Теорема 2. Нехай множина $M \subset \mathbb{R}^3$ має властивість $B$ в усіх своїх точках, крім, можливо, точок множини довжини нуль. Тоді $M$ має асимптотичну кривину в усіх точках, крім, можливо, точок множини довжини нуль.

Доведення теореми 2 повторює доведення теореми I з заміною леми I на лему 2.

Зауважимо, що існує ніде не диференційовна крива /поверхня/, яка має у кожній точці властивість $B$ /властивість $A$ /.

Стаття надійшла в редколегію 28.02.83

УДК 517.946

В.М.Кирилич

# ЗАДАЧА З НЕРОЗДІЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НА ПРЯМІЙ

Постановка задачі. Нехай $G$ – криволінійний сектор, обмежений кривими $\ell_1$ і $\ell_2$, які задаються рівняннями $x=a(t)$ і $x=b(t)$ $(a(0)=b(0)=0,\ a(t)<b(t)\ \forall\ t>0)$.

В $G$ розглядається гіперболічна система рівнянь

$$(D_t+\lambda_i D_x)u_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_j+f_i(x,t),\ i=\overline{1,n}. \qquad /1/$$

Всі задані функції з класу $C(\overline{G})$. Припускаємо, що розв"язок $\xi=\varphi_i(\tau,x,t)$ задачі Коші $d\xi/d\tau=\lambda_i(\xi,\tau),\ \xi(t)=x,\ i=\overline{1,n}$ один для будь-якої точки $(x,t)\in G$ і може бути єдиним способом продовжений для всіх $\tau<t$, так, щоб точка $(\varphi_i(\tau,x,t)\tau)$ досягала границі області $G$. Відповідну інтегральну криву позначимо через $Q_i(x,t)$.

Припускаємо, що різниця $\lambda_i(x(t),t)-x'(t)$ не має при $t>0$ нулів, і позначимо через $K^{+i}$ сукупність індексів $i,(i=\overline{1,p+q}$, $0<p,q<n)$, для яких ця різниця додатна при $x=a(t)$, а

через $K^-$ сукупність індексів $i$, $(i=\overline{p+1,n})$, для яких вона від"ємна при $x=b(t)$/. Приймемо $K^{\pm}=K^+\cap K^-$.

В області $G$ потрібно знайти узагальнений розв"язок системи /I/, який на кривих $\ell_1$ і $\ell_2$ задовольняє задані граничні умови

$$\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}(t)u_j(a(t),t)+\beta_{ij}(t)u_j(b(t),t))=h_i(t),\qquad /2/$$
$$i=\overline{1,n+q},$$

де $\alpha_{ij}(t);\ \beta_{ij}(t);\ h_i(t)\in C(\mathbb{R}_+)$.

Відзначимо, що коли $q=0$, або $p=n$, то задача /I/, /2/ перетворюється в задачу Коші для системи /I/ з початковими умовами на кривій $\ell_1$ чи $\ell_2$. Задачі без початкових умов для гіперболічних систем типу /I/ вивчені у працях [2], [3].

Нехай

$$\alpha_1(t)=\|\alpha_{ij}(t)\|,\ j\in K^+,$$
$$\beta_1(t)=\|\beta_{ij}(t)\|,\ j\in K^-,$$
$$\beta_2(t)=\|-\beta_{ij}(t)\|,\ j\in K^+\setminus K^{\pm},\quad (i=\overline{1,n+q})$$
$$\alpha_2(t)=\|-\alpha_{ij}(t)\|,\ j\in K^-\setminus K^{\pm},$$
$$A(t)=\|\alpha_1(t)\ \ \beta_1(t)\|,$$
$$B(t)=\|\beta_2(t)\ 0\ \alpha_2(t)\|.$$

Припускаємо, що

$$\det A(t)\neq 0\quad \forall t\geq 0,\qquad /3/$$
$$|A(0)^{-1}B(0)|<1,\qquad /4/$$
$$\sum_{j=1}^{n+q}b_{ij}(0)h_j(0)=0,\ i\in K^{\pm},\qquad /5/$$

де за норму матриці вибирають одну зі звичайних її норм, а $b_{ij}(0)$ – елементи матриці $[I-A(0)^{-1}B(0)]^{-1}A(0)^{-1}$.

Згідно з неперервністю завжди знайдеться таке $\varepsilon>0$, що $|A(t)^{-1}B(t)|<1 \; \forall t\in[0,\varepsilon]$.

<u>Існування і єдиність узагальненого розв"язку</u>. Введемо допоміжні функції

$$v_i^a(t)=u_i(a(t),t),\ i\in K^+,\ v_i^b(t)=u_i(b(t),t),\ i\in K^-.$$

Праву частину системи /I/ позначимо через $F_i(x,t)$. Згідно з розподілом знаків різниці $\lambda_i(x(t),t)-x'(t)$ характеристики, що виходять з точки $(0,0)$, розподіляють $G$ на компоненти $G_i,\ i\in K^{\pm}$, пронумеровані справа наліво.

Інтегруючи $i$-те рівняння системи /I/ вздовж характеристики $Q_i(x,t),\ i=\overline{1,n}$, одержимо [I]:

$$u_i(x,t)=\omega_i(x,t)+\int_{t_i(x,t)}^{t}F_i(\varphi_i(\tau,x,t),\tau)\,d\tau,\ i=\overline{1,n}, \qquad /6/$$

де

$$\omega_i(x,t)=\begin{cases} v_i^a(t_i(x,t)),\ i\in K^+,\\ v_i^b(t_i(x,t)),\ i\in K^-;\end{cases}$$

$t_i(x,t)$ – ордината точки перетину характеристики $\xi=\varphi_i(\tau,x,t)$ з кривою $e_1$ при $i\in K^+$, або з кривою $e_2$ при $i\in K^-$.

Очевидно, що питання про існування і єдиність розв"язку задачі /I/, /2/ зводиться до однозначного знаходження функцій $\omega_i(x,t)$. Підставляючи /6/ у /2/, одержуємо систему для визначення функцій $v_i^a(t)$, $v_i^b(t)$:

$$\sum_{j=1}^{p+q}\alpha_{ij}(t)\,v_j^a(t)+\sum_{j=p+1}^{n}\beta_{ij}(t)\,v_j^b(t)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{p}\beta_{ij}(t)\,v_j^a(t_j(b(t),t))-$$

$$-\sum_{j=p+q+1}^{n} \alpha_{ij}(t)\, \vartheta_j^{b}(t_j(a(t),t))-$$

$$-\sum_{j=1}^{p} \beta_{ij}(t)\int_{t_j(b(t),t)}^{t} F_j(\varphi_j(\tau,b(t),t),\tau)\,d\tau -$$

$$-\sum_{j=p+q+1}^{n} \alpha_{ij}(t)\int_{t_j(a(t),t)}^{t} F_j(\varphi_j(\tau,a(t),t),\tau)\,d\tau + h_i(t),$$

$$i=\overline{1,n+q}. \qquad /7/$$

Враховуючи умову /3/, систему /7/ можна записати у такому вигляді:

$$\vartheta(t)=p(t)\vartheta+H(t,u), \qquad /8/$$

де

$$\vartheta(t)=col\,(\vartheta_1^{a}(t),\ldots,\vartheta_{p+q}^{a}(t),\vartheta_{p+1}^{b}(t),\ldots,\vartheta_n^{b}(t)),$$

$P(t)$ – оператор, норма якого при $t=0$ збігається з нормою матриці $A(0)^{-1}B(0)$; $H(t,u)$ – лінійний оператор типу Вольтерра, який легко визначити з системи /7/. За умовою /4/

$$\vartheta(t)=[I-P(t)]^{-1}H(t,u).$$

Підставивши знайдені $\vartheta_i^{a}(t)$, $\vartheta_i^{b}(t)$ в / 6/, одержимо систему інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно шуканих функцій $u_i$, яка розв"язується методом ітерацій. Розв"язок такої системи назвемо узагальненим неперервним розв"язком задачі /1/, /2/. Оскільки при переході через характеристики $Q_i(0,0), i\in K^{\pm}$ характер рівнянь системи /1/ змінюється, то для забезпечення неперервності розв"язку на характеристиках $\xi=\varphi_i(\tau,0,0),\ i\in K^{\pm}$ потрібно знаходити умови узгодження. Легко перевірити, що /5/ забезпечують дану вимогу. Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема. Нехай: I/ функції $\lambda_i(x,t)$, $a_{ij}(x,t)$, $f_i(x,t) \in C(\bar{G})$ ; 2/ $\alpha_{ij}(t)$, $\beta_{ij}(t)$, $h_i(t) \in C(\mathbb{R}_+)$; 3/ $a(t)$, $b(t) \in C(\mathbb{R}_+)$ ; 4/ виконуються умови /3/ – /5/.

Тоді задача /I/–/2/ має єдиний неперервний узагальнений розв"язок.

Зауваження. I. Підвищуючи гладкість відповідних функцій і вимагаючи умови узгодженості першого порядку в точці /0, 0/, можна довести існування і єдиність класичного розв"язку задачі /I/, /2/.

2. Глобальність розв"язку задачі /I/, /2/ випливає з того, що коли знайдено розв"язок при $t \leq \varepsilon$ , то для $t \geq \varepsilon$ одержуємо змішану задачу з початковими умовами при $t = \varepsilon$ . Така задача легко розв"язується викладеним тут методом.

Список літератури: I. А б о л и н я В.Э., М ы ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. – Уч. зап. Латв. ун-та, I958, 20, вып. 3. 2. М е л ь н и к З.О. Одна неклассическая граничная задача для гиперболической системы первого порядка с двумя независимыми переменными. – Дифференц. уравн., I98I, I7, № 6. 3. Holten R.P. Generalised Goursat Problem. – Pacif. J. Math., 1962, 12, №1.

Стаття надійшла в редколегію 28.02.83