Як випливає із графіків, КІН збільшуються, коли $z_2^0 = d$ і зменшуються, якщо $z_2^0 = id$. Взаємодія між включеннями починається при значенні параметра $\lambda < 5$.

Список літератури: 1. Бережницкий Л.Т., День М.П. Антиплоская деформация тела с жесткими включениями. – Проблемы прочности, 1975, № 8. 2. Опанасович В.К.; Драган М.С. Антиплоска деформація тіла з тонкостінним пружним включенням. – Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1981, вип. 17. 3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наукова думка, 1976.

Стаття надійшла в редколегію 3.01.83

УДК 539.3

М.Ф.Копитко, Я.Г.Савула

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНОК НУЛЬОВОЇ ГАУССОВОЇ КРИВИНИ

Розглянемо задачу знаходження власних форм і частот оболонок нульової гауссової кривини, геометрія яких описана у праці [4]. Для апроксимації розв"язку використовуємо напіваналітичний метод скінченних елементів /НМСЕ/ [2, 3].

Задача пошуку n найменших частот і відповідних їм форм власних коливань НМСЕ зводиться до визначення n найменших власних значень і власних векторів системи рівнянь високого порядку $N (n << N)$:

$$KU - \lambda MU = 0, \qquad /1/$$

де K – матриця жорсткості; M – матриця маси оболонки; U – вектор невідомих коефіцієнтів; $\lambda = \omega^2$, ω – колова частота власних коливань.

При розв"язуванні неповної проблеми власних значень для системи /I/ необхідно враховувати малу заповненість матриць K і M, їх велику розмірність N і те, що $n \ll N$.

Перераховані вимоги задовольняє метод, в основу якого покладена ідея одночасної ітерації в n-мірному підпросторі [5; 6]. Цей метод /його ще називають блочно-степеневим/ є узагальненням класичного степеневого методу.

Ідея цього методу полягає ось у чому. Виходячи з матриці U_{i-1}, складеної з n лінійно незалежних стовпців, які є наближенням для власних векторів, розв"язуємо систему рівнянь

$$KX_i = MU_{i-1}.$$

Пізніше розглядаємо n-вимірну задачу на власні значення вигляду

$$(X_i^T K X_i)Q = \nu (X_i^T M X_i)Q. \qquad /2/$$

Наближеними значеннями перших n власних чисел системи /I/ є власні значення системи /2/. Нова матриця U_i, яка дорівнює добутку матриці X_i на квадратну матрицю, складену із власних векторів системи /2/, це i-те наближення для власних векторів системи /I/. Доведено, що при $i \to \infty$ власні значення системи /2/ прямують до n перших власних значень системи /I/, а власні вектори U_i — до власних векторів системи /I/.

Описаний підхід до знаходження власних форм коливань і відповідних їм частот реалізований у вигляді комплексу програм на мові ФОРТРАН-ІУ для машини ЕС 1022 і апробований на ряді прикладів.

<u>Приклад I.</u> Розглянемо власні коливання прямокутної шарнірно опертої пластини товщини $h = 0{,}05$, ширини $a = 3{,}14$,

довжини b = I0 /коефіцієнт Пуассона ν = 0,3, модуль Юнга E = I, густина матеріалу ρ = I/.

Для n півхвиль по ширині пластинки і однієї півхвилі по довжині в табл. I наведені значення квадратів власних колових частот коливань ω^2. Дані табл. I дають змогу говорити про характер збіжності власних частот залежно від кількості скінченних елементів $N1$ на ширині пластинки.

Таблиця I

n	$\omega^2 \cdot 10^3$			
	[7]	$N1$ = 6	$N1$ = I2	$N1$ = 22
I	0,27635	0,27638	0,27568	0,269I4
2	3,8459	3,85I9	3,8457	3,84I9
3	I8,952	I9,099	I8,962	I89,947
4	59,333	6I,089	59,428	59,338

Приклад 2. Розглянемо власні коливання колової циліндричної оболонки товщини h = 0,05, радіуса R = I0, довжини ℓ = I0. На торцях оболонки задані умови шарнірного опирання. Для власних форм коливань з однією півхвилею по довжині оболонки і числом півхвиль, кратним восьми, по торцю у табл. 2 наведені значення квадратів власних колових частот при різній кількості елементів $N1$ по торцю.

Таблиця 2

$n/8$	$\omega^2 \cdot 10^3$				
	[I]	$N1$ = 6	$N1$ = I2	$N1$ = I8	$N1$ = 26
I	0,30343	0,55357	0,35975	0,32409	0,316I2
2	I,6326	2,6062	I,8684	I,7274	I,69I4
3	7,8609	9,9996	8,3873	8,0727	7,9879
4	24,4I7	28,556	25,423	24,854	24,705
5	37,960	37,964	37,962	37,958	37,955

Приклад 3. Дослідимо залежність частот і форм власних коливань циліндричного перекриття від виду напрямної. Довжина перекриття $\ell = 100$, ширина $a = 16\pi$, висота $b = 16$, товщина $h = 2$. Для різних видів напрямної у табл. 3 наведено шість перших власних частот коливань.

Таблиця 3

n	$\omega^2 \cdot 10^3$				
	коло	еліпс	парабола	косинусоїда	ланцюгова лінія
1	0,11526	0,08557	0,08890	0,08040	0,09624
2	0,24796	0,11035	0,27956	0,25979	0,27788
3	0,83809	0,46447	0,75335	0,64120	0,82903
4	1,07276	0,76558	0,82939	0,83782	0,83832
5	1,8487	1,4447	1,7605	1,6831	1,7900
6	2,3235	1,8898	2,0181	1,9951	2,0385

Список літератури: 1. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик Т.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1979. 2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. 3. Савула Я.Г., Флейшман Н.П., Шинкаренко Г.А. Метод расчета труб с произвольной криволинейной осью. – Сопротивление материалов и теория сооружений, 1978, вып. 38. 4. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. – Львов, 1981. 5. Снисаренко Т.В. Применение метода конечных элементов к расчету форм и частот собственных колебаний авиационных конструкций. – Уч. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та, 1981, 12, № 2. 6. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1976. 7. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970.

Стаття надійшла в редколегію 02.11.81