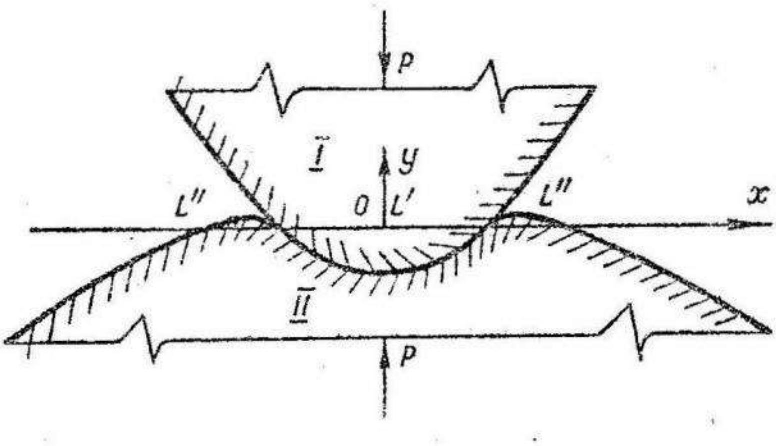
УДК 539.3

Д.В.Грилицький

СИСТЕМА СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ПЛОСКОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ ТЕПЛОВИДІЛЕННІ НА ДІЛЯНЦІ КОНТАКТУ

Плоска контактна задача термопружності про стиснення двох пружних ізотропних тіл при стаціонарному тепловиділенні на ділянці контакту вперше була розглянута М.В.Коровчинським [2]. Він вважав, що між співдотичними тілами наявний ідеальний тепловий контакт, а зовні ділянки контакту поверхні тіл теплоізольовані. Останнє допущення значно спрощує задачу в математичному відношенні, але приводить до нереального розподілу температури вздовж відрізка контакту.

Ми, розглядаючи цю задачу, вважатимемо, що на ділянці контакту існує неідеальний тепловий контакт тіл, а поза ділянкою контакту між тілами і зовнішнім середовищем здійснюється теплообмін за законом Ньютона. Температуру зовнішнього середовища, не зменшуючи загальності задачі, приймемо рівною нулю. Поставимо задачу та виведемо для неї систему сингулярних інтегральних рівнянь.



Розглянемо задачу про стиснення силами P /див. рисунок/ двох пружних ізотропних тіл в умовах плоского деформованого стану. Припустимо, що тіла в області контакту обмежені гладкими поверхнями, рівняння яких $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = -f_2(x)$, і одне тіло ковзає по поверхні другого з малою сталою швидкістю V.

За рахунок сил тертя на ділянці контакту відбувається теплоутворення, яке приводить до появи теплових потоків, що йдуть у кожне з співдотичних тіл, які в свою чергу викликають температурні напруження у тілах і перерозподіл контактних напружень.

Припустимо, що поза ділянкою контакту поверхні тіл вільні від зовнішніх напружень, а на ділянці контакту тангенціальні напруження зв"язані з нормальними за законом Кулона.

При зроблених допущеннях необхідно визначити ширину смуги контакту тіл, значення та характер розподілу нормальних напружень і температур вздовж відрізка контакту.

Оскільки ми розглядаємо стаціонарну задачу теплопровідності та відсутність джерел тепла у тілах, то температура кожного зі співдотичних тіл задовольняє у своїй області рівняння Лапласа.

Введемо такі позначення: L' – відрізок контакту; L'' – границя тіл поза відрізком контакту, $L = L' + L''$.

Граничні умови задачі:

а/ механічні

$$\sigma_y^{(1)}(x) = \sigma_y^{(2)}(x) = \tau_{xy}^{(1)}(x) = \tau_{xy}^{(2)}(x) = 0 \quad \text{на } L'', \qquad /1/$$

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x}\right)_{y=0} = -f_1'(x) - f_2'(x) = -f'(x) \quad \text{на } L', \qquad /2/$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x) = \tau_{xy}^{(2)}(x) = f\sigma_y(x) \quad \text{на } L'; \qquad /3/$$

б/ температурні

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} + h(T_2 - T_1) = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} + h(T_2 - T_1) = 0 \quad \text{на } L', \qquad /4/$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = \frac{V}{J}\tau_{xy}(x) \quad \text{на } L', \qquad /5/$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} - K_1 T_1 = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} + K_2 T_2 = 0 \quad \text{на } L''. \qquad /6/$$

Введені такі позначення: V_1, V_2 – нормальні компоненти векторів пружного переміщення; f – коефіцієнт тертя, h, K_1, K_2 коефіцієнти теплообміну; λ_1, λ_2 – коефіцієнти теплопровідності; $J = 42700 \frac{\text{кгсм}}{\text{ккал}}$ – механічний еквівалент тепла. Інші величини загальноприйняті.

Одним зі співвідношень /4/ виражена умова неідеальності теплового контакту тіл. Із формули /5/ випливає, що в кожній точці відрізка контакту сума інтенсивностей теплових потоків дорівнює інтенсивності теплоутворення за рахунок сил тертя.

Крім того, мають виконуватися ще умови

$$\int_{L'} \sigma_y(t)\,dt = -P; \quad \int_{L} \frac{\partial T_1}{\partial y}\,dt = \int_{L} \frac{\partial T_2}{\partial y}\,dt = 0 \qquad /7/$$

і температура на границі кожного тіла повинна бути неперервною функцією.

Вважаючи, що радіуси кривини кожного з тіл великі порівняно з довжиною відрізка контакту, тому при визначенні переміщень і температур у тілах останні будемо заміняти півплощинами.

Введемо функції розподілу температур

$$\mathcal{F}_j(z) = T_j(x,y) + iS_j(x,y) \qquad (j=1,2). \qquad /8/$$

Дійсна та уявна частини функції $\mathcal{F}_j(z)$ зв"язані відомими залежностями

$$\frac{\partial T_j}{\partial x} = \frac{\partial S_j}{\partial y}, \qquad \frac{\partial T_j}{\partial y} = -\frac{\partial S_j}{\partial x}. \qquad /9/$$

Напруження, нормальне переміщення і функція $S_j(x)$ на границі півплощин, з урахуванням умов /I/, задовольняють співвідношенню [I]

$$\left(\frac{\partial V_j}{\partial x}\right)_{y=0} = \pm \frac{\varkappa_j - 1}{4\mu_j}\tau_{xy}(x) - \frac{\varkappa_j + 1}{4\pi\mu_j}\int_{L'} \frac{\sigma_y\,dt}{t-x} + \gamma_j S_j(x) \qquad /10/$$

$$(j=1,2).$$

Тут і далі верхній знак береться при $j=1$, нижній – при $j=2$

$$\gamma_j = \frac{\alpha_T^{(j)} E_j \,(\varkappa_j + 1)}{4\,(1-\nu_j)\,\mu_j}. \qquad /11/$$

Підставляючи /10/ в умову /2/, враховуючи при цьому /3/, одержуємо

$$\alpha \int_{L'} \frac{\sigma_y\, dt}{t-x} + \beta\,\sigma_y(x) + \gamma_1 S_1(x) + \gamma_2 S_2(x) = -f'(x), \quad x \in L', \qquad /12/$$

де

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varkappa_1+1}{\mu_1} + \frac{\varkappa_2+1}{\mu_2}\right); \quad \beta = \frac{1}{4}\left(\frac{\varkappa_1-1}{\mu_1} - \frac{\varkappa_2-1}{\mu_2}\right) f; \qquad /13/$$

$S_j(x)$ – невідомі функції.

Розв"язуючи першу та другу граничні задачі теплопровідності для верхньої і нижньої півплощин та враховуючи /9/, знаходимо формули на відрізку L' дійсної осі

$$S_j(x) = \mp \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{T_j\, dt}{t-x} \mp \frac{1}{\pi} \int_{L''} \frac{T_j\, dt}{t-x}, \quad x \in L',$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial x} = \mp \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{\frac{\partial T_j}{\partial y}\, dt}{t-x} \mp \frac{1}{\pi} \int_{L''} \frac{\frac{\partial T_j}{\partial y}\, dt}{t-x} \quad (j=1,2), \quad x \in L'. \qquad /14/$$

Задовольняючи умови /6/ за допомогою формул /14/, маємо ще два інтегральні співвідношення

$$K_j S_j(x) - \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{\frac{\partial T_j}{\partial y}\, dt}{t-x} = \pm T_j'(x) \mp \frac{K_j}{\pi} \int_{L'} \frac{T_j\, dt}{t-x} \quad (j=1,2), \quad x \in L', \qquad /15/$$

які можна записати, використовуючи /9/, у вигляді

$$K_j S_j(x)+\frac{1}{\pi}\int_{L'}\frac{S_j'\,dt}{t-x}=\pm T_j'(x)\mp\frac{K_j}{\pi}\int_{L'}\frac{T_j\,dt}{t-x}\quad (j=1,2),\quad x\in L'. \qquad /16/$$

Кожне зі співвідношень /15/ або /16/ зв"язує на L' функцію $S_j(x)$ з відповідною температурою $T_j(x)$.

Користуючись формулами /15/, задовольнимо умову /5/. В результаті одержимо залежність між $S_j(x)$, $T_j(x)$ $(j=1,2)$ і $\sigma_y(x)$ на L'

$$\lambda_1 K_1 S_1(x)-\lambda_2 K_2 S_2(x)-\frac{V\cdot f}{\pi\cdot J}\int_{L'}\frac{\sigma_y\,dt}{t-x}=$$

$$=\lambda_1 T_1'(x)+\lambda_2 T_2'(x)-\frac{\lambda_1 K_1}{\pi}\int_{L'}\frac{T_1\,dt}{t-x}-\frac{\lambda_2 K_2}{\pi}\int_{L'}\frac{T_2\,dt}{t-x},\quad x\in L'. \qquad /17/$$

Задовольняючи, врешті, одну з двох умов /4/ за допомогою відповідної формули /15/, знаходимо одне з двох співвідношень

$$K_1 S_1(x)+\frac{h}{\pi}\int_{L'}\frac{(T_2-T_1)\,dt}{t-x}=T_1'(x)-\frac{K_1}{\pi}\int_{L'}\frac{T_1\,dt}{t-x},\quad x\in L', \qquad /18/$$

або

$$K_2 S_2(x)+\frac{h}{\pi}\int_{L'}\frac{(T_2-T_1)\,dt}{t-x}=-T_2'(x)+\frac{K_2}{\pi}\int_{L'}\frac{T_2\,dt}{t-x},\quad x\in L'. \qquad /19/$$

Отже, для визначення п"яти характеристик на L' $\sigma_y(x)$, $S_j(x)$ і $T_j(x)$ $(j=1,2)$ маємо стільки ж сингулярних інтегральних рівнянь: /12/, два співвідношення /16/, /17/ і рівняння /18/ або /19/ залежно від того, якою умовою неідеального теплового контакту користуватися.

Зауважимо, що умови /4/ з врахуванням /9/ можна записати у вигляді

$$S_1'(x) - h(T_2 - T_1) = 0 \quad \text{або} \quad S_2'(x) - h(T_2 - T_1) = 0 \quad \text{на } L'. \qquad /20/$$

Рівняння /18/ або /19/ можна замінити відповідною умовою /20/.

Для побудови наближеного розв"язку одержаної системи сингулярних інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь з успіхом можна застосувати метод ортогональних поліномів.

Для визначення ширини смуги контакту необхідно використати першу умову /7/ і умову обмеженості контактних напружень всюди на відрізку контакту, включаючи кінці.

Список літератури: 1. Г р и л і ц ь к и й Д.В., П о п о в и ч Б.І. Плоскі контактні задачі термопружності. – Львів: Вища школа, 1973. 2. К о р о в ч и н с к и й М.В. Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхностях соприкасания. – В кн.: Контактная прочность машиностроительных материалов. М.: Наука, 1964.

Стаття надійшла в редколегію 5.12.81

УДК 539.3

Д.В.Грилицький, Б.С.Окрепкий

ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ПРО ТИСК ШТАМПА НА ІЗОТРОПНИЙ ШАР, ЯКИЙ ЛЕЖИТЬ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ З ВИРІЗОМ

Розглянемо безмежний плоскопаралельний шар скінченої товщини L, який лежить на жорсткій гладкій основі з вирізом циліндричної форми.

Нехай у шар силою P втискується жорсткий круговий циліндричний штамп з плоскою гладкою основою радіусом R. Лінія дії сили P збігається з осями симетрії штампа та вирізу основи /рис.1/.