Рис. I для штампа з основою $f(r)=\frac{r^2}{2R}$ ілюструє залежність між зовнішнім b/h і внутрішнім a/h радіусами зони контакту, яка має місце при довільних c/h. Відставання центральної частини штампа від пластинки починається при $b/h=6{,}13$. На рис.2 показана залежність радіусів зони контакту a/h, b/h від безрозмірного зусилля $\bar{P}=\frac{PR}{a_0^2 D}$ при $c/h=15$.

Список літератури: I. И л ь м а н В.М., Л а м з ю к В.Д., П р и в а р н и к о в А.К. О характере взаимодействия штампа с упругим многослойным основанием. - Механика твердого тела, 1975, № 5. 2. К о в н е р и с т о в Г.Б. Взаимодействие штампа и балочной плиты. - Сопротивление материалов и теория сооружений, 1975, вып.25. 3. Х л є б н і к о в Д.Г., П а р а щ а к О.М. Осесиметричний згин круглої пластинки гладким штампом. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вип. 14. 4. Ш в а б ю к В.И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально изотропных плит. - Прикладная механика, 1980, т.16, вып. 4.

Стаття надійшла в редколегію 12.04.82

УДК 517.94:539.3

Н.П.Флейшман, Х.О.Бобик

РОЗВ"ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ІНВАРІАНТНОГО ЗАНУРЕННЯ

Крайові задачі для двовимірного диференціального рівняння у частинних похідних четвертого порядку моделюють різні задачі теорії ізотропних та анізотропних пластин /плоска задача теорії пружності, поперечний згин тонких плит, вимушені гармонійні коливання пластин на пружній основі та ін./.

У деяких випадках вигідно замінити рівняння четвертого порядку системою двох рівнянь другого порядку відносно двох шуканих функцій, яку можна простіше розв"язати з достатньою точністю наближеними методами. Якщо область, яку займає серединна площина пластинки, однозв"язна, то її можна відобразити на прямокутник $\Omega: \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ з границею $\partial\Omega$. При цьому задані диференціальні рівняння та відповідні граничні умови на границі пластинки зводять, взагалі кажучи, до такого виду:

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{n+l=0}^{2} a_{nlkp}(x,y) \frac{\partial^{n+l} U^{(k)}(x,y)}{\partial x^n \partial y^l} + \varphi_p(x,y) = 0, \qquad /1/$$

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{n+l=0}^{1} b_{nlkp}(x,y) \frac{\partial^{n+l} U^{(k)}(x,y)}{\partial x^n \partial y^{(l)}} + \Phi_p(x,y) = 0 \text{ на } \partial\Omega \quad (p=1,2), \qquad /2/$$

де $U^{(k)}(x,y)$ – шукані функції; $a_{nlkp}(x,y)$, $b_{nlkp}(x,y)$ – відомі змінні коефіцієнти; $\varphi_p(x,y)$, $\Phi_p(x,y)$ – відомі функції.

Крайову задачу /1/ – /2/ розв"яжемо наближено за допомогою дискретного варіанту методу занурення, при числовій реалізації якого можна ефективно використовувати ЕОМ.

Постановка задачі. Покриємо розглядувану прямокутну область Ω прямокутною сіткою, кроки h і τ якої вибираємо з умов $a = N\tau$, $b = Mh$, де N, M – цілі числа.

Позначимо через $U^{(k)}_{ji}$, a_{nlkpji}, b_{nlkpji}, φ_{ji}, Φ_{ji} $(i=\overline{0,N};\ j=\overline{0,M})$ відповідно дискретні значення шуканих $U^{(k)}(x,y)$ і відомих функцій $a_{nlkp}(x,y)$, $b_{nlkp}(x,y)$, $\varphi_p(x,y)$, $\Phi_p(x,y)$ у вузлах сітки та замінимо диференціальні оператори в /1/ – /2/ їх симетричними різницевими аналогами з точністю $O(h^2)$.

Після такої дискретизації система /1/ набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^{2} Q^{(p)}_{k1i} U^{(k)}_{i+1} + Q^{(p)}_{ki} U^{(k)}_{i} + Q^{(p)}_{k2i} U^{(k)}_{i-1} + \varphi^{(p)}_{ki} = 0 \quad (p=1,2;\ i=\overline{1,N-1}), \qquad /3/$$

де $U^{(k)}_i \equiv U^{(k)}(i,N)$ – вектор вузлових значень шуканих функцій $U^{(k)}_{ji}$ при фіксованому значенні i. Прийняте позначення підкреслює залежність розв"язку від розміру області. У формулі /3/ введені ще такі позначення: $Q^{(p)}_{k1i}$, $Q^{(p)}_{ki}$, $Q^{(p)}_{k2i}$ – відомі квадратні матриці розмірності $(M-1)$; $\varphi_{ki}^{(p)}$ – відомий вектор [I]. Введемо також складні вектори розмірності

$$U_i = \begin{bmatrix} U_i^{(1)} \\ U_i^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \varphi_i = \begin{bmatrix} \varphi_i^{(1)} \\ \varphi_i^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (i=\overline{1,N-1}). \qquad /4/$$

Тоді система /3/ записується як одне матрично-векторне різницеве рівняння другого порядку

$$A_i U(i+1,N) + B_i U(i,N) + C_i U(i-1,N) + \varphi_i = 0, \qquad /5/$$

де A_i, B_i, C_i – відомі блочні квадратні матриці розмірності $(2M-2)$. Їх вигляд залежить, очевидно, від змінних коефіцієнтів вихідної системи /I/. При правильній побудові матриць A_i, B_i, C_i дискретизовані крайові умови на краях $y=0$ і $y=b$ задовольняються тотожно.

Систему різницевих рівнянь /5/ відносно шуканих векторів формально можна розглядати як одновимірну.

Граничні умови на краях прямокутника $x=0$ і $x=a$ в найбільш загальному випадку набувають вигляду

$$\mathcal{L}_1 U(-1,N) + \mathcal{L}_2 U(0,N) + \mathcal{L}_3 U(1,N) = c,$$

$$\beta_1(N) U(N+1,N) + \beta_2(N) U(N,N) + \beta_3(N) U(N-1,N) = d, \qquad /6/$$

де c, d – задані вектори; $\mathcal{L}_k$, $\beta_k(N)$ $(k=\overline{1,3})$ – задані квадратні блочні матриці розмірності $(2M-2)$, які залежать від відомих коефіцієнтів граничних умов /2/.

Використовуючи ідею методу інваріантного занурення [I], представляємо шуканий вектор у вигляді

$$U(i,N) = \mathcal{U}(i,N)d + p(i,N), \qquad /7/$$

де квадратна матриця $\mathcal{U}(i,N)$ і вектор $p(i,N)$ є розв"язками наступних двоточкових крайових задач

$$A_i \mathcal{U}(i+1,N) + B_i \mathcal{U}(i,N) + C_i \mathcal{U}(i-1,N) = 0, \qquad /8/$$

$$\alpha_1 U(-1,N)+\alpha_2 U(0,N)+\alpha_3 U(1,N)=0, \qquad /9/$$

$$\beta_1(N)U(N+1,N)+\beta_2(N)U(N,N)+\beta_3(N)U(N-1,N)=I, \qquad /10/$$

$$A_i p(i+1,N)+B_i p(i,N)+C_i p(i-1,N)+\varphi_i=0, \qquad /11/$$

$$\alpha_1 p(-1,N)+\alpha_2 p(0,N)+\alpha_3 p(1,N)=c, \qquad /12/$$

$$\beta_1(N)p(N+1,N)+\beta_2(N)p(N,N)+\beta_3(N)p(N-1,N)=0. \qquad /13/$$

Легко перевірити, що вектор /7/ тотожно задовольняє задачу /5/ - /6/.

<u>Знаходження матриці $U(i,N)$ методом запугення.</u> Розглянемо задачу /8/ - /10/ на відрізку довжиною $N+1$:

$$A_i U(i+1,N+1)+B_i U(i,N+1)+C_i U(i-1,N+1)=0, \qquad /14/$$

$$\alpha_1 U(-1,N+1)+\alpha_2 U(0,N+1)+\alpha_3 U(1,N+1)=0,$$

$$\beta_1(N+1)U(N+2,N+1)+\beta_2(N+1)U(N+1,N+1)+\beta_3(N+1)U(N,N+1)=I \qquad /15/$$

і введемо позначення

$$R(N)=\beta_1(N)\;U(N+1,N+1)+\beta_2(N)U(N,N+1)+\beta_3(N)U(N-1,N+1). \qquad /16/$$

Шляхом порівняння лінійних задач /14/ - /15/ і /8/ - /10/ знаходимо

$$U(i,N+1)=U(i,N)\,R(N). \qquad /17/$$

Приймаючи тепер в /14/, /17/ і /8/ відповідно $i=N$, $i=N-1$, $i=N$, $i=N-1$, $i=N-2$, $i=N-1$ і замінюючи в /16/ N на $N-1$, отримуємо систему семи алгебраїчних рівнянь, з якої шукані величини виражаються через $R(N)$, $R(N-1)$.

Таким чином, знаходимо

$$U(N,N)=g^{-1}[(I+\tau H^{-1}F)R(N-1)-\tau H^{-1}], \qquad /18/$$
$$\tau=\beta_2(N-1)-\beta_3(N-1)C_{N-1}^{-1}B_{N-1},\quad H=f_N-a_N g^{-1}\tau,$$

$$g = \beta_1(N-1) - \beta_3(N-1)C_{N-1}^{-1}A_{N-1}, \quad F = a_N g^{-1},$$

$$f_N = \beta_3(N) - \beta_1(N)A_N^{-1}C_N, \quad a_N = \beta_2(N) - \beta_1(N)A_N^{-1}C_N. \qquad /19/$$

З /16/ далі отримуємо

$$R(N) = [B_* - A_* R(N-1)]^{-1}, \qquad /20/$$

де

$$B_* = a_{N+1}A_N^{-1}B_N g^{-1}G - a_{N+1}A_N^{-1}C_N H^{-1} - f_N g^{-1}G,$$

$$A_* = a_{N+1}A_N^{-1}B_N g^{-1}[I+GF] - a_{N+1}A_N^{-1}C_N H^{-1}F - f_N g^{-1}[I+GF];$$

$$G = zH^{-1}. \qquad /21/$$

Формулу /20/ використовують для рекурентного обчислення матриць $R(N)$. Початкове значення $R(0)$ визначають з /16/ при $N=0$ у вигляді

$$R(0) = \beta_1(0)U(1,1) + \beta_2(0)U(0,1) + \beta_3(0)U(-1,1), \qquad /22/$$

де

$$U(1,1) = a_1^{-1}(I + f_1 D^{-1}d_1 a_1^{-1});$$

$$U(0,1) = -D^{-1}d_1 a_1^{-1};$$

$$U(-1,1) = -C_0^{-1}A_0 a_1^{-1}[I + f_1 D^{-1}d_1 a_1^{-1}] + C_0^{-1}B_0 D^{-1}d_1 a_1^{-1};$$

$$D = z - d_1 a_1^{-1} f_1; \quad z = L_2 - L_1 C_0^{-1}B_0; \quad d_1 = L_3 - L_1 C_0^{-1}A_0. \qquad /23/$$

Отже, після обчислення матриць $R(n)$ за формулою /20/ можна визначити шукану матрицю $U(i, n+1)$ згідно /7/ у вигляді

$$U(i, n+1) = U(i,n)R(n), \quad (i \leq n \leq N-1) \qquad /24/$$

з початковим значенням $U(i,i)$, яке отримують з /18/ при $N=i$.

<u>Обчислення вектора $p(i,N)$ методом занурення.</u> Шляхом складання різниці рівнянь /11/ - /13/ і відповідних рівнянь, одержа-

них з них при заміні N на $N+1$, отримуємо

$$A_i P_*(i+1,N)+B_i P_*(i,N)+C_i P_*(i-1,N)=0,$$

$$\mathcal{L}_1 P_*(-1,N)+\mathcal{L}_2 P_*(0,N)+\mathcal{L}_3 P_*(1,N)=0, \qquad /25/$$

$$\beta_1(N)P_*(N+1,N)+\beta_2(N)P_*(N,N)+\beta_3(N)P_*(N-1,N)=S(N).$$

Тут позначено

$$P_*(i,N)=p(i,N+1)-p(i,N),$$

$$S(N)=\beta_3(N)p(N-1,N+1)+\beta_2(N)p(N,N+1)+\beta_1(N)p(N+1,N+1). \qquad /26/$$

Порівнюючи лінійні задачі /25/ і /8/ – /10/ і враховуючи /26/, знаходимо

$$p(i,N+1)=p(i,N)+U(i,N)S(N). \qquad /27/$$

Поступаючи далі аналогічно попередньому, отримуємо

$$S(n)=R(n)[A_* S(n-1)+D_3] \quad (n=\overline{1,N}), \qquad /28/$$

де

$$D_3=-a_{N+1}A_N^{-1}B_N g^{-1} r H^{-1}\{\beta_1(N)A_N^{-1}\varphi_N-F\beta_3(N-1)C_{N-1}^{-1}\varphi_{N-1}\}+$$
$$+a_{N+1}A_N^{-1}B_N g^{-1}\beta_3(N-1)C_{N-1}^{-1}\varphi_{N-1}+a_{N+1}A_N^{-1}C_N H^{-1}\{\beta_1(N)A_N^{-1}\varphi_N-$$
$$-F\beta_3(N-1)C_{N-1}^{-1}\varphi_{N-1}\}+a_{N+1}A_N^{-1}\varphi_N-f_{N+1}g^{-1}\{\beta_3(N-1)C_{N-1}^{-1}\varphi_{N-1}-$$
$$-rH^{-1}\beta_1(N)H^{-1}\varphi_N+rH^{-1}F\beta_3(N-1)C_{N-1}^{-1}\varphi_{N-1}\}+\beta_1(N+1)A_{N+1}^{-1}\varphi_{N+1}.$$

Початкове значення $S(0)$, яке необхідне для рекурентного обчислення $S(n)$ за формулою /28/, визначають у вигляді

$$S(0)=\beta_1(0)p(1,1)+\beta_2(0)p(0,1)+\beta_3(0)p(-1,1),$$

$$p(1,1)=a_1^{-1}\beta_1(1)A_1^{-1}\varphi_1-a_1^{-1}f_1 D^{-1}\{c+\mathcal{L}_1 C_0^{-1}\varphi_0-d_1 a_1^{-1}\beta_1(1)A_1^{-1}\varphi_1\}, \qquad /29/$$

$$p(0,1)=D^{-1}\{c+\mathcal{L}_1 C_0^{-1}\varphi_0-d_1 a_1^{-1}\beta_1(1)A_1^{-1}\varphi_1\},$$

$$p(-1,1)=-C_0^{-1}A_0\{a_1^{-1}\beta_1(1)A_1^{-1}\varphi_1-a_1^{-1}f_1 D^{-1}[c+\mathcal{L}_1 C_0^{-1}\varphi_0-$$
$$-d_1 a_1^{-1}\beta_1(1)A_1^{-1}\varphi_1]\}-C_0^{-1}B_0 D^{-1}\{\mathcal{L}_1 C_0^{-1}\varphi_0-d_1 a_1^{-1}\beta_1(1)A_1^{-1}\varphi_1+c\}-C_0^{-1}\varphi_0.$$

Після визначення векторів $S(n)$ за формулою /28/ шукані вектори $p(i,n+1)$ обчислюють за співвідношенням /27/ при $N=n$

$$p(i,n+1)=p(i,n)+U(i,n)\,S(n)\ ,\quad (n\geq i). \qquad /30/$$

Початковим значенням тут

$$p(i,i)=a_i^{-1}\left[\beta_1(i)A_i^{-1}\varphi_i-f_i\,p(i-1,i)\right],$$

$$p(i-1,i)=H^{-1}\left\{\beta_1(i)A_i^{-1}\varphi_i-FS(i-1)-F_3\beta(i-1)C_{i-1}^{-1}\varphi_{i-1}\right\}.$$

Знаючи матрицю $U(i,N+1)$ і вектор $p(i,N+1)$, обчислюємо $u(i,N+1)$ за формулою /7/. Таким чином, поставлена задача повністю розв"язана.

Приклади. Для чисельної реалізації викладеного алгоритму складена програма на мові ФОРТРАН-IV для ЕОМ ЕС-1022, за допомогою якої проведено обчислення прогинів пластин для двох випадків.

1. Вимушені коливання прямокутної плити на пружній основі, які описуються системою рівнянь [2]

$$\Delta W-V=0,\quad \Delta V-2r^2V+(\delta^4-m\omega^2)W=\frac{p}{D}.$$

Порівняння чисельних результатів з відомими точним розв"язком для одного часткового випадку дали змогу зробити висновок, що при $a=b=1$, $h=1/20$ найбільша відносна похибка наближеного розв"язку не перевищує 2,3 %. Зі зменшенням кроків сітки похибка зменшується.

2. Побудова амплітудно-частотної характеристики для прогину центра тонкої прямокутної плити при різних значеннях частоти вимушених коливань $\omega\ (p=const,\ r=\delta=0)$.

Результати розрахунку підтверджують досить високу точність розв"язку методом інваріантного занурення.

Список літератури: 1. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. – М.: Мир, 1974. 2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960.

Стаття надійшла в редколегію 18.11.82

УДК 539.311

Л.О.Тисовський

ЗГИН ПЛИТИ З КРУГЛОЮ ШАЙБОЮ І ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ ПРЯМОЛІНІЙНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Розглянемо пружну рівновагу ізотропної плити /матриці/ товщиною $2h$ з впаяною наскрізною шайбою радіуса R і N довільно розташованими прямолінійними тонкими пружними включеннями довжиною $2l_k$, шириною $2b_k$, товщиною $2h$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Центр шайби, точку O, зв"яжемо з декартовою системою координат xOy, а в центрах тонких включень, точках O_k, розмістимо початки локальних систем координат $x_k O_k y_k$, причому вісь x_k збігається з серединною лінією к-го включення і утворює кут α_k з віссю x /рис. 1/.

Припустимо, що плита знаходиться під дією рівномірно розподілених на нескінченності згинальних моментів M_x^∞, M_y^∞, а на лініях розділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного контакту.

Величини, що характеризують пружне включення, позначатимемо індексом k /к=1,2, ..., N /, шайбу – індексом 0. Параметри матриці писатимемо без індексів. Значками „плюс" і „мінус" позначатимемо граничні значення функцій відповідно при $y_k \to +0$ і $y_k \to -0$, а область $|z| \leq R$ – через S_0, область $|z| \geq R$ – через S_2.

Згідно з постановкою задачі на берегах к-го включення наявні граничні умови