УДК 518:517.9

М.В.Жук, А.Я.Дзвоник

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Узагальнимо метод Канторовича [1-4] для систем диференціальних рівнянь.

Розглянемо систему рівнянь другого порядку

$$LU=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(P)\frac{\partial U}{\partial x_j}\right)+R(P)U=f(P) \qquad /1/$$

при умовах

$$U(P)\Big|_{\Gamma}=0. \qquad /2/$$

Систему /1/ розглядатимемо в області D простору координат $(x_1,\dots,x_m)$, обмеженої достатньо гладкою поверхнею Γ, яка включає дві гіперплощини $x_1=a, x_1=b, a<b$; Γ_1 – поверхня Γ без вказаних гіперплощин; $P(x_1,\dots,x_m)$, $Q(x_2,\dots,x_m)$ – точки відповідно m і $m-1$ – мірних просторів.

У системі /1/ – /2/ $U(P)=(U_1(P),\dots,U_d(P))$, $f(P)=(f_1(P),\dots,f_d(P))$ d – компонентні вектор-функції; A_{ij}, R – матриці d -го порядку, елементи яких є функціями від змінних $x_1,\dots,x_m$.

Відносно заданих функцій припускаємо, що $f(P)$ належить дійсному гільбертовому простору d -компонентних вектор-функцій $H=\mathcal{L}_2(D)$ із нормою

$$\|f\|^2=\int_D f^2(P)\,dP=\int_D\sum_{k=1}^{d}f_k^2(P)\,dP.$$

Матриці A_{ij} задовольняють наступні умови:

а/ $A_{ij}=A_{ji}$, $(i,j=1,2,\dots,m)$,

б/ якими б не були d -компонентні вектори $t_1,t_2,\dots,t_m$ завжди наявна нерівність

$$\mu_0\sum_{k=1}^{m}\|t_k\|^2\le\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\,t_j\,t_i\le\mu_1\sum_{k=1}^{m}\|t_k\|^2, \qquad /3/$$

$\mu_0, \mu_1 - const > 0$; тут крапка означає скалярне множення, $\| \ \|$ - довжину вектора.

Відносно матриці R припускаємо, що вона задовольняє умову

$$\beta_0 u^2 \le Ru \cdot u \le \beta_1 u^2. \qquad /4/$$

За область визначення $D(L)$ оператора L приймаємо множину d -компонентних вектор-функцій, двічі неперервно диференційованих у замкнутій області $\bar{D} = D + \Gamma$, які задовольняють крайові умови /2/.

Введемо оператор T , який визначається формулами

$$Tu \equiv -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i},$$

$$u|_{\Gamma} = 0,$$

з $D(T) = D(L)$. Оператор T , як це випливає з нерівності Фрідріхса, додатно визначений

$$(Tu, u) \ge \gamma^2 \| u \|^2, \quad \gamma - const > 0. \qquad /5/$$

Позначимо через $H_0 \subset H$ енергетичний простір оператора T , тобто замикання множини $D(T)$ у метриці

$$[u, v]_0 = (Tu, v) = \int_D \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dP,$$

$$|u|_0^2 = [u, u]_0.$$

Із нерівності /5/ у результаті граничного переходу для довільної вектор-функції $u \in H_0$ отримуємо

$$\| u \| \le \frac{1}{\gamma} |u|_0. \qquad /6/$$

Припускаємо, крім цього, що для заданої задачі /1/ - /2/ константи μ_0 , β_0 , γ такі, що для константи σ , яка визначається співвідношенням

$$\sigma = \begin{cases} \mu_0 + \dfrac{\beta_0}{\gamma^2}, & \text{коли } \beta_0 \le 0, \\ \mu_0, & \text{якщо } \beta_0 \ge 0, \end{cases} \qquad /7/$$

виконується умова $\sigma > 0$.

Для довільних s -компонентних вектор-функцій $u, v \in H_0$ формально введемо білінійну форму

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(P) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + R(P) u v \Big] dP. \qquad /8/$$

Встановимо тепер для довільної вектор-функції $u \in H_0$ виконання нерівності

$$\mathcal{L}(u,u) \geq \sigma |u|_0^2. \qquad /9/$$

Справді, для довільної вектор-функції $u \in H_0$, використовуючи /3/ і /4/, маємо

$$\mathcal{L}(u,u) = \int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(P) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + R(P) u \cdot u \Big] dP \geq$$

$$\geq \mu_0 \int_D \sum_{i=1}^{m} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i} \Big)^2 dP + \beta_0 \int_D u^2 dP = \mu_0 |u|_0^2 + \beta_0 \|u\|^2.$$

Якщо $\beta_0 \leq 0$, то використовуючи /6/, отримуємо

$$\mathcal{L}(u,u) \geq \mu_0 |u|_0^2 + \beta_0 \|u\|^2 \geq \mu_0 |u|_0^2 = \sigma |u|_0^2.$$

Отже, нерівність /9/ виконується. З неї випливає, що оператор задачі /I/ - /2/ додатно визначений.

Аналогічним чином встановлюється, що для довільної вектор-функції $u \in H_0$ виконується нерівність

$$\mathcal{L}(u,u) \leq \eta |u|_0^2, \qquad /10/$$

де η визначається співвідношенням

$$\eta = \begin{cases} \mu_1 + \dfrac{\beta_1}{\gamma^2} & \text{, якщо } \beta_1 \geq 0, \\ \mu_1 & \text{, коли } \beta_1 < 0. \end{cases} \qquad /11/$$

Таким чином, для довільної вектор-функції $u(P) \in H_0$ справедлива нерівність

$$\sigma |u|_0^2 \leq \mathcal{L}(u,u) \leq \eta |u|_0^2, \qquad /12/$$

де σ і η визначаються відповідно співвідношеннями /7/, /11/.

Узагальненим розв"язком задачі /I/ – /2/ називається s -компонентна вектор-функція $u \in H_0$, для якої виконується тотожність

$$\mathcal{L}(u,v) \equiv \int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + Ru \cdot v\Big] dP = \int_D f \cdot v \, dP \qquad /13/$$

при довільній вектор-функції $v(P) \in H_0$.

Якщо $v(P)$ довільна неперервно диференційовна в D вектор-функція, дорівнює нулеві на границі Γ області D , а $u(P)$ – двічі неперервно диференційовна в D вектор-функція, що дорівнює нулеві на границі Γ області D і всі елементи матриць A_{ij} , R і вектор-функція $f(P)$ в системі /I/ достатньо гладкі, то /I/ – /2/ і відношення /I3/ еквівалентні. З /I/ – /2/ випливає /I3/, а з /I3/ випливає /I/ – /2/. Тому введений узагальнений розв"язок задачі /I/ – /2/ є природнім розширенням класичного поняття розв"язку задачі /I/ – /2/. Відомо, що виконання умови /I3/ забезпечує існування та єдиність узагальненого розв"язку [I] .

Задачу /I/ – /2/ розв"язуємо методом Канторовича, згідно з яким наближений розв"язок шукаємо у вигляді

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{s} C_{k\ell}(x_1)\, \varphi_{k\ell}(P), \qquad /14/$$

де $u_n(P) = (u_{n1}(P), \ldots, u_{ns}(P))$; $\varphi_{k\ell}(P)$ $(k=1,2,\ldots;\ \ell=1,2,\ldots,s)$- попередньо вибрані лінійно незалежні в Γ_1 s -компонентні вектор-функції, для яких виконуються умови

$$\varphi_{k\ell}(P)\Big|_{\Gamma_1} = 0.$$

Їх вибираємо таким чином, щоб система функцій $\{\chi_p(x_1)\,\varphi_{k\ell}(P)\}$ $\in H_0(k, p = 1,2,\ldots;\ \ell=1,2,\ldots s)$ була повною системою лінійно незалежних функцій у просторі H_0 , при цьому система функцій $\{\chi_p(x_1)\}$ задовольняє умови

$$\chi_p(x_1)\Big|_{x_1=a} = \chi_p(x_1)\Big|_{x_1=b} = 0, \quad p = 1,2,3,\ldots$$

Невідомі коефіцієнти $C_{k\ell}(x_1)$ визначаємо з системи

$$\int_{D_{x_1}} (Lu_n - f)\varphi_{k\ell}(P)\,dQ = 0, \qquad /15/$$

$$C_{k\ell}(x_1)\big|_{x_1=a} = C_{k\ell}(x_1)\big|_{x_1=b} = 0,\ k=1,2,\dots,n;\ \ell=1,2,\dots,d, \qquad /16/$$

де D_{x_1} – переріз області D гіперплощиною $x_1 = const$.

Система /15/ зводиться до лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно $C_{k\ell}(x_1)$.

Введемо поняття узагальненого розв"язку для системи методу Канторовича /15/ – /16/. Позначимо через $H_n \subset H$ простір d – компонентних функцій вигляду

$$V_n(P) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{d} a_{k\ell}(x_1)\varphi_{k\ell}(P),$$

де $V_n(P) = (V_{n1}(P),\dots,V_{nd}(P))$. Нехай для деякої вектор-функції $U_n(P) \in H_n \cap H_0$ справедлива тотожність

$$\mathcal{L}(U_n, g_n) \equiv \int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}\frac{\partial U_n}{\partial x_j}\frac{\partial g_n}{\partial x_i} + RU_n\cdot g_n\Big]dP = \int_D f\cdot g_n\,dP, \qquad /17/$$

в якій $g_n(P)$ – довільна вектор-функція із $H_n \cap H_0$. Тоді вектор-функція $U_n(P)$ називається узагальненим розв"язком системи методу Канторовича /15/ – /16/.

Покажемо тепер, що узагальнений розв"язок системи методу Канторовича /15/ – /16/ існує. Для цього, розв"язуючи задачу /1/ – /2/, застосуємо метод Бубнова-Гальоркіна, згідно з яким наближений розв"язок $U_n^t(P)$ шукаємо у вигляді

$$U_n^t(P) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{d}\sum_{p=1}^{t} C_{k\ell}^{p}\,\chi_p(x_1)\varphi_{k\ell}(P), \qquad /18/$$

де $U_n^t = (U_{n1}^t(P),\dots,U_{nd}^t(P))$. Невідомі коефіцієнти $C_{k\ell}^{p}$ визначаємо зі системи

$$\mathcal{L}(U_n^t, \chi_p\varphi_{k\ell}) \equiv \int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}\frac{\partial U_n^t}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(\chi_p(x_1)\varphi_{k\ell}(P)) +$$
$$+ RU_n^t\chi_p(x_1)\varphi_{k\ell}(P)\Big]dP = \int_D f\chi_p(x_1)\varphi_{k\ell}(P)dP,\ k=1,2,\dots,n;\ \ell=1,2,\dots,d; \qquad /19/$$
$$p = 1,2,\dots,t,$$

яка зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів C^{ρ}_{kl}.

Позначимо через $H^t_n \subset H_0$ простір функцій вигляду

$$h^t_n(P) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{s} \sum_{\rho=1}^{t} b^{\rho}_{kl} \chi_{\rho}(x_1) \varphi_{kl}(P),$$

де b^{ρ}_{kl} – довільні числа. Тоді на основі системи /I9/ для довільного елемента $g^t_n(P) \in H^t_n$ маємо

$$\mathcal{L}(U^t_n, g^t_n) \equiv \int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij} \frac{\partial U^t_n}{\partial x_j} \frac{\partial g^t_n}{\partial x_i} + R U^t_n g^t_n\Big] dP = \int_D f g^t_n \, dP. \qquad /20/$$

Система /I9/ має єдиний узагальнений розв"язок, оскільки з огляду на умову /I2/ одержуємо

$$\mathcal{L}(U^t_n, U^t_n) = \int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij} \frac{\partial U^t_n}{\partial x_j} \frac{\partial U^t_n}{\partial x_i} + R U^t_n U^t_n\Big] dP \geq \sigma \, |U^t_n|^2_0, \qquad /2I/$$

звідки випливає, що детермінант системи /I9/ відмінний від нуля.

Покажемо тепер, що послідовність розв"язків $\{U^t_n\}$ системи рівнянь /I9/ методу Бубнова-Гальоркіна слабо збігається в просторі H_0 до узагальненого розв"язку системи методу Канторовича /I5/ – /I6/. Для цього встановимо спочатку обмеженість послідовності $\{U^t_n\}$ у просторі H_0. Використовуючи нерівність /2I/ і співвідношення /20/ при $g^t_n = U^t_n$, маємо $|U^t_n|^2_0 \leq$ $\leq \frac{1}{\sigma} \mathcal{L}(U^t_n, U^t_n) = \frac{1}{\sigma} \int_D f \cdot U^t_n \, dP \leq \frac{1}{\sigma} \|f\| \, \|U^t_n\|.$
Звідси, враховуючи нерівність /6/, одержуємо $|U^t_n|_0 \leq \frac{1}{\sigma \gamma} \|f\|.$
Із останньої нерівності випливає, що з послідовності $\{U^t_n\}$ можна виділити підпослідовність $\{U^{t_d}_n\}$, яка при $t_d \to \infty$ слабо збігається в просторі $H_n \cap H_0$ і, тим більше в просторі $H_n \cap H$, принаймні до однієї граничної точки $U_n \in H_n \cap H_0$. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що вся послідовність $\{U^t_n\}$ слабо збігається в просторі H_0 до U_n.

Оскільки для довільного елемента $g_n(P) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{s} a_{kl}(x_1) \varphi_{kl}(P) \in$ $H_n \cap H_0$, можна побудувати послідовність елементів

$g_n^t(P)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{s}\sum_{\rho=1}^{t} a_{k\ell}^{\rho}\chi_\rho(x_1)\varphi_{k\ell}(P)\in H_n^t\subset H_0$, де коефіцієнти $a_{k\ell}^{\rho}$ визначаються із системи

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{s}\sum_{\rho=1}^{t} a_{k\ell}^{\rho}\left[\chi_\rho(x_1)\varphi_{k\ell}(P),\chi_\tau(x_1)\varphi_{r\ell}(P)\right]_0=\left[g_n(P),\chi_\tau(x_1)\varphi_{k\ell}(P)\right]_0, \quad /22/$$

$$r=1,2,\ldots,n;\ \tau=1,2,\ldots,t;$$

таку, що $|g_n-g_n^t|_0\to 0$ при $t\to\infty$. Зафіксувавши елемент $g_n\in H_n\cap H_0$, беремо у співвідношенні /20/ елемент $g_n^t\in H_n^t$, коефіцієнти $a_{k\ell}^{\rho}$ якого визначають із системи /22/. Тепер у співвідношенні /20/ можемо перейти до границі при $t\to\infty$. При цьому дістанемо рівність

$$\mathcal{L}(u_n,g_n)\equiv\iint_D\Big[\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial g_n}{\partial x_i}+R\cdot u_n g_n\Big]dP=\int_D f\cdot g_n\,dP,$$

справедливу для довільної вектор-функції $g_n(P)=(g_{n1}(P),\ldots,g_{ns}(P))\in\in H_n\cap H_0$. Єдиність розв"язку забезпечується виконанням умови /12/. Дійсно, нехай $u_n(P)$ і $w_n(P)$ – два узагальнені розв"язки системи методу Канторовича /15/ – /16/. Для них, враховуючи тотожність /17/, при $g_n=u_n-w_n$ відповідно маємо

$$\mathcal{L}(u_n,u_n-w_n)=\int_D f(u_n-w_n)\,dP,$$

$$\mathcal{L}(w_n,u_n-w_n)=\int_D f(u_n-w_n)\,dP.$$

Віднімаючи від першої рівності другу і враховуючи співвідношення /12/, дістаємо

$$0=\mathcal{L}(u_n-w_n,u_n-w_n)\geq\sigma|u_n-w_n|_0^2.$$

Звідси випливає, що $u_n\equiv w_n$. Таким чином, система методу Канторовича /15/ – /16/ має єдиний узагальнений розв"язок $u_n(P)\in H_n\cap H_0$. Отже, справедлива наступна теорема.

<u>Теорема.</u> Якщо матриці $A_{ij}\ (i,j=1,2,\ldots,m)R$ системи /1/ такі, що виконується умова /12/, то для довільної вектор-функції $f(P)=(f_1(P),\ldots,f_s(P))\in H$ задача /1/ – /2/ має єдиний узагальнений

розв"язок $u(P)=(u_1(P),\dots,u_s(P))\in H$ і при довільному n система методу Канторовича /I5/ – /I6/ – єдиний узагальнений розв"язок $u_n(P)=(u_{n1}(P),\dots,u_{ns}(P))\in H_n\cap H_0$.

Список літератури: I. В а р г а Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. – М., I974. 2. В л а с о в а З.А. Решение задачи Дирихле методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. – В кн.: Науч. тр. Ленинград. ин-та текстильной и легкой пром-ти, I97I, II. 3. К а н т о р о в и ч Л.В. Приближенные методы высшего анализа. – М., I962. 4. Л у ч к а А.Ю., Ж у к М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. – В кн.: Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. – К., I975.

Стаття надійшла в редколегію I4.I2.8I

УДК 5I7.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

АСИМПТОТИКА РОЗВ"ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДЕЯКОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

В області $D=\{(x,t): 0\le x\le \ell,\ 0\le t\le T\}$ розглянемо задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)-a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,t)u=f(x,t), \qquad /I/$$

$$u(0,t)=0,\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\ u(\ell,t)=0,\ u(x,0)=0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.