

В.К.Опанасович, М.С.Драган

АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ ТІЛА

З СИСТЕМОЮ ТОНКИХ ПРУЖНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Нехай у пружному тілі, яке зв'язане з декартовою системою координат $Oxyz$ є N прямолінійних тонких пружних включень типу смуги шириною $2\ell_k$ і товщиною $2h_k$ ($k=1,2,\dots,N$). Припускаємо, що тіло перебуває під дією зовнішнього навантаження в умовах антипоскої деформації і вісь деформації направлена по осі OZ . На берегах включень має місце ідеальний механічний контакт.

Подібно до монографії [3] розглядатимемо лише поперечний переріз xOy . Нехай центри включень O_k визначаються координатами $Z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0$. Точки O_k візьмемо за початки локальних систем координат $x_k O_k y_k$, а вісь $O_k x_k$ спрямуємо вздовж k -го включення, при цьому кут між цією віссю і віссю Ox позначимо через α_k /рис. 1/. Величини, які характеризують k -те включення, позначатимемо індексом k , знаками "плюс" і "мінус" - граничні значення функцій при $y_k \rightarrow +0$ і $y_k \rightarrow -0$; сегмент дійсної осі $O_k x_k [-\ell_k, \ell_k]$ - через L_k .

Умови механічного контакту n -го включення з тілом

$$\tau_{yz}^{\pm} = (\tau_{yz})_n^{\pm}, \quad W^{\pm} = W_n^{\pm}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad \text{II}$$

де W - проекція вектора пружного переміщення на вісь OZ ;

τ_{yz} - компонента тензора напружень.

Нехай у пружному тілі є тільки одне тонке прямолінійне пружне включення, тоді в системі координат $x_k O_k y_k$ аналітична функція $F(z_k)$, що характеризує напружено-деформований стан

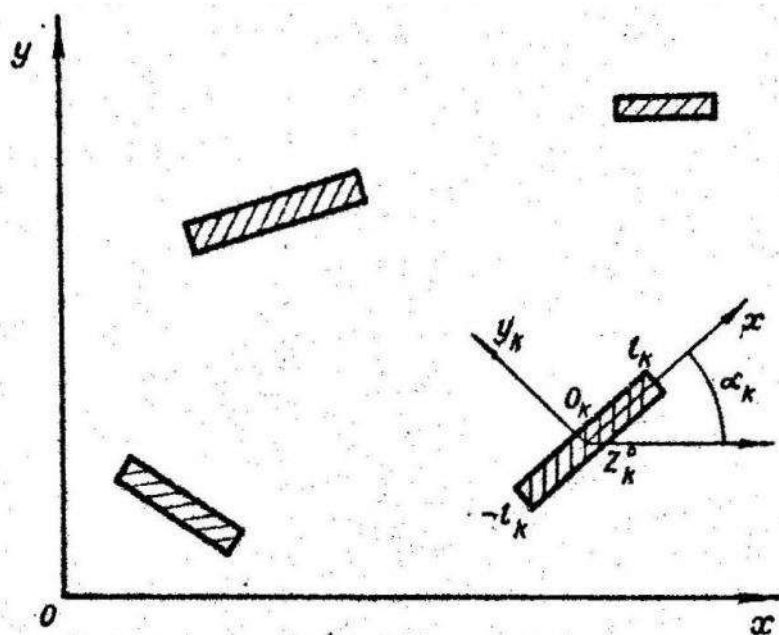


Рис. 1.

тіла, має вигляд [2]

$$F(z_k) = h_k [I_k(z_k) + J_k(z_k)] / (2\pi i) + F_0(z_k), \quad /2/$$

де

$$I_k(z_k) = \beta_k \int_{-l_k}^{l_k} \frac{\rho'_k(t) dt}{t - z_k}; \quad J_k(z_k) = i \int_{-l_k}^{l_k} \frac{Q'_k(t) dt}{t - z_k};$$

$$z_k = x_k + iy_k; \quad \beta_k = \mu / \mu_k;$$

μ, μ_k - коефіцієнти Ламе;

задачі для тіла без виключення;

функції.

$F_0(z_k)$ - розв'язок тієї ж

$\rho_k(x), Q_k(x)$ - невідомі

Враховуючи співвідношення /2/ і лінійність задачі, аналітичну функцію $F(z)$ для тіла з N щільними виключеннями можна подати у вигляді

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N h_k e^{-i\alpha_k} [I_k(z_k) + J_k(z_k)] + F_0(z), \quad /3/$$

де

$$z_k = e^{-i\alpha_k} (z - z_k^0).$$

Використовуючи формули переходу від однієї системи координат до другої [3], для визначення компоненти напруження τ_{yz} і похідної від переміщення W по x_n у системі координат $x_n O_n y_n$ матимемо наступні співвідношення

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial x} W\right)_n - l(\tau_{yz})_n = \tilde{F}_n(z_n) + \tilde{F}(z_n), \quad /4/$$

де

$$\tilde{F}_n(z_n) = h_n [I_n(z_n) + J_n(z_n)] / (2\pi i);$$

$$\tilde{F}(z_n) = \sum_{k \neq n} h_k e^{i\alpha_{nk}} [I_k(z_k) + J_k(z_k)] / (2\pi i) + F_{on}(z_n); /5/$$

$$z_k = e^{-i\alpha_k} (z_n e^{i\alpha_n} + z_n^0 - z_k^0), \quad \alpha_{nk} = \alpha_n - \alpha_k.$$

Символ $\sum_{k \neq n}^N$ позначає суму $\sum_{k=1}^N$, причому при $k=n$ доданок у ній відсутній.

Беручи до уваги /4/, для n -го включення можемо записати [2]

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n^+(x_n) + \tilde{F}_n^-(x_n) &= \beta_n Q_n(x_n) - i\rho_n(x_n) - \\ &- 2[\alpha_n \operatorname{Re} \tilde{F}(x_n) + i\beta_n \operatorname{Im} \tilde{F}(x_n)], \quad x_n \in L_n, \quad n=1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad /6/$$

де

$$\alpha_n = 1 - \min(1, \beta_n); \quad \beta_n = 1 - \min(1, 1/\beta_n).$$

Підставляючи вирази функцій $\tilde{F}_n(z_n)$, $\tilde{F}(z_n)$ /5/ в умову /6/, одержуємо систему інтегродиференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій $Q_n(x)$ і $P_n(x)$:

$$\pi P_n(x) - h_n I_n(x) + b_n \sum_{k \neq n} h_k \int_{-\ell_k}^{\ell_k} [Q'_k(t) \operatorname{Im} R_{nk}(t, x) - \beta P'_k(t) \operatorname{Re} R_{nk}(t, x)] dt = -2\pi b_n I_m F_{on}(x),$$

$$\pi \beta_n Q_n(x) + i h_n J_n(x) - a_n \sum_{k \neq n} h_k \int_{-\ell_k}^{\ell_k} [\beta P'_k(t) \operatorname{Im} R_{nk}(t, x) + Q'_k(t) \operatorname{Re} R_{nk}(t, x)] dt = 2\pi a_n \operatorname{Re} F_{on}(x), \quad n=1, 2, \dots, N,$$

причому

$$R_{nk}(t, x) = \frac{e^{i\alpha_n}}{i_k - X_n}, \quad T_k = t e^{i\alpha_k + z_k^0}, \quad X_n = x e^{i\alpha_n + z_n^0}.$$

Тут і далі індекс в x_n опускаємо.

На основі /7/, використовуючи метод механічних квадратур [3], запишемо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{m=1}^M v_n(t_m) [\pi \eta(x_i - t_m) - \gamma_n \beta / (t_m - x_i)] + b_n \sum_{k \neq n} h_k \sum_{m=1}^M [u_k(t_m) \times \operatorname{Im} R_{nk}(\ell_k t_m, \ell_n x_i) - \beta v_k(t_m) \operatorname{Re} R_{nk}(\ell_k t_m, \ell_n x_i)] =$$

$$= -2M b_n I_m F_{on}(\ell_n x_i),$$

$$\sum_{m=1}^M u_n(t_m) [\pi \beta \eta(x_i - t_m) - \gamma_n / (t_m - x_i)] - a_n \sum_{k \neq n} h_k \sum_{m=1}^M [\beta v_k(t_m) \times$$

$$\times I_m R_{nk} (\ell_k t_m \ell_n x_z) + U_k(t_m) \operatorname{Re} R_{nk} (\ell_k t_m, \ell_n x_z)] = \\ = 2M \alpha_n \operatorname{Re} F_{0n}(\ell_n x_z), \quad m=1, 2, \dots, M, \quad z=1, 2, \dots, M-1, \quad n=1, 2, \dots, N, \quad /8/$$

де

$$x_n = h_n / \ell_n; \quad t_m = \cos(\pi(2m-1)/(2M)); \quad x_z = \cos(\pi z / M),$$

$$U_n(t) = \sqrt{1-t^2} Q'_n(t); \quad v_n(t) = \sqrt{1-t^2} P'_n(t), \quad |t| \leq 1;$$

$\eta(x)$ — функція Хевісайда.

Систему /8/ слід доповнити співвідношеннями

$$\sum_{m=1}^M U_n(t_m) = 0, \quad \sum_{m=1}^M v_n(t_m) = 0, \quad n=1, 2, \dots, N, \quad /9/$$

які виражають умови рівноваги для кожного включення й умови однозначності переміщень при обході контура включення.

Напружений стан в околі кінців n -го включення описується тими ж залежностями, що і для одного включення [2], причому коефіцієнти інтенсивності напружень K_{1n}/K_{2n} визначають за формулами

$$K_{1n}^{\pm} - i K_{2n}^{\pm} = \mp \frac{h_n}{2\sqrt{\ell_n}} (U_n(\pm 1) - i \beta_n v_n(\pm 1)), \quad /10/$$

де

$$\left\| \begin{matrix} U_n(\pm 1) \\ v_n(\pm 1) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\| \begin{matrix} U_n(t_m) \\ v_n(t_m) \end{matrix} \right\| (-1)^z \operatorname{tg}^{\mp 1} \left(\frac{2m-1}{4M} \pi \right); \\ z = m+1 + (M+1)(1 \mp 1)/2.$$

Зробивши в /7/ або /8/ відповідний граничний перехід, одержимо розв'язок задачі для бездефектного тіла та тіла з тріщинами [3] і жорсткими включеннями [1].

Проведено числовий аналіз КІН при взаємодії двох включень однакової відносної жорсткості $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ у випадку, коли задані зсувні напруження на нескінченності. Обчислення проводили при таких значеннях параметрів задачі: $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, $h_1 = h_2 = h$, $h/\ell = 0,1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $z_1^0 = 0$.

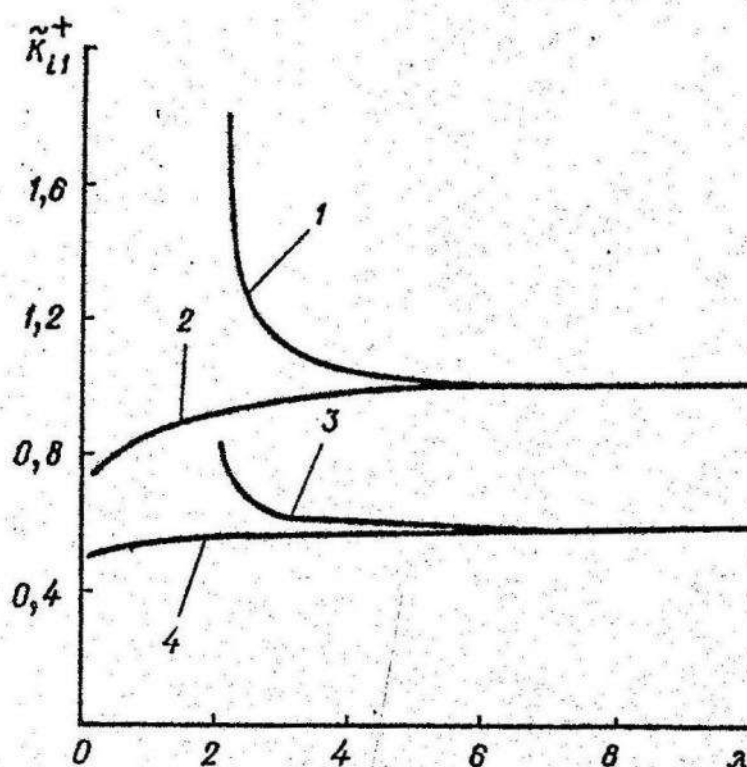


Рис. 2.

На рис. 2 показана залежність КІН $\tilde{K}_{i1}^+ = K_{i1}^+ / \sqrt{\ell} \tau$ ($i=1,2$) від відносної відстані між центрами включень $\lambda = d/\ell$ і d - відстань між центрами включень/. Криві 1, 3 побудовані для випадку, коли $z_2^0 = d$ і $\tau = \tau_{xz}^\infty$, а криві 2, 4 - для випадку $z_2^0 = id$, $\tau = \tau_{xz}^\infty$. Криві 1, 2 і 3, 4 характеризують R_{21}^+ відповідно, коли β дорівнює 10^5 і 10 . Зауважимо, що ті ж самі криві 1, 2 і 3, 4 характеризують $\tilde{K}_{11}^+$ відповідно при β , рівному 10^{-5} і $0,1$ у випадку, коли $\tau = \tau_{yz}^\infty$, при тих же параметрах, що і для $\tau = \tau_{xz}^\infty$.

Як впливає із графіків, КІН збільшуються, коли $z_2^0 = a$ і зменшуються, якщо $z_2^0 = id$. Взаємодія між включеннями починається при значенні параметра $\lambda < 5$.

Список літератури: І. Б е р е ж н и ц к и й Л.Т., Л е н ь М.П. Антиплоская деформація тела с жесткими включениями. - Проблемы прочности, 1975, № 8. 2. О п а н а с о в и ч В.К.; Д р а г а н М.С. Антиплоская деформація тіла з тонкоостінним пружним включенням. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1981, вип. 17. 3. П а н а с о в к В.В., С а в р у к М.П., Д а ц и ш и н А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - Киев: Наукова думка, 1976.

Стаття надійшла в редколегію 3.01.83

УДК 539.3.

М.Ф.Копитко, Я.Г.Савула

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНОК НУЛЬОВОЇ ГАУССОВОЇ КРИВИНИ

Розглянемо задачу знаходження власних форм і частот оболонок нульової гауссової кривини, геометрія яких описана у праці [4]. Для апроксимації розв'язку використаємо напіваналітичний метод скінченних елементів /НМСЕ/ [2, 3].

Задача пошуку n найменших частот і відповідних їм форм власних коливань НМСЕ зводиться до визначення n найменших власних значень і власних векторів системи рівнянь високого порядку N ($n \ll N$):

$$KU - \lambda MU = 0, \quad //1/$$

де K - матриця жорсткості; M - матриця маси оболонки; U - вектор невідомих коефіцієнтів; $\lambda = \omega^2$, ω - колова частота власних коливань.