівняння..... 54

Кирилич В.М. Некласична задача з інтегральними обмеженнями для двовимірної гіперболічної системи першого порядку........ 60

Лавренюк С.П. Існування узагальненого розв"язку однієї змішаної задачі для рівняння четвертого порядку........ 64

Івахненко Л.Я., Лавренюк С.П. Існування узагальненого розв"язку однієї змішаної задачі для рівняння типу коливання пластинки .......... 68

Мельник Т.О. Задача з невідомою границею для гіперболо-параболічного рівняння........ 74

Колодій І.М., Баб"ячок Л.І. Нерівність Харнака для невід"ємних обмежених узагальнених розв"язків квазілінійних параболічних рівнянь дивергентного виду з виродженням........ 78

Лісевич Л.М., Блавацька Л.І. Існування майже періодичного розв"язку квазілінійної системи звичайних диференціальних рівнянь з правою $S^p$ - майже періодичною частиною........ 83

Ковальчук Б.В., Фаріон З.Д. Достатні умови абсолютної збіжності рядів Фур"є деяких класів $S^p$ - майже періодичних матриць....... 87

Квіт І.Д., Косарчин В.М. Зворотна формула для зображення випадкового вектора........ 92

Мартиненко Марія, Мартиненко Михайло Д. Про інтегральні рівняння типу Вольтерра другого роду........ 97

Сумовський М.М. Про колині уточнені порядки........ 98

Горбачук О.Л. $S$ - кручення і півдосконалі кільця........ 101

УДК 517.512

Оценки приближений $B^2$ почти периодических функций. Притула Я.Г., Ядчимирский М.М. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 3–7 /на укр. яз./.

Для $B^2$ почти периодических функций, показатели Фурье которых имеют единственную точку сгущения в бесконечности, получены оценки наилучших приближений, а также оценки приближений полиномами Фейера. В частности, доказано неравенство

$$E_{\lambda_n}(f) \le 2^{-1/2}\left(\frac{\lambda_n}{2}\int_0^{\pi/\lambda_n}\omega^2(t,f)\sin\lambda_n t\,dt\right)^{1/2},$$

где $E_{\lambda_n}(f)$ – наилучшее приближение функции в метрике пространства $B^2$, $\omega(t,f)$ – квадратичный модуль непрерывности. Библиогр.: 4 назв.

УДК 513.88

Спектральные свойства одного эллиптического оператора. Микитюк Я.В. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 8–10 /на укр. яз./.

Рассмотрен некоторый класс дифференциальных операторов в частных производных во всем пространстве с краевым условием на некоторой гиперплоскости. При определенных условиях устанавливается подобие рассматриваемых операторов. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.535.4

Рациональная аппроксимация целых функций быстрого роста. Шеремета М.Н. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 10–12 /на укр. яз./.

Пусть $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $a_0=1$, $a_k\ge 0\ (k\ge 1)$ – целая трансцендентная функция, $\Pi_n$ – класс алгебраических многочленов степени $\le n$, а $\lambda_n(f)=\inf\{\|1/f-1/p\|_{[0,\infty)} : p\in\Pi_n\}$. Если $x(\ln\ln f(x))'\ge 1\ (x\ge a>0)$, то для каждого $\alpha\in(0,\infty)$ существует последовательность $(n_j)$ такая, что $\lambda_n(f)>\left(\frac{\alpha}{4e}\right)^{n+1} f^{-2}(e^{-1}f^{*}(e^{n}))$, $n=n_j$, где $f^{*}$ – функция, обратная к $f$. Библиогр : 3 назв.

УДК 517.925.7

О росте целой функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению $n$-го порядка с экспоненциальными коэффициентами и представляющейся рядом Дирихле. С к а с к и в О.Б. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 13-14 /на укр. яз./.

Приводится одна теорема, указывающая на асимптотику представимого в виде ряда Дирихле целого решения $F(z)$ дифференциального уравнения $n$-го порядка с коэффициентами в виде экспоненциальных полиномов. Утверждается, что $h \leq \lambda_R = \rho_R \leq \lambda$, где $\rho_R$ и $\lambda_R$, соответственно, порядок и нижний порядок по Ритту функции $F(z)$, а положительные числа $h$ и $\lambda$ полностью определяются видом исходного уравнения. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.574

Некоторые свойства $\delta$-субгармонических функций конечного $\lambda$-типа. В а с и л ь к и в Я.В. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 14-20 /на укр. яз./.

Даются критерии, характеризующие: 1/ распределение масс ассоциированных по Риcу с субгармонической в $C$ функцией конечного $\lambda$-типа; 2/ положительную /отрицательную/ вариацию распределения масс, ассоциированных по Рису с $\delta$-субгармонической в $C$ функцией конечного $\lambda$-типа, а также изучен вопрос о существовании $\delta$-субгармонической в $C$ функции с заданной последовательностью коэффициентов Фурье. Кроме того, показано, что класс $\Lambda_\delta$ $\delta$-субгармонических в $C$ функций конечного $\lambda$-типа порожден подклассом $\Lambda_s \subset \Lambda_\delta$ субгармонических в $C$ функций конечного $\lambda$-типа / $\Lambda_\delta = \Lambda_s - \Lambda_s$ /. Библиогр.: 10 назв.

УДК 517.535.4

Линейные комбинации мероморфных функций вполне регулярного роста. Кондратюк А.А. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 2I. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 2I-25 /на укр.яз./.

Произведение и частное двух функций из класса $\Lambda^0$ мероморфных функций вполне регулярного роста принадлежит этому классу. Линейная комбинация, вообще говоря, - нет. Доказана теорема: если $f, g \in \Lambda^0$ и число $-a$ не является валироновским дефектным значением функции $f/g$, то функция $f+ag$ принадлежит $\Lambda^0$ и ее индикатор $h(\theta, f+ag)$ равен $\max\{h(\theta,f), h(\theta,g)\}$. Библиогр.: II назв.

УДК 539.3

Определение усилия герметизации для уплотнительного элемента в виде круглой пластинки средней толщины. Бурда Р.М., Хлебников Д.Г. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 2I. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 25-29 /на укр.яз./.

В рамках теории Э.Рейсснера дано точное решение задачи о контакте круглой пластинки с жесткой опорой, имеющей в плане форму окружности, при заданных отклонениях опоры от плоской формы. Получены простые расчетные формулы для определения усилия герметизации в уплотнительных соединениях. Ил. 2. Библиогр.: 2 назв.

УДК 539.377

Температурные напряжения в полубесконечной цилиндрической оболочке при кусочно-постоянном коэффициенте теплоотдачи. Д и д ы к В.З., К о р д у б а Б.М. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 29-34 /на укр. яз./.

Определены температурные напряжения в свободно опертой и теплоизолированной по краю полубесконечной круговой цилиндрической оболочке, которая нагревается по кольцевой области внутренними источниками тепла или внешней средой. Коэффициент теплоотдачи с боковых поверхностей оболочки является кусочно-постоянной функцией координаты. Библиогр.: 2 назв.

УДК 512.512

Об идеально-дифференциальных кольцах. К о м а р н и ц к и й Н.Я., А р т е м о в и ч О.Д. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 35-40 /на укр. яз./.

Вводятся и изучаются кольца, каждый левый идеал которых замкнут относительно некоторых классов дифференцирований. Описаны кольца простой характеристики, не имеющие нетривиальных дифференцирований.

УДК 531.8

О некоторых воспроизведениях пар плоских кривых с помощью механизмов. Д е н и с к о С.В. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат, вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 41-44 /на укр.яз./.

Рассматриваются механизмы, которые воспроизводят пары плоских кривых /пару спутниц циссоид Диоклеса, пару кривых, сопутствующих циссоидам Диоклеса, пару прямых строфоид/. Между точками кривых каждой пары устанавливается соответствие: соответственными точками считаются точки, которые воспроизводятся механизмом в один и тот же момент времени. В каждом из трех случаев получены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы отношение длин соответствующих дуг было величиной постоянной. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.913

Асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. К о с т е н к о К.С.- Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат. вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 44-46 /на укр. яз./.

При определенных условиях найдены асимптотические представления фундаментальной системы решений и их производных до третьего порядка включительно линейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка при $x \to \infty$. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.956.2

Решение плоской краевой задачи для системы уравнений термоупругости. К о с т е н к о В.Г., К о р к у н а М.Д. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 46-50 /на укр. яз./.

Численным методом Боголюбова-Крылова в двусвязной области решается система интегральных уравнений, которая с помощью методики Я.Б.Лопатинского получена из системы уравнений термоупругости. Табл. 1. Ил. 1. Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.946

Смешанная сингулярно возмущенная задача для интегродифференциального гиперболического уравнения. Ц ы м б а л В.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 50-54 /на укр. яз./.

Методом погранслоя получено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка с вольтерровой добавкой. Библиогр.: 12 назв.

УДК 517.946

Оценки решения задачи Коши для сингулярно возмущенного гиперболического уравнения. Ц ы м б а л В.Н. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 54–59 /на укр. яз./.

Даются оценки остаточного члена асимптотического разложения решения задачи Коши для сингулярно возмущенного гиперболического уравнения второго порядка. Библиогр.: 8 назв.

УДК 517.946

Неклассическая задача с интегральными ограничениями для двумерной гиперболической системы первого порядка. К и р и л и ч В.М. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 60–64 /на укр. яз./.

Пусть $T$ -криволинейный сектор в полуплоскости $t>0$ плоскости $xOt$, ограниченный гладкими кривыми $\ell_1$ и $\ell_2$, которые задаются соответственно уравнениями $x=a(t)$ и $x=b(t)$ $(a(0)=b(0)=0, a(t)<b(t)$ для $t>0)$. В $T$ рассматривается гиперболическая система первого порядка, для которой задаются интегральные ограничения $\int_{a(t)}^{b(t)} \sum_{i=1}^{n} r_{si}(\xi,t)\, u_i(\xi,t)\,d\xi = h_s(t)$ $(s=1,\ldots,n)$.
Установлены условия корректной разрешимости задачи. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.946

Существование обобщенного решения одной смешанной задачи для уравнения четвертого порядка. Л а в р е н ю к С.П. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 64–68 /на укр. яз./.

Доказано существование обобщенного решения задачи

$$u_{tt}+b(x,t)u_t+\sum_{|\alpha|\le 2}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(a_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u)=f(x,t),$$

$$u\Big|_{\Gamma}=0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=0,\quad u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x),$$

в области $Q=D\times\mathbb{R}_+$, где $D$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, а $\mathbb{R}_+=\{0<t<+\infty\}$, обладающего следующим свойством функция

$$V(t)=\int_D\Big(\sum_{|\alpha|\le 2}a_{\alpha}(x,t)|D^{\alpha}u|^2+u_t^2\Big)dx$$

непрерывна при $t\in\mathbb{R}_+$ вдоль решения. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.946

Существование обобщенного решения одной смешанной задачи для уравнения типа колебания пластинки. И в а х н е н к о Л.Я., Л а в р е н ю к С.П. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 68–73 /на укр. яз./.

Доказано существование обобщенного решения задачи

$$\Delta^2 u + a\Delta u + cu + u_{tt} = f(x,t,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},\ldots,u_{x_i x_j},\ldots,u_t),$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x),\quad u\big|_S = 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\Big|_S = 0,$$

в области $Q = \{(x,t) : x \in R^n,\ 0 < x_i < 1;\ 0 < t < +\infty\}$. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.946

Задача с неизвестной границей для гиперболо-параболического уравнения. М е л ь н и к Т.Е. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 74–77 /на укр. яз./.

Прямоугольник $\{-1 < x < 1;\ 0 < t < T\}$ неизвестной линией $\gamma$ разделен на две компоненты $G_1$ и $G_2$. Доказано существование решений гиперболического уравнения в $G_1$ и параболического уравнения в $G_2$, которые удовлетворяют начальным и граничным условиям на нижней и боковых сторонах прямоугольника и некоторым условиям на неизвестной линии. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.196

Неравенство Харнака для ограниченных неотрицательных обобщенных решений квазилинейных параболических уравнений с вырождением. Колодий И.М., Бабячок Д.И. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 78-83 /на укр. яз./.

Доказано неравенство Харнака для ограниченных обобщенных решений квазилинейных параболических уравнений дивергентного вида с вырождением. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.917

Существование почти периодического решения квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с правой $S^p$ - почти периодической частью. Лисевич Л.Н., Блавацкая Л.И.- Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 83-87 /на укр. яз./.

Исследуются достаточные условия существования почти периодического решения квазилинейной системы дифференциальных уравнений с $S^p$ - почти периодической правой частью. Исследование представляет собой некоторое обобщение известной теоремы Боля для периодической системы на случай $S^p$ - почти периодической системы. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.512.2

Достаточные условия абсолютной сходимости некоторых классов $S^p$ -почти периодических матриц. Ковальчук Б.В., Фарион З.Д. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 87-91 /на укр. яз./.

Найдены достаточные условия абсолютной сходимости рядов Фурье $S^p$ -почти периодических матриц, спектры которых имеют определенные свойства разреженности. Библиогр.: 3 назв.

УДК 519.21

Формула обращения для изображения случайного вектора. Квит И.Д., Косарчин В.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 92-96 /на укр. яз./.

На основании определения интервального ограничителя выведена формула обращения для изображения неотрицательного случайного вектора. Из нее же получены многомерная теорема единственности и формула для многомерной плотности вероятности. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.944:947

Об интегральных уравнениях типа Вольтерра второго рода. Мартыненко Мария Д., Мартыненко Михаил Д. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 97-98 /на укр. яз./.

При определенных условиях, налагаемых на функцию $K(x,t)$ и величину параметра $\lambda$, доказаны две теоремы о разрешимости интегральных уравнений вида

$$u(x)-\lambda\int_{-\infty}^{x} K(x,t)u(t)dt = f(x).$$

Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.5

О колеблющихся уточненных порядках. С у м о в с к и й Н.М. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат. вып. 21. Вопросы математического анализа и его приложение. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 98-101 /на укр. яз./.

Построена целая функция $f$ порядка $\rho$ и нижнего порядка $\lambda$ с неотрицательными тейлоровскими коэффициентами такая, что произвольный колеблющийся уточненный порядок для $T(r,f)$ или для $\ln M(r,f)$ есть уточненным порядком. Библиогр.: 3 назв.

УДК 512.553

$S$ - кручения и полусовершенные кольца. Г о р б а ч у к Е.Л.- Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.21. Вопросы математического анализа и его приложение. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983, с. 101-103 /на укр. яз./.

Описываются дуо-кольца, над которыми все $S$ -кручения расщепляемы, где $S$ -идеал, а $S$ - кручение строится по этому идеалу. Библиогр.: 2 назв.

Вестник Львовского университета

Серия механико-математическая

Выпуск 2I

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

Львов
Издательство при Львовском государственном
университете
издательского объединения "Выща школа"
/290000, Львов, ул. Университетская, I/

/На украинском языке/

Редактор В.В.В о й т о в и ч
Технічний редактор С.В.К о п о т ю к
Коректор Е.Г.Л о г в и н е н к о

Н/К

Підп. до друку 27.0I.83 . БГ 02407 .
Формат 60x84 I/I6. Папір друк. № 3. Офс. друк. Ум. друк. арк.6,97
Обл.-вид. арк. 5,75 . Тираж 600 прим. Вид. № II07
Зам. № 3I32 . Ціна 80 к. Замовне

Видавництво при Львівському державному університеті
видавничого об"єднання "Вища школа", 290000, Львів,
вул. Університетська, I.

Львівська обласна книжкова друкарня, 290000, Львів,
вул. Стефаника, II.

80 коп.

Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1983, вип. 21. 1—120.