

Зауважимо, що умови /4/ з врахуванням /9/ можна записати у вигляді

$$S_1'(x) - h(T_2 - T_1) = 0 \quad \text{або} \quad S_2'(x) - h(T_2 - T_1) = 0 \quad \text{на } L' /20/$$

Рівняння /18/ або /19/ можна замінити відповідною умовою /20/.

Для побудови наближеного розв'язку одержаної системи сингулярних інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь з успіхом можна застосувати метод ортогональних поліномів.

Для визначення ширини смуги контакту необхідно використати першу умову /7/ і умову обмеженості контактних напружень всюди на відрізку контакту, включаючи кінці.

Список літератури: 1. Г р и л і ц ь к и й Д.В., П о п о - в и ч Б.І. Плоскі контактні задачі термопружності. - Львів: Вища школа, 1973. 2. К о р о в ч и н с к и й М.В. Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхностях соприкосновения. - В кн.: Контактная прочность машиностроительных материалов. М.: Наука, 1964.

Стаття надійшла в редколегію 5.I2.81

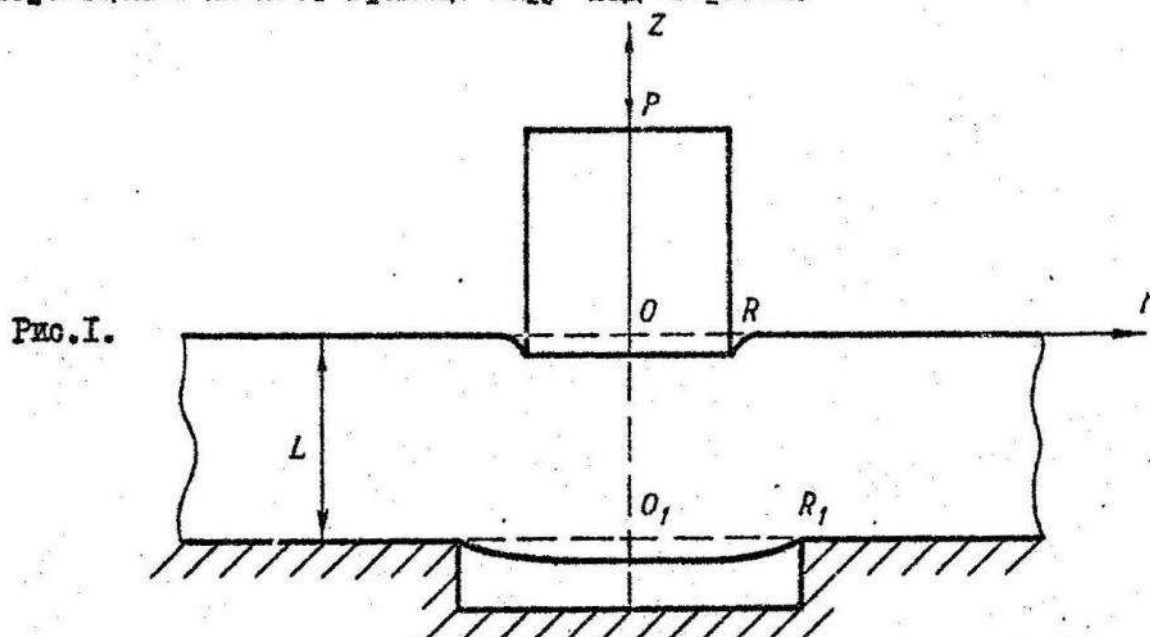
УДК 539.3

Д.В.Гриліцький, Б.С.Окренкий
ОСЕЦИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ПРО ТИСК ШТАМПА
НА ІЗОТРОПНИЙ ШАР, ЯКИЙ ЛЕЖИТЬ
НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ З ВИРІЗОМ

Розглянемо безмежний плоскопаралельний шар скінченої товщини L , який лежить на жорсткій гладкій основі з вирізом циліндричної форми.

Нехай у шар силою P втискується жорсткий круговий циліндричний штамп з площею гладкою основою радіусом R . Лінія дії сили P збігається з осью симетрії штампів та вирізу основи /рис.1/.

Припускаємо, що поверхні шару зовні штампів та над вирізом вільні від зовнішніх зусиль. Визначимо напруження під штампом і переміщення нижньої границі шару над вирізом.



Для розв'язування задачі введемо циліндричну систему координат r, θ, z з площиною $z=0$, яка збігається з верхньою поверхнею шару та віссю Oz , напруженою всередину штампів по його осі симетрії.

Поставлену задачу досліджуватимемо при таких граничних умовах:

$$u_z = -\varepsilon \quad (z=0, 0 \leq r < R), \quad /1/$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad (z=0, 0 \leq r < \infty), \quad /2/$$

$$\sigma_z = 0 \quad (z=0, R < r < \infty), \quad /3/$$

$$\sigma_z = 0 \quad (z=-L, 0 \leq r < R_1), \quad /4/$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad (z=-L, 0 \leq r < \infty), \quad /5/$$

$$u_z = 0 \quad (z=-L, R_1 < r < \infty), \quad /6/$$

де R_1 - радіус основи кругового циліндричного вирізу; ε - переміщення штампів.

При розв'язуванні задачі скористаємось загальними співвідношеннями [1] для знаходження переміщень і напружень в ізотропному шарі:

$$\begin{aligned}
 u_z &= - \int_0^\infty \eta^4 \left\{ \left[\frac{1}{b_1 R} \eta F_1(\eta) + \left(2 + \frac{1}{b_1 R} \eta^3 \right) F_2(\eta) \right] e^{-\eta^3} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{b_1 R} \eta F_3(\eta) + \left(-2 + \frac{1}{b_1 R} \eta^3 \right) F_4(\eta) \right] e^{\eta^3} \right\} J_0(\eta \rho) d\eta, \\
 \sigma_z &= \frac{2b_3}{R} \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{\eta}{R} F_1(\eta) + (b_1 + \eta^3) F_2(\eta) \right] e^{-\eta^3} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-\frac{\eta}{R} F_3(\eta) + (b_1 - \eta^3) F_4(\eta) \right] e^{\eta^3} \right\} J_0(\eta \rho) d\eta, \quad m) \\
 \tau_{rz} &= \frac{2b_3}{R} \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{\eta}{R} F_1(\eta) + (-b_2 + \eta^3) F_2(\eta) \right] e^{-\eta^3} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\eta}{R} F_3(\eta) + (b_2 + \eta^3) F_4(\eta) \right] e^{\eta^3} \right\} J_1(\eta \rho) d\eta,
 \end{aligned}$$

де σ_z, τ_{rz}, u_z - компоненти напружень і переміщень в пружному шарі; $F_i(\eta)$ ($i=1,4$) - невідомі функції;

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \xi = \frac{z}{R}, \quad b_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad b_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad b_3 = \lambda + \mu;$$

λ, μ - коефіцієнти Ляме.

Задовольнивши граничні умови /2/, /5/ і ввівши позначення

$$\begin{aligned}
 \eta \Phi_1(\eta) &= \frac{\eta}{R} F_1(\eta) + b_1 F_2(\eta) - \frac{\eta}{R} F_3(\eta) + b_1 F_4(\eta) \\
 \eta \Phi_2(\eta) &= -\frac{1}{b_1 R} \eta e^{\eta^3} F_1(\eta) - \left(2 - \frac{1}{b_1 R} \eta^3 \right) e^{\eta^3} F_2(\eta) - \\
 &\quad - \frac{1}{b_1 R} \eta e^{-\eta^3} F_3(\eta) + \left(2 + \frac{1}{b_1 R} \eta^3 \right) e^{-\eta^3} F_4(\eta).
 \end{aligned}$$

Для напружень $\sigma_z(\rho, \xi)$ і переміщень $u_z(\rho, \xi)$ на верхній і нижній граничних площинах шару одержуємо формули

$$\begin{aligned}
 u_z(\rho, 0) &= \frac{1+b_1}{b_1} R \int_0^\infty [1 - G(2\eta l)] \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta + \\
 &+ R \int_0^\infty \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \\
 \sigma_z(\rho, 0) &= 2b_3 \int_0^\infty \eta \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \\
 u_z(\rho, -l) &= R \int_0^\infty \Phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \\
 \sigma_z(\rho, -l) &= 2b_3 \left[\int_0^\infty \eta \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \right. \\
 &\left. - \frac{b_1}{1+b_1} \int_0^\infty \eta \frac{R_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \right.
 \end{aligned}$$

18/

где $l = \frac{L}{R}$; $P_1(\eta) = 2(\operatorname{sh} \eta l + \eta l \operatorname{ch} \eta l)$;

$R_1(\eta) = 2(\operatorname{sh}^2 \eta l - \eta^2 l^2)$;

$Q_1(\eta) = \operatorname{sh} 2\eta l + 2\eta l$; $G(2\eta l) = \frac{1 + 2\eta l - e^{2\eta l}}{\operatorname{sh} 2\eta l + 2\eta l}$

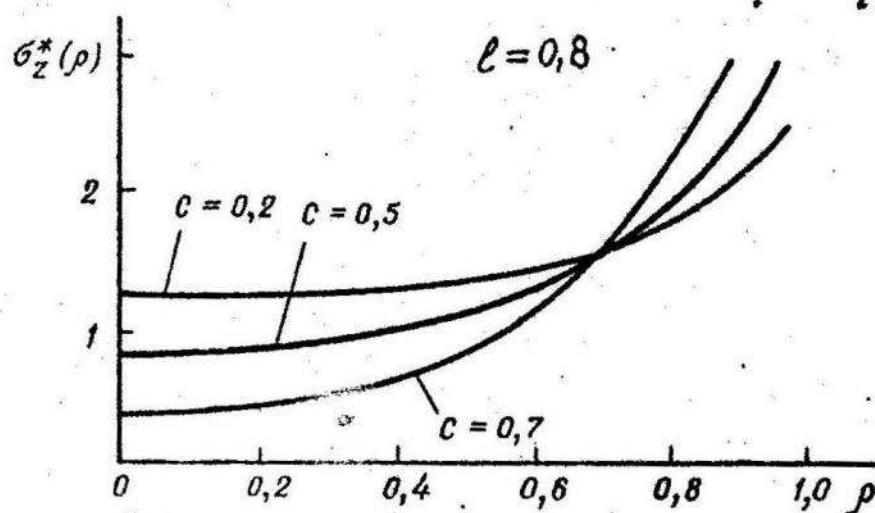


Рис. 2.

Вимагаючи виконання граничних умов /1/, /3/, /4/ і /6/, приходимо до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $\Phi_1(\eta)$ і $\Phi_2(\eta)$

$$\frac{1+b_1}{b_1} \int_0^{\infty} \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = -\frac{\varepsilon}{R} + \frac{1+b_1}{b_1} \int_0^{\infty} G(2\eta l) \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^{\infty} \frac{R_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta \quad (\rho < 1), \quad /9/$$

$$\int_0^{\infty} \eta \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1), \quad /10/$$

$$\frac{1+b_1}{b_1} \int_0^{\infty} \eta \frac{R_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^{\infty} \eta \frac{R_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad (\rho < c), \quad /11/$$

$$\int_0^{\infty} \Phi_2(\eta) J_0(2\rho) d\eta = 0 \quad (\rho > c), \quad /12/$$

де $c = R_1/R$.

Якщо ввести функцію $f(t)$ за формулою

$$\Phi_1(\eta) = \frac{b_1}{1+b_1} \int_0^1 f(t) \cos \eta t dt, \quad /13/$$

то рівняння /10/ задовольняється тотожно, а рівняння /9/ зводиться до інтегрального рівняння Абеля

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} dt = g(\rho),$$

/14/

розв'язок якого дається формулою [4]

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g(\rho)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho,$$

/15/

де

$$g(\rho) = -\frac{\varepsilon}{R} + \frac{1+b_1}{b_1} \int_0^\infty G(2\eta\ell) \varphi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta - \\ - \int_0^\infty \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \varphi_2(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta.$$

/16/

Підставивши співвідношення /16/ в формулу /15/ і враховуючи при цьому /13/, одержуємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду відносно функції $f(t)$

$$f(t) = -\frac{2\varepsilon}{\pi R} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^\infty G(2\eta\ell) \cos \eta x \cos \eta t d\eta - \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \varphi_2(\eta) \cos \eta t d\eta \quad (0 \leq t < 1).$$

/17/

Контактні напруження під штапом $\phi_2(\rho, 0)$ /8/ з врахуванням /13/ визначаємо за формулою

$$\phi_2(\rho, 0) = \kappa_0 \left[\frac{f(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_\rho^1 \frac{f'(t)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt \right] \quad (\rho < 1),$$

/18/

де

$$\kappa_0 = \frac{2b_1 b_2}{1+b_1}.$$

Використавши умову рівновати штампів $P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho \phi_2(\rho) d\rho$
і вираз /18/, рівняння /17/ набуде вигляду

$$\psi(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi(x) dx \int_0^\infty G(2\eta t) \cos \eta x \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi(\eta) \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta = 1 \quad (0 \leq t < 1), \quad /19/$$

де

$$f(t) = -\frac{P}{2\pi R^2 x_0} \psi(t); \quad \Phi_2(\eta) = -\frac{P}{2\pi R^2 x_0} \Phi(\eta); \quad /20/$$

$\Phi(\eta), \psi(t)$ - невідомі функції.

Підставивши співвідношення /20/ в рівняння /11/ і /12/ та використовуючи при цьому /13/, приходимо до такої системи інтегральних рівнянь:

$$\int_0^1 \psi(x) dx \int_0^\infty \eta \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} J_0(\eta \rho) \cos \eta x d\eta - \\ - \int_0^\infty \eta \frac{R_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi(\eta) J_0(2\rho) d\eta = 0 \quad (\rho < c), \quad /21/$$

$$\int_0^\infty \Phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad (\rho > c). \quad /22/$$

Таким чином, для визначення двох функцій $\psi(t)$ і $\Phi(\eta)$ маємо інтегральне рівняння /19/ і парні інтегральні рівняння /21/ - /22/. Для визначення функції $\Phi(\eta)$ продовжимо рівняння /22/ на інтервал $(0 \leq \rho < \infty)$

$$\int_0^\infty \Phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = u(c-\rho) X(\rho) \quad (0 \leq \rho < \infty). \quad /23/$$

Тут $U(x)$ — функція Хевісайда; $X(\rho)$ — невідома функція, яку шукають з допомогою формули

$$X(\rho) = \sum_{k=1}^N a_k J_0\left(\frac{\lambda_k}{c} \rho\right), \quad /24/$$

де $J_0(x)$ — функція Бесселя від дійсного аргумента; $a_k (k=1, N)$ — невідомі коефіцієнти, що підлягають визначенню; $\lambda_k (k=1, \infty)$ — додатні корені рівняння $J_0(\lambda_k) = 0$.

Застосувавши до обох частин рівняння /23/ формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля [3], знаходимо функцію

$$\Phi(\eta) = - \sum_{k=1}^N \lambda_k J_1(\lambda_k) a_k \frac{\eta J_0(\eta c)}{\eta^2 - \frac{\lambda_k^2}{c^2}}. \quad /25/$$

Переміщення нижньої границі шару $U_z(\rho, -\ell)$ /8/ з врахуванням /20/ і /25/ визначаємо за формулою

$$U_z(\rho, -\ell) = - \frac{\rho}{2\pi R^2 \alpha_0} \sum_{k=1}^N a_k J_0\left(\frac{\lambda_k}{c} \rho\right). \quad /26/$$

Підставивши $\Phi(\eta)$ із /25/ в інтегральні рівняння /19/ і /21/, дістаємо співвідношення, які зв'язують функцію $\psi(t)$ і коефіцієнти $a_k (k=1, N)$

$$\begin{aligned} \psi(t) = & - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi(x) dx \int_0^\infty G(2\eta\ell) \cos \eta x \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta - \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \lambda_k J_1(\lambda_k) a_k(t) a_k = 1 \quad (0 \leq t < 1), \end{aligned} \quad /27/$$

$$\int_0^1 \psi(x) \beta_0(x, \rho) dx + \sum_{k=1}^N a_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \beta_k(\rho) = 0 \quad (\rho < c). \quad /28/$$

Тут $\alpha_k(t)$, $\beta_{0,n}(x, \rho)$, $\beta_k(\rho)$ ($k = \overline{1, N}$) - відомі функції.

Помноживши обидві частини рівняння /28/ на $\rho J_0(\lambda_n \rho)$ і проінтегрувавши по ρ в межах від 0 до 1, то використовуючи при цьому умову ортогогальності функцій Бесселя, знаходимо

$$\int_0^1 \psi(x) \beta_{0,n}(x) dx + \sum_{k=1}^N \lambda_k J_1(\lambda_k) \beta_{k,n} a_k = 0 \quad (n = \overline{1, N}). \quad /29/$$

Функція $\beta_{0,n}(x)$ і коефіцієнти $\beta_{k,n}$ ($k, n = \overline{1, N}$) - відомі.

Застосовуючи метод скінчених сум [2] для розв'язування системи інтегральних рівнянь /27/ і /29/, прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\psi(t_i)$ ($i = \overline{1, N+1}$) і a_k ($k = \overline{1, N}$)

$$\begin{aligned} \psi(t_i) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N A_k g_1(t_k, t_i) \psi(t_k) - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N a_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \alpha_k(t_i) = 1 \quad (i = \overline{1, N+1}), \\ \sum_{k=1}^N A_k \beta_{0,n}(t_k) \psi(t_k) + \sum_{k=1}^N a_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \beta_{k,n} = 0 \quad (n = \overline{1, N}), \end{aligned} \quad /30/$$

де

$$g_1(t_k, t_i) = \int_0^\infty G(2\eta t) \cos \eta t_k (\cos \eta t_i - \frac{\sin \eta}{\eta}) d\eta;$$

$$t_i = (i-1)/N \quad (i = \overline{1, N+1}); \quad A_1 = A_{N+1} = \frac{1}{2N};$$

$$A_k = \frac{1}{N} \quad (k = \overline{1, N}) -$$

числові коефіцієнти для квадратурної формули трапецій. Число N підбирається таким, щоб забезпечити необхідну точність розв'язку.

Визначивши невідомі $\psi(t_k)$ із системи лінійних алгебраїчних рівнянь /30/, для функції $\psi(x)$ побудуємо апроксимувачий

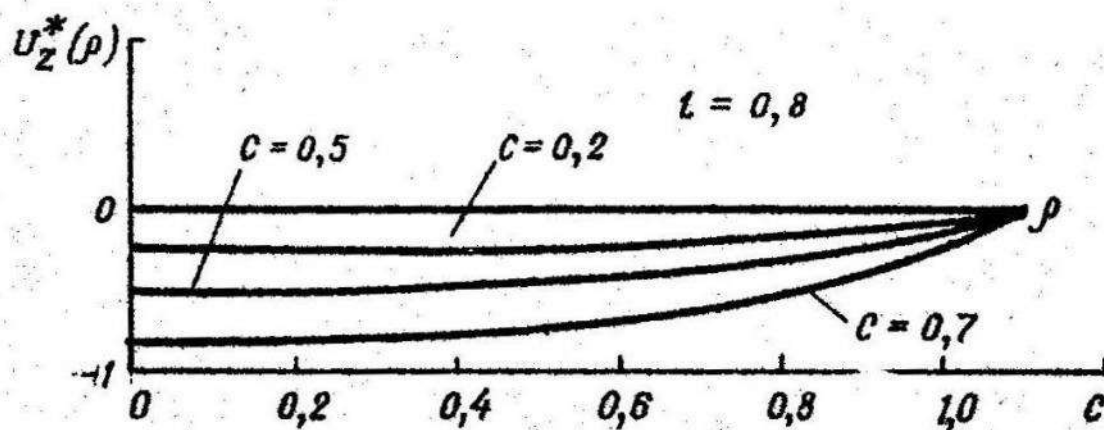


Рис. 3.

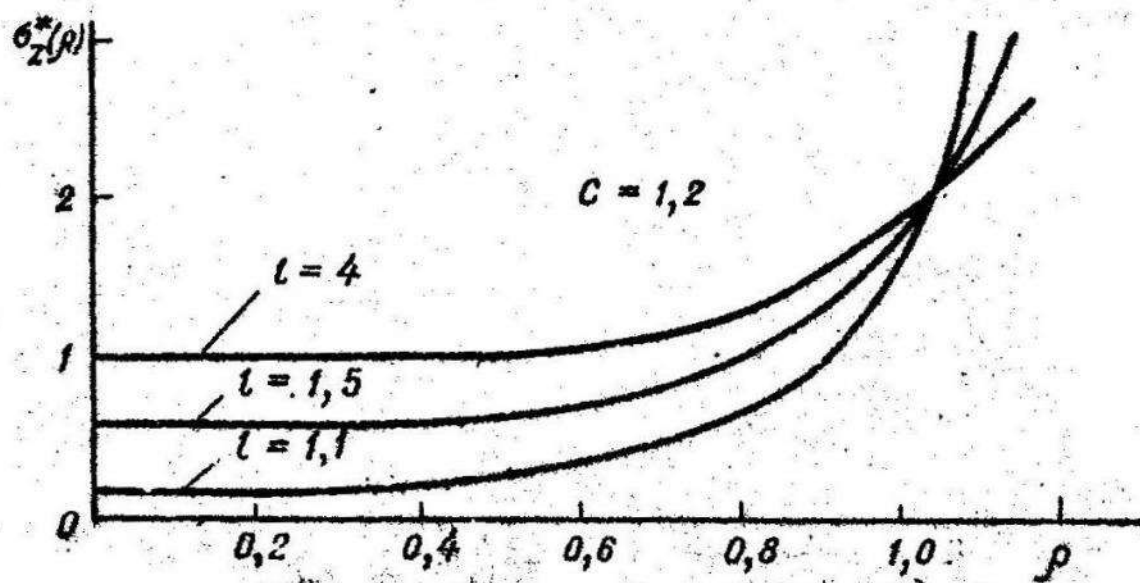


Рис. 4.

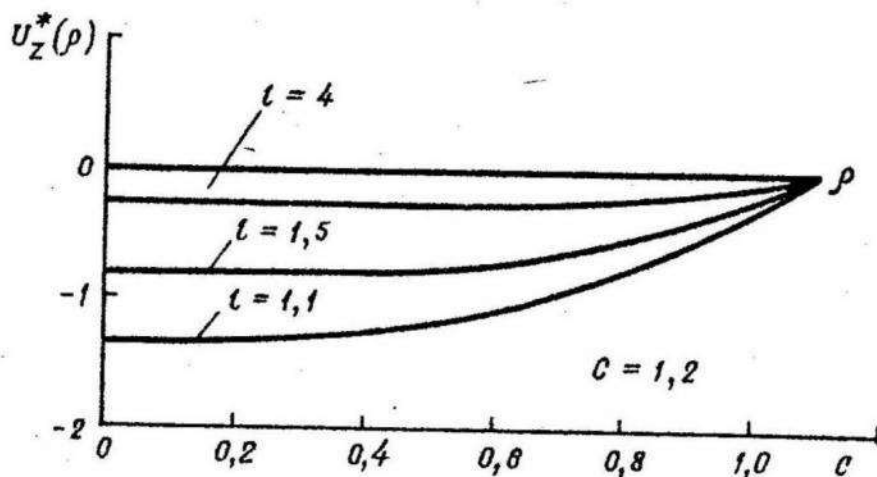


Рис. 5.

многочлен [2]

$$Q_{2m}(x) = \sum_{k=0}^m C_k x^{2k},$$

/31/

який використовується для знаходження пружно-деформованого стану шару.

Наприклад, для визначення контактних напружень під штампом з врахуванням формул /18/, /20/ і /31/ одержуємо

$$\sigma_z(\rho, 0) = -\frac{\rho}{2\pi R^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[\sum_{k=0}^m C_k - 2\sqrt{1-\rho^2} \sum_{k=1}^m k C_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (1-\rho^2)^{2k-2i-2} \right] (\rho < 1).$$

/32/

Наведемо результати числового аналізу контактних напружень під штампом і переміщень нижньої границі шару залежно від параметрів $c = R_1/R$, $\nu = L/R$.

На ЕОМ ЕС-1022 розв'язували системи лінійних алгебраїчних рівнянь /30/ 41-го порядку відносно невідомих $\psi(t_i)$ і a_k ($i = 1, 21$; $k = 1, 20$).

Для функції $\psi(x)$ достатньо побудувати апроксимуючий многочлен

$$Q_{10}(x) = \sum_{k=0}^5 C_k x^{2k},$$

/33/

який використовується для визначення напружень під штампом згідно з формулою /32/.

Графіки величин $\epsilon_z(\rho, 0) = -\frac{\rho}{2\pi R^2} \epsilon_z^*(\rho)$,
 $u_z(\rho, \ell) = -\frac{\rho}{2\pi R^2 \chi_0} u_z^*(\rho)$ для значень $\ell = 0,8$;
 $C = 0,2; 0,5; 0,7$ показані на рис. 2, 3, а для значень
 $C = 1, 2; \ell = 1,1; 1,5; 4$ - на рис. 4, 5.

Дослідження показують, що зі зменшенням товщини шару при фіксованому радіусі вирізу основи та зі збільшенням радіуса вирізу основи при фіксованій товщині шару контактні напруження під штампом спадають, а переміщення нижньої границі шару над вирізом зростають.

Список літератури: І. Г р и л и ц к и й Д.В., К и з н - м а Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981. 2. Д е м и д о в и ч Б.П., М а р о н И.А., Ш у в а л о - в а Э.З. Численные методы анализа. - М.: Физматгиз, 1967. 3. С н е д д о н И.Н. Преобразования Фурье. - М.: ИЛ, 1955. 4. У и т т е к е р Э.Т., В а т с о н Г.Н. Курс современного анализа. - М.: Физматгиз, 1963.

Стаття надійшла в редколегію 15.02.82

УДК 539.3

І.П.Шацький

ПОЛОГА ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА

З ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ВЗДОВЖ НАПРЯМНОЇ

Розглянемо положу циліндричну оболонку Кірхгофа радіуса R і товщини h , яка містить абсолютно жорстке лінійне включення довжини 2ℓ , локалізоване вздовж відрізка напрямної. Оболонка перебуває під дією симетричного відносно лінії включення навантаження. Дослідимо вплив кривини середньої поверхні оболонки на концентрацію напружень в околі кінців жорсткого включення.