УДК 517.95.32

Б.В.Ковальчук

ДВОВИМІРНА СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо шар товщиною ℓ, в якому на відстані z_1 від граничної поверхні $z=0$ розміщена серединна поверхня чужорідного включення товщиною $2d$. На поверхнях $z=0$, $z=\ell$ шару задані температури як функції координати x, тобто

$$t\Big|_{z=0} = t_0(x), \quad t\Big|_{z=\ell} = t_\ell(x). \qquad /1/$$

Подамо теплопровідність шару як єдиного цілого у вигляді

$$\lambda(z) = \lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1)\, N(z), \qquad /2/$$

де λ_1, λ_0 – коефіцієнти теплопровідності основного матеріалу і включення;

$$N(z) = S_-(z - z_1 + d) - S_+(z - z_1 - d),$$

$$S_\pm(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0{,}5 \pm 0{,}5 & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Підставивши /2/ у рівняння теплопровідності неоднорідного тіла

$$\lambda(z)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(z)\frac{\partial t}{\partial z}\right] = 0, \qquad /3/$$

одержимо

$$\left[\lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1)N(z)\right]\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \lambda_1\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + (\lambda_0 - \lambda_1)\frac{\partial}{\partial z}\left[N(z)\frac{\partial t}{\partial z}\right] = 0. \qquad /4/$$

Оскільки включення тонке, то [1]

$$\lim_{d \to 0} \frac{N(z)}{2d} = \delta(z - z_1), \qquad /5/$$

де $\delta(z-z_1)$ – дельта-функція Дірака.

Ввівши зведену теплопровідність $\Lambda_0 = 2\lambda_0 d$ [2], з огляду на /5/ запишемо рівняння /4/ у вигляді

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = -\frac{\Lambda_0}{2\lambda_1}(1 - K_\lambda^{-1})\left[2\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\Big|_{z_1} \delta(z - z_1) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z_1+0} + \frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z_1-0}\right)\delta'(z - z_1)\right], \qquad /6/$$

де $K_\lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$, $\delta'(z-z_1) = \frac{d\delta(z-z_1)}{dz}$.

Застосуємо до рівняння /6/ перетворення Фур"є по x. В результаті одержимо рівняння

$$\frac{d^2 \bar{t}}{dz^2} - \xi^2 \bar{t} = \frac{\Lambda_0}{2\lambda_1}(1 - K_\lambda^{-1})\left[2\xi^2 \bar{t}\Big|_{z_1} \delta(z - z_1) - \right.$$

$$\left. - \left(\bar{t}'\Big|_{z_1+0} + \bar{t}'\Big|_{z_1-0}\right)\delta'(z - z_1)\right], \qquad /7/$$

де ξ – параметр перетворення Фур"є.

При цьому граничні умови /1/ записуємо як

$$\bar{t}\Big|_{z=0} = \bar{t}_0, \quad \bar{t}\Big|_{z=l} = \bar{t}_l. \qquad /8/$$

Загальний розв"язок рівняння /7/ має вигляд

$$\bar{t} = A\,ch|\xi|z + B\,sh|\xi|z - \frac{\Lambda_0}{2\lambda}(1 - K_\lambda^{-1})\left[|\xi|\bar{t}\Big|_{z_1} e^{-|\xi||z-z_1|} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\bar{t}'\Big|_{z_1+0} + \bar{t}'\Big|_{z_1-0}\right)e^{-|\xi||z-z_1|} sign(z - z_1)\right], \qquad /9/$$

де сталі A і B потрібно визначати із граничних умов /8/.

Продиференціювавши /9/ по z, маємо

$$\frac{d\bar t}{dz}=|\xi|(A\,sh|\xi|z+B\,ch|\xi|z)+\frac{\Lambda_0}{2\lambda_1}(1-K_\lambda^{-1})\Big\{\xi^2\bar t\Big|_{z_1}e^{-|\xi||z-z_1|}sign(z-z_1)+$$

$$+\left(\bar t'\Big|_{z_1+0}+\bar t'\Big|_{z_1-0}\right)\left[\frac{1}{2}|\xi|e^{-|\xi||z-z_1|}-\delta(z-z_1)\right]\Big\}. \qquad /10/$$

Із /9/ і /10/ знаходимо

$$\bar t\Big|_{z_1}=\frac{A\,ch|\xi|z_1+B\,sh|\xi|z_1}{1+\mathcal{L}(|\xi|)}, \qquad /11/$$

$$\bar t'\Big|_{z_1+0}+\bar t'\Big|_{z_1-0}=\frac{2|\xi|(A\,sh|\xi|z_1+B\,ch|\xi|z_1)}{1-\mathcal{L}(|\xi|)}, \qquad /12/$$

де $\mathcal{L}(|\xi|)=\dfrac{|\xi|\Lambda_0}{2\lambda_1}\left(1-K_\lambda^{-1}\right)$.

Згідно з граничними умовами /8/ одержуємо таку систему алгебраїчних рівнянь:

$$A\left[1+(M\,sh|\xi|z_1-\mathcal{K}\,ch|\xi|z_1)e^{-|\xi|z_1}\right]+$$

$$+B(M\,ch|\xi|z_1-\mathcal{K}\,sh|\xi|z_1)e^{-|\xi|z_1}=\bar t_0, \qquad /13/$$

$$A\left[ch|\xi|l-(M\,sh|\xi|z_1+\mathcal{K}\,ch|\xi|z_1)e^{-|\xi|(l-z_1)}\right]+$$

$$+B\left[sh|\xi|l-(M\,ch|\xi|z_1+\mathcal{K}\,sh|\xi|z_1)e^{-|\xi|(l-z_1)}\right]=\bar t_l, \qquad /14/$$

де

$$M=M(|\xi|)=\frac{\mathcal{L}(|\xi|)}{1-\mathcal{L}(|\xi|)};\quad \mathcal{K}=\mathcal{K}(|\xi|)=\frac{\mathcal{L}(|\xi|)}{1+\mathcal{L}(|\xi|)}$$

Звідки одержуємо

$$A = \Delta_0^{-1}\left\{\bar{t}_0\left[sh|\xi|\ell-(M ch|\xi|z_1+\mathcal{K} sh|\xi|z_1)e^{-|\xi|(\ell-z_1)}\right]-\right.$$
$$\left.-\bar{t}_\ell\,(M ch|\xi|z_1+\mathcal{K} sh|\xi|z_1)e^{-|\xi|z_1}\right\}, \qquad /15/$$

$$B = \Delta_0^{-1}\left\{\bar{t}_0\left[(M sh|\xi|z_1+\mathcal{K} ch|\xi|z_1)e^{-|\xi|(\ell-z_1)}-ch|\xi|\ell\right]+\right.$$
$$\left.+\bar{t}_\ell\left[1+(M sh|\xi|z_1-\mathcal{K} ch|\xi|z_1)e^{-|\xi|z_1}\right]\right\}, \qquad /16/$$

де

$$\Delta_0 = \Delta_0(|\xi|) = sh|\xi|\ell-\frac{2\mathcal{Z}}{1-\mathcal{Z}^2}\,ch|\xi|(\ell-2z_1).$$

Підставивши тепер /11/, /12/, /15/, /16/ у /9/, після деяких перетворень маємо

$$\bar{\sigma} = \left[\Delta_0(|\xi|)\right]^{-1}\left\{\bar{t}_0\left[sh|\xi|(\ell-z)-M(|\xi|)ch|\xi|(z-z_1)e^{-|\xi|(\ell-z_1)}+\right.\right.$$
$$+\mathcal{K}(|\xi|)sh|\xi|(z-z_1)e^{-|\xi|(\ell-z_1)}+M(|\xi|)ch|\xi|(\ell-z)e^{-|\xi||z-z_1|}sign(z-z_1)-$$
$$-M(|\xi|)\mathcal{K}(|\xi|)e^{-|\xi|(|z-z_1|+\ell-z_1)}sign(z-z_1)+$$
$$\left.+M(|\xi|)\mathcal{K}(|\xi|)e^{-|\xi|(|z-z_1|+\ell-z_1)}-\mathcal{K}(|\xi|)sh|\xi|(\ell-z_1)e^{-|\xi||z-z_1|}\right]+$$
$$+\bar{t}_\ell\left[sh|\xi|z-\mathcal{K}(|\xi|)sh|\xi|(z-z_1)e^{-|\xi|z_1}-\right.$$
$$-\mathcal{K}(|\xi|)sh|\xi|z_1e^{-|\xi||z-z_1|}+$$
$$+2M(|\xi|)\mathcal{K}(|\xi|)S(z-z_1)e^{-|\xi|(z_1+|z-z_1|)}-$$

$$-M(|\xi|)ch|\xi|(z-z_1)e^{-|\xi|z_1}-M(|\xi|)ch|\xi|z_1e^{-|\xi||z-z_1|}sign(z-z_1)\Big];$$

/I7/

Перейшовши в /I7/ від трансформант до оригіналів, одержуємо розв"язок, який відповідає довільній зміні по координаті x температур граничних поверхонь неоднорідного шару.

У випадку, коли на поверхнях $z=0$, $z=\ell$ шару температури змінюються, наприклад, за законом

$$t_0=\theta_0\cos wx, \quad t_\ell=\theta_\ell\cos wx \qquad /I8/$$

розв"язок поставленої задачі має вигляд

$$t=[\Delta_0(\omega)]^{-1}\cos wx\Big\{\theta_0\Big[sh\,\omega(\ell-z)-M(\omega)ch\,\omega(z-z_1)e^{-\omega(\ell-z_1)}+$$

$$+\mathcal{K}(\omega)sh\,\omega(z-z_1)e^{-\omega(\ell-z_1)}+M(\omega)ch\,\omega(\ell-z)e^{-\omega|z-z_1|}sign(z-z_1)-$$

$$-M(\omega)\mathcal{K}(\omega)e^{-\omega(|z-z_1|+\ell-z_1)}sign(z-z_1)+M(\omega)\mathcal{K}(\omega)e^{(|z-z_1|+\ell-z_1)}-$$

$$-\mathcal{K}(\omega)sh\,\omega(\ell-z_1)e^{-\omega|z-z_1|}\Big]+\theta_\ell\Big[sh\,\omega z-\mathcal{K}(\omega)sh\,\omega(z-z_1)e^{-\omega z_1}-$$

$$-\mathcal{K}(\omega)sh\,\omega z_1e^{-\omega|z-z_1|}+2M(\omega)\mathcal{K}(\omega)\delta(z-z_1)e^{-\omega(z_1+|z-z_1|)}-$$

$$-M(\omega)ch\,\omega(z-z_1)e^{-\omega z_1}-M(\omega)ch\,\omega z_1e^{-\omega|z-z_1|}sign(z-z_1)\Big]\Big\},$$

/I9/

де

$$M(\omega)=\frac{\mathcal{Z}(\omega)}{1-\mathcal{Z}(\omega)};\quad K(\omega)=\frac{\mathcal{Z}(\omega)}{1+\mathcal{Z}(\omega)};$$

$$\Delta_0(\omega)=sh\,\omega\ell-\frac{2\mathcal{Z}(\omega)}{1-[\mathcal{Z}(\omega)]^2}ch\,\omega(\ell-2z_1).$$

При $z = z_1$ маємо

$$t\Big|_{z_1} = \frac{\cos \omega x}{2\Delta_0(\omega)} \left\{ \theta_0 \left[\frac{e^{\omega(\ell - z_1)}}{1 + \mathcal{Z}(\omega)} - \frac{e^{-\omega(\ell - z_1)}}{1 - \mathcal{Z}(\omega)} \right] + \right.$$

$$\left. + \theta_\ell \left[\frac{e^{\omega z_1}}{1 + \mathcal{Z}(\omega)} - \frac{e^{-\omega z_1}}{1 - \mathcal{Z}(\omega)} \right] \right\}. \qquad /20/$$

Зауважимо, що аналогічним способом можна визначити температурне поле в шарі з n тонкими включеннями.

Список літератури: I. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1968. 2. П і д с т р и г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Обобщенная термомеханика. - Киев: Наукова думка, 1976.

Стаття надійшла в редколегію 28.02.83

УДК 517.51 /517.88

Л.Є.Базилевич

ДОТИЧНІ КУЛІ Й АСИМПТОТИЧНА КРИВИНА

Нехай $\mathbb{R}^n$ - арифметичний евклідовий простір. Позначимо через $d(x,y)$ відстань між точками $x, y \in \mathbb{R}^n$, через $K(x,r)$ - відкриту кулю радіуса r з центром у точці $x \in \mathbb{R}^n$.

Дамо означення кривини довільної множини /слід відзначити, що ідея такого означення кривини належить І.Н.Песіну/.

Означення I. Множина $M \subset \mathbb{R}^3$ має в точці p кривину, коли точка p - неізольована точка множини M, і існує коло S таке, що $d(p', S) = o(d^2(p', p))$ при $p' \to p$, $p' \in M$.

Означення 2. Множина $M \subset \mathbb{R}^3$ має в точці p поверхневу кривину, коли p - неізольована точка множини M, і існує по-