Список літератури: І. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д., Бойко Л.Ф. Задача без початкових умов для рівняння теплопровідності. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., І982, вип. І9, 2. Мартиненко М.Д., Бойко Л.Ф. О разрешимости задач без начальных условий для параболических по И.Г.Петровскому систем. - ДАН СССР, І978, т.243, № I.

Стаття надійшла в редколегію 2.03.82

УДК 5І9.2І

І.Д.Квіт

ЗВОРОТНА ФОРМУЛА ДЛЯ ВІДБИТТЯ ВИПАДКОВОГО ВЕКТОРА

Нехай додатний випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ має функцію розподілу ймовірностей $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}(t_1, \ldots, t_n)$. Позначимо n -вимірний інтервал у першому гіпероктанті R_n^+

$$R_n^+ = \{ t_k > 0; \; k = 1, \ldots, n \} \qquad /1/$$

через $\mathcal{J}_n$

$$\mathcal{J}_n = \{ a_k < t_k \leq b_k \; ; \; k = 1, \ldots, n \}, 0 \leq a_k < b_k \leq \infty. \qquad /2/$$

Приріст n -вимірно неспадної функції розподілу на інтервалі $\mathcal{J}_n$ виражається формулою [I]

$$\mathcal{F}(b_1, \ldots, b_n) - \sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}(b_1, \ldots, a_k, \ldots, b_n) + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \mathcal{F}(b_1, \ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots, b_n) -$$

$$- \ldots + (-1)^n \mathcal{F}(a_1, \ldots, a_n) = \int_{\mathcal{J}_n} d\mathcal{F}(t) = \mathcal{P}\{ \xi \in \mathcal{J}_n \}. \qquad /3/$$

Нехай існує відбиття вектора ξ

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty t_1^{z_1 - 1} \ldots t_n^{z_n - 1} \, d\mathcal{F}(t_1, \ldots, t_n), \qquad /4/$$

що є аналітичною функцією принаймні в n - вимірній смузі S_n

$$S_n = \{1-\alpha_k < \operatorname{Re} z_k < 1+\beta_k ;\ \alpha_k > 0,\ \beta_k > 0;\ k=1,\dots,n\} \qquad /5/$$

n - вимірного комплексного простору C_n , елементи якого - набори n комплексних чисел $z=(z_1,\dots,z_n)$

$$C_n = \{z_k = x_k + iy_k ;\ i=\sqrt{-1},\ x_k \in R_1, y_k \in R_1;\ k=1,\dots,n\}. \qquad /6/$$

Комплекснозначна функція від n комплексних змінних називається аналітичною в смузі S_n , якщо вона в кожній точці смуги є аналітичною функцією по кожній змінній зокрема. Інтеграл /4/ розуміємо в сенсі Радона-Стільт"єса.

<u>Означення.</u> Інтервальним обмежником в R^+ називаємо довільну функцію, яка на інтервалі $J_n \in R_n^+$ дорівнює одиниці, а зовні нього - нулю.

Наприклад, інтервальним обмежником в R_n^+ є вираз

$$R_n^+(a,b] = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k - i\infty}^{c_k + i\infty} \frac{\left(\frac{b_k}{t_k}+0\right)^{z_k} - \left(\frac{a_k}{t_k}+0\right)^{z_k}}{z_k}\, dz_k =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \begin{cases} 0, & 0<t_k\leq a_k,\ t_k>b_k \\ 1, & a_k<t_k\leq b_k \end{cases} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sgn}\left(\frac{b_k}{t_k}+0-1\right) - \operatorname{sgn}\left(\frac{a_k}{t_k}+0-1\right)}{2}, \qquad /7/$$

$$(c_k>0;\ k=1,\dots,n).$$

<u>Зворотна формула.</u> Нехай у смузі /5/ існує відбиття /4/ додатного випадкового вектора ξ . Тоді приріст функції розподілу /3/ вектора ξ на інтервалі /2/ з області /1/ виражається формулою

$$P\{\xi \in J_n\} = \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \dots \int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(b_k+0)^{1-z_k} - (a_k+0)^{1-z_k}}{2\pi i\,(1-z_k)}\, \varphi(z_1,\dots,z_n)\, dz_1 \dots dz_n , \qquad /8/$$

де $max(0,1-\alpha_k)<c_k<1$. Інтеграл /8/ розуміємо в сенсі головного значення Коші.

Доведення. Коли врахувати /4/, то правий бік /8/ можна записати у вигляді $2n$ -кратного інтегралу

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_{c_1-i\tau_1}^{c_1+i\tau_1}\cdots\int_{c_n-i\tau_n}^{c_n+i\tau_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{(b_k+0)^{1-z_k}-(a_k+0)^{1-z_k}}{2\pi i\,(1-z_k)}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty t_1^{z_1-1}\cdots t_n^{z_n-1}\,d\mathcal{F}(t_1,\dots,t_n)\,dz_1\dots dz_n, \quad /9/$$

де $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$. Оскільки у виразі /9/ інтеграли відносно $t=(t_1,\dots,t_n)\in R_n^+$ абсолютно збігаються для $z=(z_1,\dots,z_n)$ зі смуги /5/ і, зокрема, на сукупності прямих

$$L_n=\{Re\,z_k=c_k,\ max(0,1-\alpha_k)<c_k<1;\ k=1,\dots,n\};$$

а стосовно $z=(z_1,\dots,z_n)$ межі інтегралів скінченні, то зміняємо черговість інтегрування. Одержуємо

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_k-i\tau_k}^{c_k+i\tau_k}\frac{\left(\frac{b_k}{t_k}+0\right)^{1-z_k}-\left(\frac{a_k}{t_k}+0\right)^{1-z_k}}{1-z_k}dz_k\right\}d\mathcal{F}(t_1,\dots,t_n)=$$

$$=\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{(1-c_k)-i\tau_k}^{(1-c_k)+i\tau_k}\frac{\left(\frac{b_k}{t_k}+0\right)^{\zeta_k}-\left(\frac{a_k}{t_k}+0\right)^{\zeta_k}}{\zeta_k}d\zeta_k\right\}d\mathcal{F}(t_1,\dots,t_n),$$

$$0<1-c_k<min(1,\alpha_k).$$

Границя добутку внутрішніх інтегралів останнього виразу існує та збігається з обмежником /7/. Отже, дістаємо

$$\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty R_n^+(a,b]\,d\mathcal{F}(t_1,\dots,t_n)=\int_{J_n}d\mathcal{F}(t)=\mathcal{P}\{\xi\in J_n\}$$

– лівий бік /8/. Зворотна формула /8/ доведена.

Безпосереднім наслідком зворотної формули /8/ є n -вимірна теорема єдиності. Відбиття /4/ у смузі /5/, якщо воно існує, однозначно визначає свою функцію розподілу $\mathcal{F}(t)$, причому

$$\mathcal{F}(t_1,\dots,t_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\cdots\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(t_k+0)^{1-z_k}}{1-z_k}\varphi(z_1,\dots,z_n)\,dz_1\dots dz_n, \quad /10/$$

$$max(0,1-\alpha_k)<c_k<1,\ t_k>0;\ k=1,\dots,n.$$

Для доведення співвідношення /10/ досить у зворотній формулі /8/ замість b_k прийняти t_k і спрямувати a_k до нуля для всіх $k=1,\dots,n$.

Формальним посереднім наслідком зворотної формули /8/ є зворотна формула для густини. Якщо додатний випадковий вектор ξ абсолютно неперервний та має густину

$$f(t_1,\dots,t_n)=\frac{\partial^n \mathcal{F}(t_1,\dots,t_n)}{\partial t_1\dots\partial t_n}, \quad (t_1,\dots,t_n)\in R_n^+,$$

то співвідношення /4/, якщо воно існує, набуває вигляду

$$\varphi(z_1,\dots,z_n)=\int_0^\infty\dots\int_0^\infty t_1^{z_1-1}\dots t_n^{z_n-1}f(t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt_n, (z_1\dots z_n)\in S_n \quad /11/$$

і зі співвідношення /10/ формально дістаємо

$$f(t_1,\dots,t_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\dots\int_{c_n-i\infty}^{c_n+i\infty} t_1^{-z_1}\dots t_n^{-z_n}\varphi(z_1,\dots z_n)dz_1\dots dz_n, \quad /12/$$
$$(t_1,\dots,t_n)\in R_n^+.$$

Відзначимо, що при $n=1$ формули /8/, /10/ і /12/ розглянуто у праці [2], а при $n=2$ формули /11/ і /12/ наведено у праці [3].

Для ілюстрації двох останніх формул розглянемо приклади.

Знайти відбиття β - вектора з густиною [4]

$$f(t_1,t_2)=\frac{\Gamma(\gamma+q+r)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(q)\Gamma(r)}t_1^{\gamma-1}t_2^{q-1}(1-t_1-t_2)^{r-1}, \quad t_1>0, t_2>0, \ t_1+t_2<1;$$
$$\gamma>0, q>0, \ r>0.$$

За формулою /11/ записуємо

$$\varphi(z_1,z_2)=\frac{\Gamma(\gamma+q+r)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(q)\Gamma(r)}\int_0^1 t_2^{z_2+q-2}\left\{\int_0^{1-t_2} t_1^{z_1+\gamma-2}(1-t_1-t_2)^{r-1}dt_1\right\}dt_2 .$$

Оскільки,

$$\{\,\}=(1-t_2)^{z_1+\gamma+r-2}\frac{\Gamma(z_1+\gamma-1)\Gamma(r)}{\Gamma(z_1+\gamma+r-1)}, \ Re\, z_1>1-\gamma,$$

та

$$\int_0^1 t_2^{z_2+q-2}(1-t_2)^{z_1+\gamma+r-2}\,dt_2=\frac{\Gamma(z_2+q-1)\Gamma(z_1+\gamma+r-1)}{\Gamma(z_1+z_2+\gamma+q+r-2)},\ Re\,z_2>1-q,$$

то відбиття

$$\varphi(z_1,z_2)=\frac{\Gamma(\gamma+q+r)\Gamma(z_1+\gamma-1)\Gamma(z_2+q-1)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(q)\Gamma(z_1+z_2+\gamma+q+r-2)};\ Re\,z_1>1-\gamma,\ Re\,z_2>1-q.$$

Знайти густину розподілу ймовірностей відповідну відбиттю

$$\varphi(z_1,z_2)=\frac{\Gamma(z_1+\gamma-1)\Gamma(z_1+z_2+\gamma+q-2)}{a^{z_1+z_2-2}\Gamma(\gamma)\Gamma(z_1+\gamma+q-1)},\ \begin{array}{l}Re\,z_1>1-\gamma,\ Re\,z_2>1-q,\\ a>0,\ \gamma>0,\ q>0.\end{array}$$

За формулою /I2/ записуємо

$$f(t_1,t_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} t_1^{-z_1}\frac{\Gamma(z_1+\gamma-1)}{a^{z_1-1}\Gamma(\gamma)}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} t_2^{-z_2}\frac{\Gamma(z_1+z_2+\gamma+q-2)}{a^{z_2-1}\Gamma(z_1+\gamma+q-1)}dz_2\right\}dz_1.$$

Тому що

$$\left\{\right\}=\frac{a^{z_1+\gamma+q-1}}{\Gamma(z_1+\gamma+q-1)}t_2^{z_1+\gamma+q-2}e^{-at_2},\ 0<t_2,$$

та

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{-z_1}\frac{\Gamma(z_1+\gamma-1)\Gamma(\gamma+q)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(z_1+\gamma+q-1)}dz_1=\frac{\Gamma(\gamma+q)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(q)}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\gamma-1}\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)^{q-1},$$
$$0<\frac{t_1}{t_2}<1,$$

то густина

$$f(t_1,t_2)=\frac{a^{\gamma+q}}{\Gamma(\gamma)\Gamma(q)}t_1^{\gamma-1}(t_2-t_1)^{q-1}e^{-at_2};\ 0<t_1<t_2.$$

Це густина одного з трьох двовимірних γ -розподілів [4].

Список літератури: I. К в і т І.Д. Уточнення зворотної формули для характеристичної функції випадкового вектора. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., I97I, вип. 6. 2. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1978, вип. I3. 3. Springer M.D. The Algebra of Random Variables. N.Y., 1979. 4. Mardia K.V. Families of bivariate distributions. - L., 1970.

Стаття надійшла в редколегію 26.I0.8I

УДК 62I.3

О.П.Гнатишин

ПОЕЛЕМЕНТНЕ РЕЗЕРВУВАННЯ ПРИ НЕОДНАКОВІЙ НАДІЙНОСТІ РЕЗЕРВУ

Нехай деяка технічна система складається з n елементів, надійність яких відповідно дорівнює $z_1, z_2, \ldots, z_n$, а вартість - $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Припустимо, що початкові надійність R_0 і вартість C_0 системи задаються відповідно формулами $R_0 = \prod_{i=1}^{n} z_i$, $C_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i$. Нехай збільшена від R_0 до R_1 надійність системи досягається з допомогою паралельного незавантаженого підключення до елементів системи певної кількості елементів відповідно з надійностями $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$. Тоді надійність зарезервованого i-го елемента при $k_i - 1$ резервних елементах

$$\rho_i = 1 - (1 - z_i)(1 - z'_i)^{k_i - 1}, \qquad /1/$$

а надійність зарезервованої системи

$$R_1 = \prod_{i=1}^{n} \rho_i \qquad /2/$$