УДК 519.6

Ю.М.Щербина, Б.М.Голуб

# ЗБІЖНІСТЬ ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ З ПАМ"ЯТТЮ ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Розглянемо задачу

$$f(x) \to \min, \quad x \in E^n, \qquad /1/$$

де $E^n$ - $n$ - мірний евклідів простір.

Для розв"язування задачі /1/ дослідимо ітераційний метод з пам"яттю [1, 2]

$$x_{n+1} = x_n - [f''(\bar{x}_n)]^{-1} f'(x_n), \qquad /2/$$

$$\bar{x}_n = \begin{cases} x_0, & \text{якщо } n=0, \\ x_n - \frac{1}{2}[f''(\bar{x}_{n-1})]^{-1} f'(x_n), & \text{якщо } n=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Порядок збіжності цього методу дорівнює $1+\sqrt{2} \approx 2,41$ ; тоді як збільшення кількості арифметичних операцій на кожній ітерації порівняно з методом Ньютона незначне [5].

Достатні умови збіжності методу дає наступна теорема.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ сильно випукла на $E^n$, $f \in C^3$ і, крім того,

$$\|f'''(x)\| \le R,$$
$$\|f'''(x) - f'''(y)\| \le L\|x-y\|,$$
$$x, y \in E^n, \quad R = const > 0, \quad L = const > 0.$$

Нехай початкове наближення $x_0$ вибране таким, що

$$\ell \|f'(x_0)\| \le mq, \qquad /3/$$

де $\frac{m}{\ell} = \varkappa > 0$ – константа сильної випуклості; $q$ – деяка константа, $0 < q < 1$; $\ell^2 = \frac{R^2}{m^2} + \frac{2}{3}\frac{L}{m}$.

Тоді існує послідовність $\{x_n\}$, визначена умовами /1/, яка збігається до єдиної точки $x_*$ мінімуму функції $f(x)$ на $E^n$, причому вірна оцінка

$$\| x_k - x_* \| \leq \ell^{-1} q^{D_k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad /4/$$

де $D_0 = 1$; $D_1 = 2$; $D_j = 2D_{j-1} + D_{j-2}$; $j = 2, 3, 4, \ldots$

Доведення. Існування і єдиність точки $x_*$ випливає з властивостей сильно випуклих функцій [3]. Доведемо оцінку /4/. Оскільки $f(x)$ – сильно випукла, то

$$\langle f''(x)y, y \rangle \geq m \|y\|^2.$$

Звідси [3]

$$\| [f''(x)]^{-1} \| \leq \frac{1}{m}, \quad x \in E^n. \qquad /5/$$

Введемо числові послідовності

$$a_k = \| f'(x_k) \|, \quad b_{k+1} = \| \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k \|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Покажемо, що

$$a_k \leq \frac{m}{\ell} q^{D_k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad /6/$$

а також

$$b_k \leq \frac{2}{m} a_{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad /7/$$

При $k = 0$ нерівність /6/ випливає із умови /3/.

Доведемо нерівність /6/, /7/ при $k = 1$. Із /2/ запишемо

$$f'(x_1) = f'(x_1) - f'(x_0) - f''(\bar{x}_0)(x_1 - x_0). \qquad /8/$$

Розкладаючи у правій частині формули /8/ $f'(x_1)$ за формулою Тейлора [4], дістаємо

$$f'(x_1) = f'(x_0) + f''(x_0)(x_1 - x_0) +$$

$$+\int_0^1 (1-t) f'''(x_0+t(x_1-x_0))(x_1-x_0)^2 dt -$$
$$- f'(x_0) - f''(\bar{x}_0)(x_1-x_0). \qquad /9/$$

Використовуючи умови теореми і те, що $\bar{x}_0 = x_0$, з /9/ записуємо

$$\| f'(x_1)\| \le \frac{R}{2}\| x_1 - x_0\|^2,$$

звідки

$$a_1 = \| f'(x_1)\| \le \frac{m}{\ell} q^2 = \frac{m}{\ell} q^{D_1}.$$

Далі

$$b_1 = \|\bar{x}_1 - \bar{x}_0\| = \|\bar{x}_1 - x_0\| \le \frac{2}{m} a_0.$$

Нехай нерівності /6/, /7/ є правильними при деякому $K \geq 2$.

Із умови /2/ маємо

$$f'(x_{k+1}) = f'(x_{k+1}) - f'(x_k) - f''(\bar{x}_k)(x_{k+1} - x_k). \qquad /10/$$

Розкладемо $f'(x_{k+1})$ за формулою Тейлора[4]:

$$f'(x_{k+1}) = f'(x_k) + f''(x_k)(x_{k+1} - x_k) +$$
$$+\int_0^1 (1-t) f'''(x_k + t(x_{k+1} - x_k))(x_{k+1}-x_k)^2 dt +$$
$$+ \frac{1}{2} f'''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2 - \frac{1}{2} f'''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2 =$$
$$= f'(x_k) + f''(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2} f'''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2 +$$
$$+ \int_0^1 (1-t)[f'''(x_k + t(x_{k+1} - x_k)) - f'''(x_k)](x_{k+1} - x_k)^2 dt.$$

Підставляючи отриманий розклад у праву частину формули /10/ і ще раз скориставшись формулою Тейлора, записуємо

$$f'(x_{k+1}) = f''(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2} f'''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2 + \dot{J}_{1,k} -$$
$$- f''(x_k)(x_{k+1} - x_k) - f'''(x_k)(\bar{x}_k - x_k)(x_{k+1} - x_k) - \dot{J}_{2,k},$$

де $\dot{J}_{1,k}=\int_0^1(1-t)[f'''(x_k+t(x_{k+1}-x_k))-f'''(x_k)](x_{k+1}-x_k)^2dt;$

$$\dot{J}_{2,k}=\int_0^1[f'''(x_k+t(\bar{x}_k-x_k))-f'''(x_k)](\bar{x}_k-x_k)(x_{k+1}-x_k)dt.$$

Тоді з /2/ маємо

$$f'(x_{k+1})=-\frac{1}{2}f'''(x_k)[f''(\bar{x}_k)]^{-1}f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)+$$
$$+\frac{1}{2}f'''(x_k)[f''(\bar{x}_{k-1})]^{-1}f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)+\dot{J}_{1,k}-\dot{J}_{2,k}.$$

Далі

$$f'(x_{k+1})=\frac{1}{2}f'''(x_k)\{[f''(\bar{x}_{k-1})]^{-1}-[f''(\bar{x}_k)]^{-1}\}f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)+$$
$$+\dot{J}_{1,k}-\dot{J}_{2,k}=\frac{1}{2}f'''(x_k)[f''(\bar{x}_{k-1})]^{-1}\{f''(\bar{x}_k)-f''(\bar{x}_{k-1})\}\times$$
$$\times[f''(\bar{x}_k)]^{-1}f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)+\dot{J}_{1,k}-\dot{J}_{2,k}=$$
$$=\frac{1}{2}f'''(x_k)[f''(\bar{x}_{k-1})]^{-1}\{f''(\bar{x}_k)-f''(\bar{x}_{k-1})\}\times$$
$$\times(x_{k+1}-x_k)^2+\dot{J}_{1,k}-\dot{J}_{2,k}.$$

Оцінимо, враховуючи /7/.

$$a_{k+1}=\|f'(x_{k+1})\|\le\frac{1}{2}R\frac{1}{m}Rb_k\|x_{k+1}-x_k\|^2+$$
$$+\frac{1}{6}L\|x_{k+1}-x_k\|^3+\frac{1}{2}L\|\bar{x}_k-x_k\|^2\|x_{k+1}-x_k\|\le$$
$$\le\frac{R^2}{m^2}a_{k-1}\frac{1}{m^2}a_k^2+\frac{1}{6}L\frac{1}{m^3}a_k^3+\frac{1}{2}L\frac{1}{m^3}a_{k-1}a_k^2\le$$
$$\le\left(\frac{R^2}{m^4}+\frac{2}{3}\frac{L}{m^3}\right)a_k^2a_{k-1}$$

і остаточно

$$a_{k+1}\le\frac{\ell^2}{m^2}a_k^2a_{k-1}. \qquad /11/$$

З /11/ і припущення індукції записуємо

$$a_{k+1}\le\ell^2\frac{1}{m^2}\frac{m^2}{\ell^2}q^{2D_k}\frac{m}{\ell}q^{D_{k-1}}=$$
$$=\frac{m}{\ell}q^{2D_k+D_{k-1}}=\frac{m}{\ell}q^{D_{k+1}}.$$

Отже, нерівність /6/ доведена.

Зараз легко показати

$$b_{k+1} = \|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k\| \leq \frac{2}{m} a_k .$$

Далі, враховуючи $\|x_k - x_*\| \leq a_k/m$ [3] і нерівність /6/, отримуємо остаточно

$$\|x_k - x_*\| \leq \ell^{-1} q^{D_k}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Теорема доведена.

Зауваження. Для визначення порядку збіжності методу з нерівності /II/ записуємо рівняння $\rho = 2 + \frac{1}{\rho}$ , де $\rho$ - порядок збіжності. Звідси

$$\rho = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41 .$$

Список літератури: І. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв"язування функціональних рівнянь. - ДАН УРСР, серія А, 1968, 5. 2. Б а р т и ш М.Я., Щ е р б и н а Ю.Н. Об одном итерационном процессе решения нелинейного операторного уравнения. - Вычислительная и прикладная математика, 1972, вып. 16. 3. В а с и л ь е в Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980. 4. К а р т а н А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. - М.: Мир, 1971. 5. Ф о р с а й т Д., М о л е р К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. - М.: Мир, 1969.

Стаття надійшла в редколегію 14.04.82