При $z = z_1$ маємо

$$t\Big|_{z_1} = \frac{\cos \omega x}{2\Delta_0(\omega)} \left\{ \theta_0 \left[\frac{e^{\omega(\ell - z_1)}}{1+\mathcal{Z}(\omega)} - \frac{e^{-\omega(\ell - z_1)}}{1-\mathcal{Z}(\omega)} \right] + \right.$$

$$\left. + \theta_\ell \left[\frac{e^{\omega z_1}}{1+\mathcal{Z}(\omega)} - \frac{e^{-\omega z_1}}{1-\mathcal{Z}(\omega)} \right] \right\}. \qquad /20/$$

Зауважимо, що аналогічним способом можна визначити температурне поле в шарі з n тонкими включеннями.

Список літератури: I. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1968. 2. П і д с т р и г а ч Я.С., К о л я н о Ю.М. Обобщенная термомеханика. - Киев: Наукова думка, 1976.

Стаття надійшла в редколегію 28.02.83

УДК 517.51 /517.88

Л.Є.Базилевич

ДОТИЧНІ КУЛІ Й АСИМПТОТИЧНА КРИВИНА

Нехай $\mathbb{R}^n$ - арифметичний евклідовий простір. Позначимо через $d(x,y)$ відстань між точками $x, y \in \mathbb{R}^n$, через $K(x,r)$ - відкриту кулю радіуса r з центром у точці $x \in \mathbb{R}^n$.

Дамо означення кривини довільної множини /слід відзначити, що ідея такого означення кривини належить І.Н.Песіну/.

Означення I. Множина $M \subset \mathbb{R}^3$ має в точці p кривину, коли точка p - неізольована точка множини M, і існує коло S таке, що $d(p', S) = o(d^2(p', p))$ при $p' \to p$, $p' \in M$.

Означення 2. Множина $M \subset \mathbb{R}^3$ має в точці p поверхневу кривину, коли p - неізольована точка множини M, і існує поверхня $Q \in \varphi / \varphi$ - множина поверхонь другого порядку /така, що

$$d(p', Q) = O(d^2(p', p)) \quad \text{при} \quad p' \to p,\ p' \in M.$$

Якщо M - два рази диференційовна крива або поверхня, то означення I і 2 збігаються з прийнятими.

Означення 3. Множина M має у точці p асимптотичну /поверхневу/ кривину, коли існує така вимірна підмножина $N \subset M$ що N має в точці p /поверхневу/ кривину і ортогональна проекція множини N на дотичну /площину/ до M у точці p має точку p точкою зовнішньої густини.

Означення 4. Множина $M \subset \mathbb{R}^3$ має в точці $p \in M$ властивість A, якщо існує відкрита куля K така, що $p \in \partial K$ $K \cap M = \varnothing$.

Означення 5. Множина $M \subset \mathbb{R}^3$ має в точці $p \in M$ властивість B, коли існують дві відкриті кулі K_1 і K_2, $K_1 \not\subset K_2$, $K_2 \not\subset K_1$ такі, що $p \in \partial K_1 \cap \partial K_2$, $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$ і $(K_1 \cup K_2) \cap M = \varnothing$.

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що кулі K_1 і K_2 однакового радіусу.

Лема I. Нехай множина $M \subset \mathbb{R}^3$ у кожній своїй точці має властивість A, причому радіус r кулі K з означення 4 сталий для всіх точок $p \in M$, а напрям прямої, яка проходить через точку p і центр кулі K, утворює з напрямом осі OZ кут, не більший, ніж $\pi/8$, і $\operatorname{diam} M \leq \frac{r}{3}$. Тоді множина M розташована на поверхні Q, що має поверхневу кривину у всіх своїх точках, крім, можливо, множини точок двомірної хаусдорфової міри нуль.

Доведення. Нехай $A := \bigcup \{K_p \cap K(p, \frac{r}{3}) \mid p \in M\}$, $P(A)$ - проекція множини A на площину xOy, а Q - графік функції $f(x,y) = \{\min z \mid (x,y,z) \in A, (x,y) \in P(A)\}$. Поверхня Q має в кожній своїй точці властивість A, причому радіус куль K з означення 4 для всіх точок $p \in Q$ дорівное r, а кут між напрямком прямої, що проходить через точку p і центр кулі K, та осі OZ не перевищує числа $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Неважко перевірити, що функція f задовольняє умову Ліпшиця і є два рази диференційовною майже всюди на $P(A)$. Тому Q має поверхневу кривину в усіх своїх точках, крім, можливо, точок множини двомірної хаусдорфової міри нуль.

Теорема I. Нехай множина $M \subset \mathbb{R}^3$ має властивість A в усіх своїх точках, крім, можливо, точок множини двомірної хаусдорфової міри нуль. Тоді M має асимптотичну кривину в усіх своїх точках, крім, можливо, точок множини двомірної хаусдорфової міри нуль.

Доведення. Зобразимо множину M у вигляді $M \setminus L = \bigcup_i M_i$, де множини $\varphi_i(M_i)$ / φ_i – деяка ізометрія простору $\mathbb{R}^3$/ задовольняють умови леми I, а L – множина двомірної хаусдорфової міри нуль. За лемою I, кожна множина $\varphi_i(\bar{M}_i)$ розташована на поверхні Q_i, що є графіком функції $f_i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, яка має поверхневу кривину в усіх своїх точках, крім, можливо, точок множини L_i двомірної хаусдорфової міри нуль. Позначимо через N_i множину точок густини множини $P(\bar{M}_i)$. Множина $P(\bar{M}_i) \setminus N_i$ має плоску лебегову міру нуль [ж], а $\bar{M}_i \setminus \varphi_i^{-1}(f_i(N_i))$ – двомірну хаусдорфову міру нуль /функція f_i задовольняє умову Ліпшиця/. Тому множина M має асимптотичну кривину в усіх своїх точках, крім точок множини $L \cup (\bigcup_i (M_i \setminus \varphi_i^{-1}(f_i(N_i))))$ двомірної хаусдорфової міри нуль. Теорема доведена.

Нехай у точці p множина M має властивість B, і K_1, K_2 кулі з означення 5 радіусу R. Нехай R' – радіус кулі, для якої коло $\partial K_1 \cap \partial K_2$ – екватор. Через r_p позначимо мінімум двох чисел: R' і $\sqrt{R^2-(R')^2}$, а через ℓ_p –

ж Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.

пряму, що проходить через точку p і середину відрізка, який сполучає центри куль K_1 і K_2.

Лема 2. Нехай замкнена множина M має в усіх своїх точках властивість B, причому для всіх $p \in M$ числа $r_p = r\text{-}const$, кут між напрямом прямої ℓ_p і осі OZ не більший, ніж $\pi/8$, $diam\, M \leq r/3$. Тоді M розташована на кривій, що має кривину всюди, крім, можливо, точок множини довжини нуль.

Доведення. Нехай $A := \{(K_1 \cup K_2)_p \cap K(p, \frac{r}{3}) \mid p \in M\}$, де $(K_1 \cup K_2)_p$ – об"єднання куль K_1 і K_2, що відповідають точці p; $P(A)$ – проекція множини A на площину xOy а Q графік функції $f(x,y) = \{\min z \mid (x,y,z) \in A, (x,y) \in P(A)\}$. Площина Π_p, що проходить через точку p і центри куль K_1 і K_2 ділить всі точки множини M /крім точки p /на дві множини: N_1 і N_2. Приймемо

$$(\forall x \in M)((x < p \Leftrightarrow x \in N_1) \wedge (x > p \Leftrightarrow x \in N_2)).$$

Нехай $p' < p$ і N_1', N_2' – відповідні множини, утворені площиною $\Pi_{p'}$. З огляду на умови леми, перепозначаючи, коли потрібно, отримуємо, що $N_1' \subset N_1$ і $N_2' \supset N_2$. Приймемо

$$(\forall x \in M)((x < p' \Leftrightarrow x \in N_1') \wedge (x > p' \Leftrightarrow x \in N_2')).$$

Аналогічно робимо для точок $p' > p$. Відношення $<$ лінійно впорядковує множину M, і топологія порядку $<$ збігається з топологією, індукованою вкладенням $M \subsetneq \mathbb{R}^3$. Для всякої точки $p \in M$ приймемо $x_p := \inf\{x \in M \mid x > p\}$. Якщо $x_p \neq x$, то точки p і x_p з"єднуємо в просторі $\mathbb{R}^3 \setminus (K_1 \cup K_2 \cup K_1' \cup K_2')$, де K_1, K_2 – кулі з означення 5 для точки p, а K_1', K_2' – для точки p', найкоротшою два рази диференційовною кривою γ_p. Неважко бачити, що крива $\Gamma = M \cup (\cup\{\gamma_p \mid p \in M\})$ шукана. Лема доведена.

Теорема 2. Нехай множина $M \subset \mathbb{R}^3$ має властивість B в усіх своїх точках, крім, можливо, точок множини довжини нуль. Тоді M має асимптотичну кривину в усіх точках, крім, можливо, точок множини довжини нуль.

Доведення теореми 2 повторює доведення теореми I з заміною леми I на лему 2.

Зауважимо, що існує ніде не диференційовна крива /поверхня/, яка має у кожній точці властивість B /властивість A /.

Стаття надійшла в редколегію 28.02.83

УДК 517.946

В.М.Кирилич

ЗАДАЧА З НЕРОЗДІЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НА ПРЯМІЙ

Постановка задачі. Нехай G - криволінійний сектор, обмежений кривими ℓ_1 і ℓ_2, які задаються рівняннями $x=a(t)$ і $x=b(t)$ $(a(0)=b(0)=0,\ a(t)<b(t)\ \forall\ t>0)$.

В G розглядається гіперболічна система рівнянь

$$(D_t+\lambda_i D_x)u_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j+f_i(x,t),\ i=\overline{1,n}. \qquad /1/$$

Всі задані функції з класу $C(\overline{G})$. Припускаємо, що розв"язок $\xi=\varphi_i(\tau,x,t)$ задачі Коші $d\xi/d\tau=\lambda_i(\xi,\tau),\ \xi(t)=x,\ i=\overline{1,n}$ один для будь-якої точки $(x,t)\in G$ і може бути єдиним способом продовжений для всіх $\tau<t$, так, щоб точка $(\varphi_i(\tau,x,t)\tau)$ досягала границі області G. Відповідну інтегральну криву позначимо через $Q_i(x,t)$.

Припускаємо, що різниця $\lambda_i(x(t),t)-x'(t)$ не має при $t>0$ нулів, і позначимо через K^{+i} сукупність індексів $i,(i=\overline{1,p+q}$, $0<p,q<n)$, для яких ця різниця додатна при $x=a(t)$, а