Список літератури: І. Б е л л м а н Р., Э н д ж е л Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. - М.: Мир, 1974. 2. В л а с о в В.З., Л е о н т ь е в Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. - М.: Физматгиз, 1960.

Стаття надійшла в редколегію 18.11.82

УДК 539.311

Л.О.Тисовський

ЗГИН ПЛИТИ З КРУГЛОЮ ШАЙБОЮ І ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ ПРЯМОЛІНІЙНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Розглянемо пружну рівновагу ізотропної плити /матриці/ товщиною $2h$ з впаяною наскрізною шайбою радіуса R і N довільно розташованими прямолінійними тонкими пружними включеннями довжиною $2\ell_k$, шириною $2b_k$, товщиною $2h$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Центр шайби, точку O, зв"яжемо з декартовою системою координат xOy, а в центрах тонких включень, точках O_k, розмістимо початки локальних систем координат $x_k O_k y_k$, причому вісь x_k збігається з серединною лінією к-го включення і утворює кут α_k з віссю x /рис. 1/.

Припустимо, що плита знаходиться під дією рівномірно розподілених на нескінченності згинальних моментів M_x^∞, M_y^∞, а на лініях розділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного контакту.

Величини, що характеризують пружне включення, позначатимемо індексом k /к=1,2, ..., N /, шайбу - індексом 0. Параметри матриці писатимемо без індексів. Значками „плюс" і „мінус" позначатимемо граничні значення функцій відповідно при $y_k \to +0$ і $y_k \to -0$, а область $|z| \leqslant R$ - через S_0, область $|z| \geqslant R$ - через S_2.

Згідно з постановкою задачі на берегах к-го включення наявні граничні умови

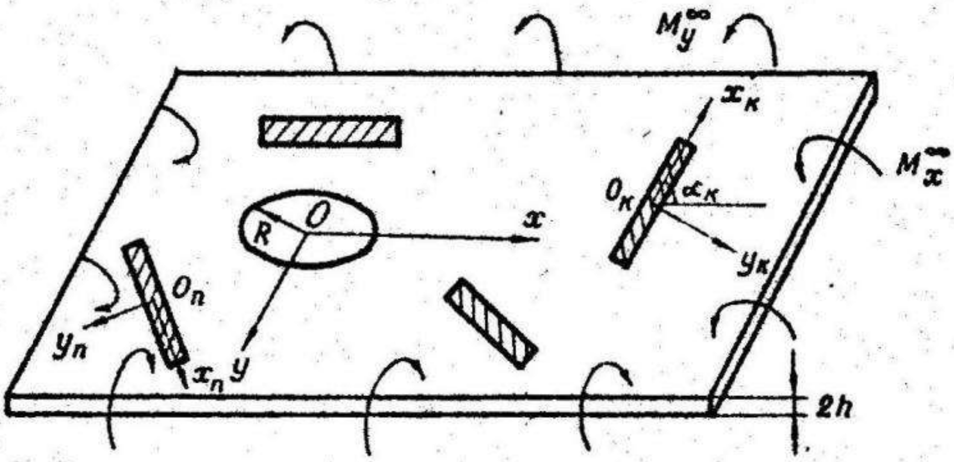

Рис. I.

$$\left(M_y\right)_\kappa^{\pm} = \left(M_y\right)^{\pm},\ \left(N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x}\right)_\kappa^{\pm} = \left(N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x}\right)^{\pm},$$

$$\left(W\right)_\kappa^{\pm} = \left(W\right)^{\pm},\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_\kappa^{\pm} = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^{\pm}. \qquad /I/$$

Відомо, що в загальному випадку напружений стан у тонкій плиті виражається через дві функції комплексної змінної $\Phi(z), \Psi(z)$ [3], які для даної задачі, з огляду її лінійності, можна записати у вигляді

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\sum_{k=1}^{N}\Phi_k(z),\quad \Psi(z)=\Psi_0(z)+\sum_{k=1}^{N}\Psi_k(z),\qquad /2/$$

де $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ – функції, які голоморфні в комплексній площині зовні кругової шайби; $\Phi_k(z)$, $\Psi_k(z)$ – функції, що голоморфні у всій комплексній площині, крім лінії розміщення к-го включення.

Використавши методику праці [I], на основі граничних умов /I/ отримаємо в локальній системі координат $x_k O_k y_k$, крайові задачі для визначення невідомих функцій $\Phi_k(x), \Psi_k(x)$ з лінією стрибків $[-\ell_k, \ell_k]$

$$\left[\Phi_k(x)-\Omega_k(x)\right]^+-\left[\Phi_k(x)-\Omega_k(x)\right]^-=2i\theta_k K_k'(x),\ |x|\le\ell_k,$$

$$\left[\varkappa\Phi_k(x)+\Omega_k(x)\right]^+-\left[\varkappa\Phi_k(x)+\Omega_k(x)\right]^-=\frac{2\mu_k i\theta_k}{\mu}M_k'(x),\ |x|\le\ell_k,\qquad /3/$$

$$\left[\Phi_k(x)+\Omega_k(x)\right]^++\left[\Phi_k(x)+\Omega_k(x)\right]^-=$$

$$=\frac{2}{1+\varkappa_k}\left[(1-\varkappa_k)K_k(x)+2M_k(x)+2\overline{K_k(x)}+2\overline{M_k(x)}\right]-2R_k(x)\cdot\varepsilon_1^k,\ |x|\le\ell_k,\qquad /4/$$

$$\left[\varkappa\Phi_k(x)-\Omega_k(x)\right]^++\left[\varkappa\Phi_k(x)-\Omega_k(x)\right]^-=iC_k+$$

$$+\frac{2\mu_k}{\mu(1+\varkappa_k)}\left[2\varkappa_k K_k(x)+(\varkappa_k-1)M_k(x)-2\overline{K_k(x)}-2\overline{M_k(x)}\right]-2P_k(x)\varepsilon_2^k,\ |x|\le\ell_k,$$

$$\Omega_k(z)=\overline{\Phi}_k(z)+z\overline{\Phi}_k'(z)-\overline{\Psi}_k(z),$$

$$R_k(x)=\Phi_0(z_k)+\overline{\Phi_0(z_k)}+e^{-2i\alpha_k}\left[\overline{\Psi_0(z_k)}+z_k\overline{\Phi_0'(z_k)}\right],$$

$$P_k(x)=(1+\varkappa)\Phi_0(z_k)-R_k(x),\ z_k=xe^{i\alpha_k}+z_k^0,\ z_k^0=x_k^0+iy_k^0,$$

$$\varepsilon_1^k=1-\frac{\min(\mu,\mu_k)}{\mu_k},\quad \varepsilon_2^k=1-\frac{\min(\mu,\mu_k)}{\mu}.\qquad /5/$$

Для простоти в /4/ і надалі індекс k біля змінної x відкидаємо; $K_k(x)$, $M_k(x)$ – невідомі функції; μ, μ_k – постійні Ляме відповідно для матеріалів матриці та включення; x_k^0, y_k^0 – координати точки O_k у системі координат xOy.

Розв"язавши задачі лінійного спряження /3/, отримаємо значення функцій $\Phi_k(z),\ \Psi_k(z)\ \ (k=1,2,\dots,N)$.

Враховуючи умови ідеального механічного контакту на лінії розділу кругової шайби та матриці, дістанемо задачі лінійного спряження для знаходження виразів для функцій $\Phi_0(z),\ \Psi_0(z)$ через функції $\Phi_k(z),\ \Psi_k(z)$ /к=I,2, ..., N /. Після цього знаходимо вирази для функцій $\Phi(z),\ \Psi(z)$ у системі координат $x_n O_n y_n$ і підставляємо їх в співвідношення /4/. Тоді отримуємо систему інтегро-диференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій $K_k(x), M_k(x)$ /к=I,2, ..., N /

$$\sum_{j=1}^{4} \alpha_{ij} f_{jn}(\xi) - \sum_{k=1}^{N} \beta_{ik} \int_{-1}^{1}\left[\sum_{j=1}^{4} S_{ijnk}(\tau,\xi)\, f'_{jk}(\tau)\right]d\tau = p_{in}(\xi),\quad |\xi|\le 1 \qquad /6/$$
$$(i=1,2;\ n=1,2,\dots,N).$$

Тут введено наступні позначення:

$$\xi = x/\ell_n,\ \tau = t/\ell_k,\ f_{1k}(\xi) = M_k(\ell_n\xi),\ f_{2k}(\xi) = \overline{M_k(\ell_n\xi)},\ f_{3k}(\xi) = K_k(\ell_n\xi),$$
$$f_{4k}(\xi) = \overline{K_k(\ell_n\xi)},\quad \alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{14}=\frac{2}{1+\varkappa_n},\ \alpha_{13}=\frac{1-\varkappa_n}{1+\varkappa_n},\ \beta_{ik}=\frac{b_k}{\ell_k}\frac{\varepsilon_i^k}{\pi(1+\varkappa)},$$
$$\alpha_{22}=\alpha_{24}=-\frac{2}{1+\varkappa_n}\frac{\mu_n}{\mu},\ \alpha_{21}=\frac{\varkappa_n-1}{1+\varkappa_n}\frac{\mu_n}{\mu},\ \alpha_{23}=\frac{2\varkappa_n}{1+\varkappa_n}\frac{\mu_n}{\mu},$$
$$S_{1jnk}(\tau,\xi)=\frac{\mu_k}{\mu}\left[\frac{2}{\varepsilon_1^k}L_{jnk}(\tau,\xi)+G_{jnk}(\tau,\xi)+g_{jnk}(\tau,\xi)+f_{jnk}(\tau,\xi)\right],\ j=1,2,$$
$$S_{13nk}(\tau,\xi)=\frac{1-\varkappa}{\varepsilon_1^k}L_{1nk}(\tau,\xi)+f_{1nk}(\tau,\xi)-\varkappa g_{1nk}(\tau,\xi)+G_{1nk}(\tau,\xi),$$
$$S_{14nk}(\tau,\xi)=\frac{1-\varkappa}{\varepsilon_1^k}L_{2nk}(\tau,\xi)+f_{2nk}(\tau,\xi)+g_{2nk}(\tau,\xi)-\varkappa G_{2nk}(\tau,\xi),$$
$$S_{2jnk}(\tau,\xi)=\frac{\mu_k}{\mu}\left[\frac{\varkappa-1}{\varepsilon_2^k}L_{jnk}(\tau,\xi)+\varkappa g_{jnk}(\tau,\xi)-G_{jnk}(\tau,\xi)-f_{2j-1,nk}(\tau,\xi)\right],\ j=1,2,$$
$$S_{23nk}(\tau,\xi)=\frac{2\varkappa}{\varepsilon_2^k}L_{1nk}(\tau,\xi)-G_{1nk}(\tau,\xi)-\varkappa^2 g_{1nk}(\tau,\xi)-f_{1nk}(\tau,\xi),$$
$$S_{24nk}(\tau,\xi)=\frac{2\varkappa}{\varepsilon_2^k}L_{2nk}(\tau,\xi)+\varkappa G_{2nk}(\tau,\xi)+\varkappa g_{2nk}(\tau,\xi)-f_{3nk}(\tau,\xi),$$

$$L_{1nk}(\tau,\zeta)=\frac{e^{+i\alpha_k}}{2}\left[\frac{1}{T_k-\lambda_{nk}X_n}+\frac{e^{-2i\alpha_n}}{\overline{\overline{T}}_k-\lambda_{nk}\overline{X}_n}\right],$$

$$L_{2nk}(\tau,\zeta)=\frac{e^{-i\alpha_k}}{2}\left[\frac{1}{\overline{\overline{T}}_k-\lambda_{nk}\overline{X}_n}-\frac{T_k-\lambda_{nk}X_n}{(\overline{\overline{T}}_k-\lambda_{nk}\overline{X}_n)^2}e^{-2i\alpha_n}\right],$$

$$g_{1nk}(\tau,\zeta)=\frac{c\,\varepsilon_n^2 e^{i\alpha_k}}{X_n(X_n\overline{T}_k-\lambda_{nk}\varepsilon_n^2)},\quad g_{2nk}(\tau,\zeta)=ce^{-i\alpha_k}\left[\frac{\varepsilon_n^2(\varepsilon_n^2\lambda_{nk}^2-T_k\overline{\overline{T}}_k)}{\overline{\overline{T}}_k(\varepsilon_n^2\lambda_{nk}-X_n\overline{\overline{T}}_k)^2}-\frac{1}{\overline{\overline{T}}_k}\right],$$

$$G_{1nk}(\tau,\zeta)=e^{i\alpha_k}\left\{\frac{c_1\varepsilon_n^2 e^{-2i\alpha_n}}{\overline{X}_n(\overline{X}_nT_k-\lambda_{nk}\varepsilon_n^2)}+c\left[\left(1+\frac{\varepsilon_n^2 e^{-2i\alpha_n}}{\overline{X}_n^2}\right)\left(\frac{\varepsilon_n^2(\varepsilon_n^2\lambda_{nk}^2-T_k\overline{\overline{T}}_k)}{T_k(\varepsilon_n^2\lambda_{nk}-\overline{X}_nT_k)^2}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{T_k}\right)-\frac{2\varepsilon_n^2(X_n\overline{X}_n-\varepsilon_n^2)(\varepsilon_n^2\lambda_{nk}^2-T_k\overline{\overline{T}}_k)}{\overline{X}_n(\varepsilon_n^2\lambda_{nk}-T_k\overline{X}_n)^3}\right]\right\},$$

$$G_{2nk}(\tau,\zeta)=c\varepsilon_n^2e^{-i\alpha_k}\left\{\frac{1}{\overline{X}_n(T_k\overline{X}_n-\varepsilon_n^2\lambda_{nk})}+e^{-2i\alpha_n}\frac{X_n\overline{X}_n(\varepsilon_n^2\lambda_{nk}-2T_k\overline{X}_n)+}{\overline{X}_n^3(\varepsilon_n^2\lambda_{nk}-T_k\overline{X}_n)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3\varepsilon_n^2T_k\overline{X}_n-2\varepsilon_n^4\lambda_{nk}}{\overline{X}_n^3(\varepsilon_n^2\lambda_{nk}-T_k\overline{X}_n)^2}\right\},$$

$$f_{1nk}(\tau,\zeta)=\left[c+\frac{\varepsilon_n^2e^{-2i\alpha_n}}{\overline{\overline{X}}_n^2}(c+c_4)\right]\frac{e^{i\alpha_k}}{T_k},\quad f_{2nk}(\tau,\zeta)=\left[c+\frac{\varepsilon_n^2e^{-2i\alpha_n}}{\overline{\overline{X}}_n^2}(1-c_3)\right]\frac{e^{-i\alpha_k}}{\overline{\overline{T}}_k},$$

$$f_{3nk}(\tau,\zeta)=f_{2nk}(\tau,\zeta)-c(1+\varkappa)\frac{e^{-i\alpha_k}}{\overline{\overline{T}}_k},\quad c=\frac{\mu_0-\mu}{\varkappa\mu+\mu_0},\quad c_1=\frac{\varkappa_0\mu_0-\varkappa\mu}{\varkappa_0\mu_0+\mu},$$

$$P_{in}(\zeta)=(-1)^{(i-1)n}\varepsilon_i^n\left\{2\Gamma+\overline{\Gamma}'e^{-2i\alpha_n}+c\varepsilon_n^2\left[\frac{\overline{\Gamma}'}{X_n^2}+\frac{\Gamma'}{\overline{X}_n^2}+\frac{\Gamma e^{-2i\alpha_n}}{\overline{X}_n^3}\left(\frac{3\varepsilon_n^2}{\overline{X}_n}-2X_n\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_n^2e^{-2i\alpha_n}\Gamma}{\overline{\overline{X}}_n^3}(1-c_2c_3+c_1)-(1+\varkappa)\left(\Gamma+\frac{c\varepsilon_n^2}{X_n^2}\Gamma'\right)\delta_{2i}\right\}-ic_n\delta_{2i},$$

$$\Gamma=-\frac{M_x^\infty+M_y^\infty}{4D(1+\nu)},\quad \Gamma'=\frac{M_y^\infty-M_x^\infty}{2D(1-\nu)},\quad \lambda_{nk}=\frac{\ell_n}{\ell_k},\quad \varepsilon_n=\frac{R}{\ell_n},$$

$$c_2=\frac{\mu_0(1+\varkappa)}{\varkappa_0\mu_0+\mu},\quad c_3=\frac{\mu(1+\varkappa)}{\varkappa_0\mu_0+2\mu-\mu_0},\quad c_4=c_3\frac{\mu-\mu_0}{\varkappa_0\mu_0+\mu},$$

$$X_n=\zeta e^{i\alpha_n}+z_n^0/\ell_n,\quad T_k=\tau e^{i\alpha_k}+z_k^0/\ell_k.$$

Крім того, повинні виконуватися умови однозначності кутів повороту нормалі до серединної площини при обході контура n -го включення, рівності нулю головного момента всіх зусиль, прикладених до n -го включення, а також умови однозначності прогинів точок серединної площини при обході n -го включення, які можна записати як

$$\int_{-1}^{1} f'_{jn}(\tau)d\tau=0,\ j=1,3;\ n=1,2,\ldots,N;\ \int_{-1}^{1}\tau f'_{3n}(\tau)d\tau=0. \qquad /7/$$

Систему рівнянь /6/, /7/ розв"язували чисельно з використанням методу механічних квадратур[I]. Коефіцієнти інтенсивності зусиль у цьому випадку визначали за формулами

$$K^j_{1n}-iK^j_{2n}=\sqrt{\frac{\pi}{\ell}}\,\frac{\varkappa b_n Eh}{\varkappa-1}\,\frac{\mu_n}{\mu}\,\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{(m-1)}U^n_{1m}\left(ctg\frac{2m-1}{4M}\pi\right)^{(2j-3)},$$

$$K^j_{3n}-iK^j_{4n}=\sqrt{\frac{\pi}{\ell}}\,\frac{\varkappa b_n Eh}{\varkappa-1}\,\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{(m-1)}U^n_{3m}\left(ctg\frac{2m-1}{4M}\pi\right)^{(2j-3)}, \qquad /8/$$

де j = I для лівого кінця; j = 2 для правого кінця; M - парне;

$$U^n_{jm}=f'_{jn}(t_m)\sqrt{1-t_m^2}\,;\quad t_m=\cos\frac{2m-1}{2M}\pi.$$

На рис. 2 показана графічна залежність коефіцієнтів інтенсивності напружень $K'_{i1}=h^2K_{i1}/(M^*\sqrt{\pi\ell})$ від кута орієнтації включення для випадку плити з довільно розташованим круглим отвором і одним прямолінійним тонкостінним включенням при $M_y^\infty=0\ (M^*=M_x^\infty)$. Величини, що відносяться до ближньої /по відношенню до отвору/ вершини включення, позначені суцільними лініями, до дальньої - пунктирними.

Обчислення проводили при наступних значеннях параметрів:

$$x_0/\ell=4\ ,\ y_0/\ell=0,\ b/\ell=0{,}1,\ \varkappa_1=\varkappa_2=5.$$

Криві 4, 3 характеризують значення K_{31} відповідно для тріщини та пружного включення при відносній жорсткості включення $k=\mu_1/\mu=0{,}1$. Криві 2, 7, I, 6 дають значення коефіцієнтів

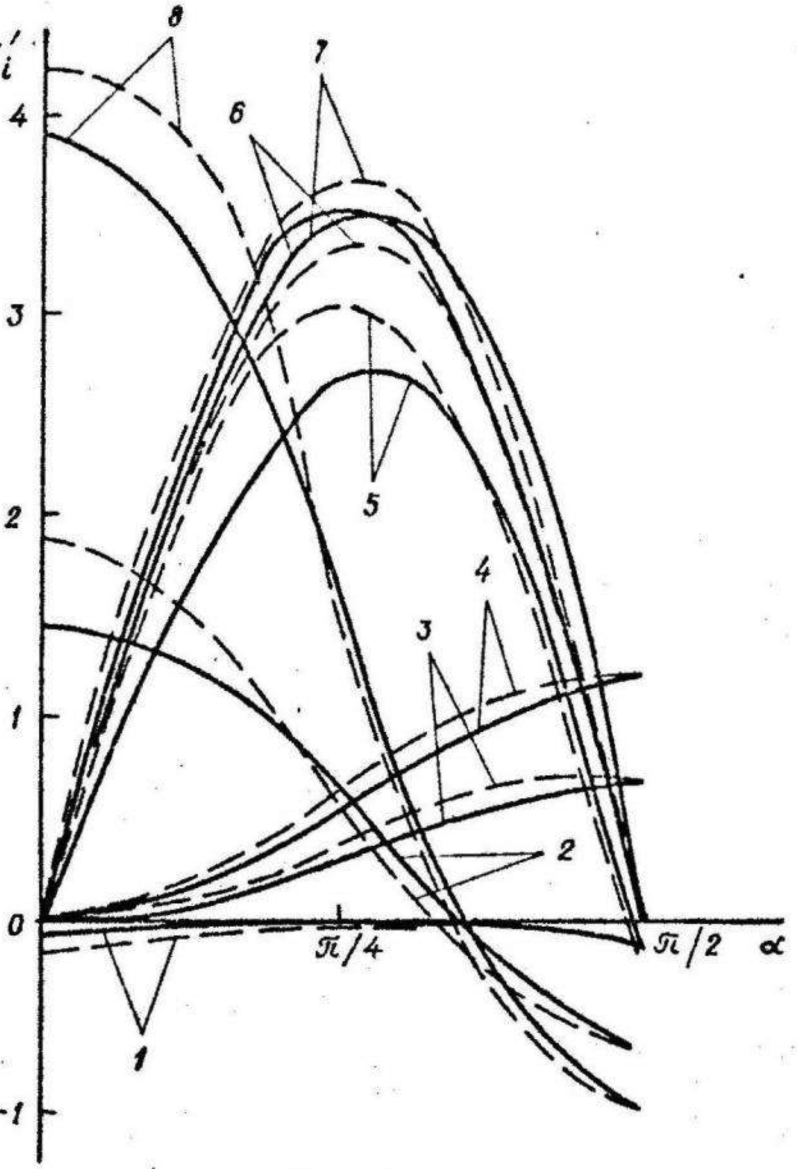

Рис. 2.

K_{i1}' /i = I, 2, 3, 4/ для пружного включення при k =I0, криві 8, 5 – значення коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{11}', K_{21}' для абсолютно жорсткого включення. Решта величин мають порядок $10^{-3}-10^{-1}$ і на рисунку не показані.

Список літератури: I. Г р и л и ц к и й Д.В., Д р а г а н М.О., О п а н а с о в и ч В.К. Изгиб плиты с прямолинейным тонкостенным включением. – МТТ, 1979, № 3. 2. П а н а с ю к В.В., С а в р у к М.П., Д а ц и ш и н А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наукова думка, 1979. 3. П р у с о в И.А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1975.

Стаття надійшла в редколегію 4.07.82