розв"язок $u(P)=(u_1(P),\dots,u_s(P))\in H$ і при довільному n система методу Канторовича /I5/ – /I6/ – єдиний узагальнений розв"язок $u_n(P)=(u_{n1}(P),\dots,u_{ns}(P))\in H_n\cap H_0$.

Список літератури: I. В а р г а Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. – М., I974. 2. В л а с о в а З.А. Решение задачи Дирихле методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. – В кн.: Науч. тр. Ленинград. ин-та текстильной и легкой пром-ти, I97I, II. 3. К а н т о р о в и ч Л.В. Приближенные методы высшего анализа. – М., I962. 4. Л у ч к а А.Ю., Ж у к М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. – В кн.: Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. – К., I975.

Стаття надійшла в редколегію I4.I2.8I

УДК 5I7.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

АСИМПТОТИКА РОЗВ"ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДЕЯКОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

В області $D=\{(x,t):0\leq x\leq \ell,\ 0\leq t\leq T\}$ розглянемо задачу

$$L_\varepsilon u\equiv \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)-a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,t)u=f(x,t), \qquad /I/$$

$$u(0,t)=0,\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\ u(\ell,t)=0,\ u(x,0)=0, \qquad /2/$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Умови однозначного розв"язку задачі /I/, /2/ встановлені у праці [6], там же наведені фізичні задачі, що приводять до математичних такого виду.

Припустимо, що виконуються умови:

I/ $a(x,t)>0$, $b(x,t)>0$ в області D ;

2/ функції, які входять в /I/, достатньо гладкі;

3/ $\frac{\partial^{i+j} f(0,0)}{\partial t^i \partial x^j} = \frac{\partial^{i+j} f(\ell,0)}{\partial t^i \partial x^j} = 0$ $(i=0,\dots,N+1, i+j=0,\dots,N+1)$, де N – точність побудованої нижче асимптотики.

Методом примежового шару [I, 2] побудуємо асимптотичне розвинення розв"язку задачі I/, 2/. Розв"язок задачі шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i \bar{u}_i(x,t)+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i \Pi_i(x,\tau)+\varepsilon\sum_{i=0}^{N+1}\varepsilon^i Q_i(\xi,t)+\varepsilon^{N+1}R_N , \qquad /3/$$

де $\tau=t/\varepsilon$; $\xi=x/\varepsilon$ функції, що входять у /3/, визначаєм нижче.

Рівняння для знаходження регулярної частини асимптотики $\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i \bar{u}_i(x,t)$ одержуємо застосуванням стандартної процедури методу збурень

$$-a(x,t)\frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial x^2}+b(x,t)\bar{u}_0=f(x,t),\ -a(x,t)\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x^2}+b(x,t)\bar{u}_i=$$

$$=-\left(\frac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial t}-\frac{\partial^3 \bar{u}_{i-1}}{\partial x^3}\right) \quad (i=1,\dots,N). \qquad /4/$$

Опишемо, як одержують рівняння для визначення $\Pi_i(x,\tau)$. В операторі L_ε зробимо регуляризуюче перетворення $\tau=t/\varepsilon$ і розвинемо всі коефіцієнти у скінченні стрічки Тейлора в околі $t=0$. Одержаний таким чином оператор позначимо через M_ε

Зрівнюючи в $M_\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i \Pi_i(x,\tau)\right)=0$ коефіцієнти при однакових степенях ε, дістаємо рівняння для визначення $\Pi_i(x,\tau)$ $(i=0,\ldots,N)$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} - a(x,0)\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x^2} + b(x,0)\,\Pi_i = g_i(x,\tau), \qquad /5/$$

де $g_0(x,\tau)\equiv 0$; $g_i(x,\tau)$ $(i=1,\ldots,N)$ легко можна виписати явно і лінійно виразити через $\Pi_j(x,\tau)$ $(j<i)$ та їх похідні.

Рівняння для визначення $Q_i(\xi,t)$ $(i=0,\ldots N+1)$, які служать для ліквідації нев"язки у виконанні граничних умов в околі границі $x=0$, одержуємо процедурою аналогічною наведеній вище для знаходження $\Pi_i(x,\tau)$ /регуляризуюче перетворення $\xi = x/\varepsilon$ /. Тоді запишемо

$$\frac{\partial^3 Q_i}{\partial \xi^3} + a(0,t)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \xi^2} = q_i(\xi,t) \quad (i=0,\ldots,N+1), \qquad /6/$$

де $q_0(\xi,t)\equiv 0$, $q_i(\xi,t)$ $(i=1,\ldots,N+1)$ легко можна зобразити у явному вигляді і лінійно виразити через $Q_j(\xi,t)$ $(j<i)$ та їх похідні.

Умови, при яких слід розв"язувати рівняння /4/ - /6/, знаходимо за допомогою стандартної процедури з використанням /3/ і /2/, а також міркувань, що Π- і Q -функції повинні бути функціями типу примежового шару в околі відповідних границь області D.
Тоді маємо

$$\bar{u}_0(0,t)=0,\ \bar{u}_i(0,t)=-Q_{i-1}(0,t)\,(i=1,\ldots,N);\ \bar{u}_i(l,t)=0\,(i=1,\ldots,N), \qquad /7/$$

$$\Pi_i(x,0)=-\bar{u}_i(x,0)\,(i=0,\ldots,N),\ \Pi_i(0,\tau)=\Pi_i(l,\tau)=0\,(i=0,\ldots,N), \qquad /8/$$

$$\frac{\partial Q_i(0,t)}{\partial \xi} = -\frac{\partial \bar{u}_i(0,t)}{\partial x}\,(i=C,\ldots,N);\ \frac{\partial Q_{N+1}(0,t)}{\partial \xi}=0,\ Q_i(\xi,t)\underset{\xi\to\infty}{\longrightarrow}0 \qquad /9/$$

Отже, функції $\bar{u}_i(x,t)$ є розв"язками двоточкових задач для звичайних диференціальних рівнянь /4/, /7/. Функції $\Pi_i(x,\tau)$ визначають як розв"язки змішаних задач для параболічних рівнянь другого порядку /5/, /8/. $Q_i(\xi,t)$ $(i=0,\dots,N+1)$ знаходять із задач /6/, /9/ для звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами / t є параметром/. З попереднього видно, що всі функції, які входять у /3/, можна знайти рекурентно у такій послідовності: $\bar{u}_0(x,t)$, $\Pi_0(x,\tau)$, $Q_0(\xi,t)$, $\bar{u}_1(x,t)$ і т.д.

Однозначна розв"язність двоточкових задач /4/, /7/ випливає з праці [5], а змішаних для параболічних рівнянь – з праці [4]. Звідси ж безпосередньо випливає і те, що функції $\Pi_i(x,\tau)$ – це функції типу примежового шару. Характеристичне рівняння $\lambda^3 + a(0,t)\lambda^2 = 0$, що відповідає диференціальному рівнянню /6/, має рівно один від"ємний корінь $\lambda = -a(0,t)$, тобто стільки ж скільки умов випадає при переході до виродженої задачі. Таким чином, виродження регулярне. Аналогічно легко показати [2], що функції $Q_i(\xi,t)(i=0,\dots,N+1)$ – це функції типу примежового шару.

Методом інтегралів енергії [3] одержана оцінка

$$\| R_N(x,t,\varepsilon) \|_{L_2(D)} \le C,$$

де константа C не залежить від ε, що і доводить асимптотичну коректність розвинення /3/.

Результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

<u>Теорема.</u> При виконанні умов 1/-3/ розв"язок задачі /1/, /2/ допускає асимптотичне розвинення /3/, де $\bar{u}_i(x,t)$ – розв"язки задач /4/, /7/; функції параболічного примежового шару визначають з /5/, /8/; функції звичайного примежового шару – це розв"язки задач /6/, /9/.

<u>Список літератури:</u> 1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возму-

щенных уравнений. – М.: Наука, 1973. 2. В и ш и к М.И., Л ю с т е р н и к Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. – Усп. мат. наук, 1957, 12, № 5. 3. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. 4. Ф р и д м а н А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. 5. Х а р т м а н Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. 6. Kattabriga L. Un problema al kontorno per una equazione parabolica di ordine dispari. – Ann. Scuola norm. super. Pisa (sci. fis. e. mat.), 1959, 13, №2.

Стаття надійшла в редколегію 14.12.81

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ
ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗІ ЗМІННИМИ
КОЕФІЦІЄНТАМИ

Нехай D – область тривимірного евклідового простору E_3 обмежена поверхнею Ляпунова S, $\Pi=\{(x,t): x\in D, -\infty<t\leq T\}$, $x=(x_1,x_2,x_3)$. В області Π шукається обмежений при $t>-\infty$ розв"язок рівняння

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial t}=a(t)\Delta u+b(t)u,$$

що задовольняє на S умову

$$(2)\quad u|_S=f(x,t),$$

де $f(x,t)$ – неперервна на S функція; $a(t)$, $b(t)$ – задані неперервні функції.

Має місце наступна теорема.