

Д.Г.Хлебніков, І.А.Прокопівши, О.М.Паранжак

ОСЕЦИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ЗГИНУ ПЛАСТИНКИ
ГЛАДКИМ ШТАМПОМ З ВРАХУВАННЯМ ВІДСТАВАННЯ

Вивчення явища відставання в контактних задачах згину пластинок неможливе без врахування поперечного обтиску. Осесиметричний згин пластинки гладким круговим у плані штампом з врахуванням обтиску розглянутий у працях [3, 4], однак явище відставання пластинки від штампу там не досліджувалось. Відставання балки від штампу при її згині досліджував Г.Б.Ковнерістов [2]. Відставання штампів від багатшарової основи в рамках осесиметричної задачі теорії пружності вивчено у праці [1].

Нижче на основі праці [3] розглянемо односторонній контакт пластинки з кільцевим штампом при осесиметричному згині.

Нехай на вільно оперту по краю $r = c$ кругову пластину товщини $2h$ діє з силою P центрально прикладений гладкий штамп, контакт якого з пластиною відбувається по кільцевій зоні $a \leq r \leq b$. Основа штампів описується рівнянням $z = f(r) + h$.

Наближене рівняння для контактної тиску q з врахуванням обтиску, одержане операторним методом з умови контакту

$$W(r, h) = f(r) - \delta h, \quad /1/$$

має вигляд [3]

$$\frac{1}{D} \left(1 - \frac{4}{5} h^2 \Delta^2 + \frac{256}{525} h^4 \Delta^4 \right) q = \Delta^2 f(r), \quad a < r < b. \quad /2/$$

Тут і надалі використовуємо позначення праці [3].

Розв'язок рівняння /2/ запишемо як

$$q(r) = \frac{P}{\pi b^2} \bar{q}(\rho) = \frac{P}{\pi b^2} \left[A_1 \tilde{u}_0(\rho) + A_2 \tilde{v}_0(\rho) + A_3 \tilde{f}_0(\rho) + A_4 \tilde{g}_0(\rho) + q_*(\rho) \right]. \quad /3/$$

Функція напружень $\psi(\rho)$ має вигляд [3]

$$\psi(\rho) = B_0 h + B h \rho^2 + \frac{1}{2(1-\nu)D} \left\{ \frac{11}{525} h^4 q(a_0 h \rho) - \frac{a_0^4 h^4}{4} \int [\alpha_0(\rho, \tau) + \frac{1}{5a_0^2} \beta_0(\rho, \tau)] q(a_0 h \tau) d\tau \right\},$$

$$\alpha_0(\rho, \tau) = \tau^3 \left[\ln \frac{\tau}{\rho} - 1 + \frac{\rho^2}{\tau^2} (1 + \ln \frac{\tau}{\rho}) \right], \beta_0(\rho, \tau) = 4\tau \ln \frac{\tau}{\rho} \cdot 1/4/$$

Для визначення констант $A_1, A_2, A_3, A_4, B_0, B$ та осадки штампів δ використовуємо умови рівності нулю згинного моменту та прогину при $\tau = c$

$$\frac{16(1-\nu^2)}{a_0^2} B = \bar{x} \int_a^b t \left[2(1+\nu) \ln \frac{t}{\gamma} + (1-\nu) \left(\frac{t^2}{\gamma^2} - 1 \right) + \frac{8\nu}{5a_0^2} \right] \bar{q}(t) dt, \quad 15/$$

$$B_0 + \left(\gamma^2 - \frac{4}{a_0^2} \right) B = \frac{a_0^2 \bar{x}}{8(1-\nu)} \int_a^b \left[\alpha_0(\gamma, t) - \frac{4}{5a_0^2} \beta_0(\gamma, t) \right] \bar{q}(t) dt,$$

$$\alpha = \frac{a}{a_0 h}, \quad \beta = \frac{b}{a_0 h}, \quad \gamma = \frac{c}{a_0 h}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\pi \beta^2} = \frac{\rho h}{\pi \beta^2 D},$$

16/

умову рівноваги штампів

$$\int_a^b \bar{q}(\rho) \rho d\rho = \frac{\beta^2}{2}, \quad 17/$$

а також рівності, що забезпечують повне виконання /з точністю $O(h^4)$ / умови контакту /I/. Вони мають вигляд

$$\bar{x} \left[\frac{4}{5} \bar{q}'(\alpha) - \frac{256}{525 a_0^2} (\Delta \bar{q})'(\alpha) \right] = -(\Delta f_0)'(\alpha), \quad 18/$$

$$4(1-\nu) \alpha B + \frac{256}{525 a_0^2} \bar{x} \bar{q}'(\alpha) = f_0'(\alpha), \quad 19/$$

$$8(1-\nu) B - \bar{x} \left[\frac{4}{5} \bar{q}(\alpha) - \frac{256}{525 a_0^2} \Delta \bar{q}(\alpha) \right] = \Delta f_0(\alpha), \quad 10/$$

$$2(1-\nu) B_0 + 2(1-\nu) \left[\alpha^2 - \frac{4}{a_0^2} \right] B + \frac{256}{525 a_0^2} \bar{x} \bar{q}(\alpha) = f_0(\alpha) - \delta_0 f_0(\rho) = \frac{f(a_0 h \rho)}{h} \quad 11/$$

Якщо внутрішній радіус a зони контакту невідомий, а зовнішній b - заданий /наприклад, у випадку відставання центральної частини плоского кругового штампа/, то маємо додаткову умову

$$\bar{q}(\alpha) = 0. \quad /12/$$

При цьому, коли функція f , яка визначає форму штампа, є такою, що хоч одне з рівнянь /8/ - /10/ неоднорідне, то, задаючись

α , з рівнянь /5/, /8/ - /10/, /12/ знаходимо константи $B, \bar{x}, A_i$ ($i = \overline{1,4}$), а з рівняння рівноваги /7/ визначаємо безрозмірне зусилля $\bar{x}$, що відповідає заданому α . Якщо рівняння /8/ - /10/ однорідні /штамп з плоскою основою/, то зона контакту не залежить від зусилля $\bar{x}$, що діє на штамп. Тоді, задаючись α , з рівнянь /7/ - /10/, /12/ знаходимо сталі

$B/\bar{x}, A_i$ ($i = \overline{1,4}$). Для визначення γ , що відповідає даному α , з умови /5/ одержуємо трансцендентне рівняння виду

$$L + M\lambda + \ln \lambda = 0, \quad \lambda = 1/\gamma^2. \quad /13/$$

Після цього сталу B_0 шукають з умови /6/, а δ - з /11/.

Якщо невідомі обидва радіуси a та b зони контакту, то поряд з /12/ слід використовувати умову

$$\bar{q}(\beta) = 0. \quad /14/$$

У цьому випадку, задаючись значенням β , систему /5/, /7/ - /10/, /12/, /14/ відносно B, A_i ($i = \overline{1,4}$), $\bar{x}$ та α розв'язуємо методом послідовних наближень.

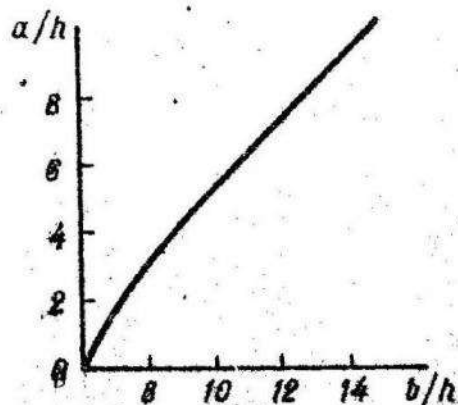


Рис. 1.

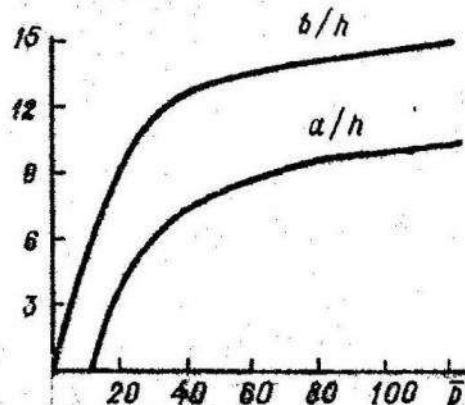


Рис. 2.

Рис. 1 для штампа з основою $f(r) = \frac{r^2}{2R}$ ілюструє залежність між зовнішнім b/h і внутрішнім a/h радіусами зони контакту, яка має місце при довільних c/h . Відставання центральної частини штампа від пластинки починається при $b/h = 6,13$. На рис. 2 показана залежність радіусів зони контакту a/h , b/h від безрозмірного зусилля $\bar{p} = \frac{PR}{a^2 D}$ при $c/h = 15$.

Список літератури: І. И л ь м а н В.М., Л а м з ю к В.Д., П р и в а р н и к о в А.К. О характере взаимодействия штампа с упругим многослойным основанием. - Механика твердого тела, 1975, № 5. 2. К о в н е р и с т о в Г.Б. Взаимодействие штампа и балочной плиты. - Сопротивление материалов и теория сооружений, 1975, вып. 25. 3. Х л е б н і к о в Д.Г., П а р а щ а к О.М. Осесимметричний згин круглої пластинки гладким штампом. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 14. 4. Ш в а б ю к В.И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально изотропных плит. - Прикладная механика, 1980, т. 16, вып. 4.

Стаття надійшла в редколегію 12.04.82

УДК 517.94:539.3

Н.П.Флейшман, Х.О.Бобик

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ІНВАРІАНТНОГО ЗАПУРЕННЯ

Крайові задачі для двовимірного диференціального рівняння у частинних похідних четвертого порядку моделюють різні задачі теорії ізотропних та анізотропних пластин /плоска задача теорії пружності, поперечний згин тонких плит, вимушені гармонійні коливання пластин на пружній основі та ін./.

У деяких випадках вигідно замінити рівняння четвертого порядку системою двох рівнянь другого порядку відносно двох шука-