

ISSN 0201-758X
ISSN 0320-6572

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

ПРИКЛАДНІ
ЗАДАЧІ
МАТЕМАТИКИ
І МЕХАНІКИ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК

22

1984



МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
ВИПУСК 22

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

Виходить з 1965 р.

ЛЬВІВ
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ВИДАВНИЧОГО ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1984

ББК 2211

П75

УДК 518

Вестн. Львов. ун-та, серия мех.-мат., вып. 22. Прикладные задачи математики и механики. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, 104 с. /На укр. яз./.

В Вестнике помещены статьи по численным методам решения уравнений математической физики и задач оптимизации, статические и динамические задачи механики сплошной среды.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Библиогр. списки в конце статей.

Редакційна колегія: проф., д-р техн. наук Д.В.Грилицький /відп. ред./, доц., канд. фіз.-мат. наук Ю.М.Щербина /відп. секр./, доц., канд. фіз.-мат. наук М.Я.Бартіш, доц., канд. фіз.-мат. наук А.І.Кардаш, проф., д-р техн. наук Н.П.Флейшман.

Адреса редакційної колегії:
290000, Львів, Університетська, 1, кафедра теорії оптимальних процесів.

Редакція науково-технічної літератури
Зав. редакцією М.П.Парцей

ВІ702050000-095
M225/04/-84

Замовне

С Львівський державний
університет, 1984

Ю.М.Щербіна, Б.М.Голуб

ЗБІЖНІСТЬ ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ
З ПАМ'ЯТТЮ ДЛЯ МІНІМІЗАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Розглянемо задачу

$$f(x) \rightarrow \min, x \in E^n \quad /1/$$

де E^n - n - мірний евклідов простір.

Для розв'язування задачі /1/ дослідимо ітераційний метод з пам'яттю [1, 2]

$$x_{n+1} = x_n - [f''(\bar{x}_n)]^{-1} f'(x_n), \quad /2/$$

$$\bar{x}_n = \begin{cases} x_0, & \text{якщо } n=0, \\ x_n - \frac{1}{2} [f''(\bar{x}_{n-1})]^{-1} f'(x_n), & \text{якщо } n=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Порядок збіжності цього методу дорівнює $1 + \sqrt{2} \approx 2,41$, тоді як збільшення кількості арифметичних операцій на кожній ітерації порівняно з методом Ньютона незначне [5].

Достатні умови збіжності методу дає наступна теорема.

Теорема. Нехай функція $f(x)$ сильно випукла на E^n , $f \in C^3$ і, крім того,

$$\|f'''(x)\| \leq R,$$

$$\|f'''(x) - f'''(y)\| \leq L \|x - y\|,$$

$$x, y \in E^n, R = \text{const} > 0, L = \text{const} > 0.$$

Нехай початкове наближення x_0 вибране таким, що

$$c \|f'(x_0)\| \leq m q, \quad /3/$$

де $\frac{Q}{\ell} = \alpha > 0$ - константа сильної випуклості; q - деяка константа, $0 < q < 1$; $\ell^2 = \frac{R^2}{m^2} + \frac{2}{3} \frac{L}{m}$.

Тоді існує послідовність $\{x_n\}$, визначена умовами /1/, яка збігається до однієї точки x_* мінімуму функції $f(x)$ на E^n , причому наведена оцінка

$$\|x_k - x_*\| \leq \ell^2 q^k, \quad k=0,1,2,\dots, \quad /4/$$

де $D_0=1$; $D_1=2$; $D_j=2D_{j-1}+D_{j-2}$; $j=2,3,4,\dots$

Доведення. Існування і єдиність точки x_* випливає з властивостей сильно випуклих функцій [3]. Доведемо оцінку /4/.

Оскільки $f(x)$ - сильно випукла, то

$$\langle f''(x)y, y \rangle \geq m \|y\|^2$$

Звідси [3]

$$\| [f''(x)]^{-1} \| \leq \frac{1}{m}, \quad x \in E^n. \quad /5/$$

Введемо числові послідовності

$$a_k = \|f'(x_k)\|, \quad \theta_{k+1} = \|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k\|, \quad k=0,1,2,\dots$$

Покажемо, що

$$a_k \leq \frac{m}{\ell} q^k, \quad k=0,1,2,\dots, \quad /6/$$

а також

$$\theta_k \leq \frac{2}{m} a_{k-1}, \quad k=1,2,3,\dots \quad /7/$$

При $k=0$ нерівність /6/ випливає із умови /3/.

Доведемо нерівність /6/, /7/ при $k=1$. Із /2/ запишемо

$$f'(x_1) = f'(x_0) + f''(\bar{x}_0)(x_1 - x_0). \quad /8/$$

Розкладаючи у правій частині формули /8/ $f'(x_1)$ за формулою Тейлора [4], дістаємо

$$f'(x_1) = f'(x_0) + f''(x_0)(x_1 - x_0) +$$

$$+ \int_0^1 (1-t) f'''(x_0 + t(x_1 - x_0)) (x_1 - x_0)^2 dt - \\ - f'(x_0) - f''(\bar{x}_0)(x_1 - x_0).$$

/9/

Використовуючи умови теореми і те, що $\bar{x}_0 = x_0$, з /9/ записуємо

$$\|f'(x_1)\| \leq \frac{R}{2} \|x_1 - x_0\|^2,$$

звідки

$$a_1 = \|f'(x_1)\| \leq \frac{m}{\ell} q^2 = \frac{m}{\ell} q^{D_1}.$$

Далі

$$b_1 = \|\bar{x}_1 - \bar{x}_0\| = \|\bar{x}_1 - x_0\| \leq \frac{2}{m} a_0.$$

Нехай нерівності /6/, /7/ є правильними при деякому $K \geq 2$.

Із умови /2/ маємо

$$f'(x_{K+1}) = f'(x_{K+1}) - f'(x_K) - f''(\bar{x}_K)(x_{K+1} - x_K). \quad /10/$$

Розкладемо $f'(x_{K+1})$ за формулою Тейлора [4]:

$$f'(x_{K+1}) = f'(x_K) + f''(x_K)(x_{K+1} - x_K) + \\ + \int_0^1 (1-t) f'''(x_K + t(x_{K+1} - x_K)) (x_{K+1} - x_K)^2 dt + \\ + \frac{1}{2} f'''(x_K)(x_{K+1} - x_K)^2 - \frac{1}{2} f'''(x_K)(x_{K+1} - x_K)^2 = \\ = f'(x_K) + f''(x_K)(x_{K+1} - x_K) + \frac{1}{2} f'''(x_K)(x_{K+1} - x_K)^2 + \\ + \int_0^1 (1-t) [f'''(x_K + t(x_{K+1} - x_K)) - f'''(x_K)] (x_{K+1} - x_K)^2 dt.$$

Підставляючи отриманий розклад у праву частину формули /10/

і ще раз скориставшись формулою Тейлора, записуємо

$$f'(x_{K+1}) = f''(x_K)(x_{K+1} - x_K) + \frac{1}{2} f'''(x_K)(x_{K+1} - x_K)^2 + \dot{J}_{1,K} - \\ - f''(x_K)(x_{K+1} - x_K) - f'''(x_K)(\bar{x}_K - x_K)(x_{K+1} - x_K) - \dot{J}_{2,K},$$

$$\text{де } j_{1,k} = \int_0^1 (1-t) [f'''(x_k + t(x_{k+1} - x_k)) - f'''(x_k)] (x_{k+1} - x_k)^2 dt;$$

$$j_{2,k} = \int_0^1 [f'''(x_k + t(\bar{x}_k - x_k)) - f'''(x_k)] (\bar{x}_k - x_k) (x_{k+1} - x_k) dt.$$

Тоді з /2/ маємо

$$f'(x_{k+1}) = -\frac{1}{2} f'''(x_k) [f''(\bar{x}_k)]^{-1} f'(x_k) (x_{k+1} - x_k) + \\ + \frac{1}{2} f'''(x_k) [f''(\bar{x}_{k-1})]^{-1} f'(x_k) (x_{k+1} - x_k) + j_{1,k} - j_{2,k}.$$

Далі

$$f'(x_{k+1}) = \frac{1}{2} f'''(x_k) \{ [f''(\bar{x}_{k-1})]^{-1} [f''(\bar{x}_k)]^{-1} \} f'(x_k) (x_{k+1} - x_k) + \\ + j_{1,k} - j_{2,k} = \frac{1}{2} f'''(x_k) [f''(\bar{x}_{k-1})]^{-1} \{ f''(\bar{x}_k) - f''(\bar{x}_{k-1}) \} \times \\ \times [f''(\bar{x}_k)]^{-1} f'(x_k) (x_{k+1} - x_k) + j_{1,k} - j_{2,k} = \\ = \frac{1}{2} f'''(x_k) [f''(\bar{x}_{k-1})]^{-1} \{ f''(\bar{x}_k) - f''(\bar{x}_{k-1}) \} \times \\ \times (x_{k+1} - x_k)^2 + j_{1,k} - j_{2,k}.$$

Оцінимо, враховуючи /7/.

$$a_{k+1} = \|f'(x_{k+1})\| \leq \frac{1}{2} R \frac{1}{m} R b_k \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \\ + \frac{1}{6} L \|x_{k+1} - x_k\| + \frac{1}{2} L \|\bar{x}_k - x_k\|^2 \|x_{k+1} - x_k\| \leq \\ \leq \frac{R^2}{m^2} a_{k-1} \frac{1}{m^2} a_k^2 + \frac{1}{6} L \frac{1}{m^3} a_k^3 + \frac{1}{2} L \frac{1}{m^3} a_{k-1} a_k^2 \leq \\ \leq \left(\frac{R^2}{m^4} + \frac{2}{3} \frac{L}{m^3} \right) a_k^2 a_{k-1}$$

і остаточно

$$a_{k+1} \leq \frac{\ell^2}{m^2} a_k^2 a_{k-1}.$$

/II/

З /II/ і припущення індукції запишемо

$$a_{k+1} \leq \ell^2 \frac{1}{m^2} \frac{m^2}{\ell^2} q^{2D_k} \frac{m}{\ell} q^{D_{k-1}} = \\ = \frac{m}{\ell} q^{2D_k + D_{k-1}} = \frac{m}{\ell} q^{D_{k+1}}.$$

Отже, нерівність /6/ доведена.

Зараз легко показати

$$\theta_{k+1} = \|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k\| \leq \frac{2}{m} \alpha_k.$$

Далі, враховуючи $\|x_k - x_*\| \leq \alpha_k / m$ [3] і нерівність /6/, отримуємо остаточно

$$\|x_k - x_*\| \leq \theta^k q^D, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема доведена.

Зауваження. Для визначення порядку збіжності методу з нерівності /II/ записуємо рівняння $\rho = 2 + \frac{1}{\rho}$, де ρ - порядок збіжності. Звідси

$$\rho = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41.$$

Список літератури: 1. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв'язування функціональних рівнянь. - ДАН УРСР, серія А, 1968, 5. 2. Б а р т и ш М.Я., Щ е р б и н а Ю.Н. Об одном итерационном процессе решения нелинейного операторного уравнения. - Вычислительная и прикладная математика, 1972, вып. 16. 3. В а с и л ь е в Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980. 4. К а р т а н А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. - М.: Мир, 1971. 5. Ф о р с а й т Д., М о л е р К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. - М.: Мир, 1969.

Стаття надійшла в редколегію 14.04.82

М.В.Зук, А.Я.Дзвоник

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Узагальнимо метод Канторівича [1-4] для систем диференціальних рівнянь.

Розглянемо систему рівнянь другого порядку

$$L\mathcal{U} = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij}(P) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_j}) + R(P)\mathcal{U} = f(P) \quad /1/$$

при умовах

$$\mathcal{U}(P)|_{\Gamma} = 0. \quad /2/$$

Систему /1/ розглядатимемо в області D простору координат $(x_1, \dots, x_m)$, обмеженої достатньо гладкою поверхнею Γ яка виключає дві гіперплощини $x_1=a, x_1=b, a < b$; Γ_1 - поверхня Γ без вказаних гіперплощин; $P(x_1, \dots, x_m), Q(x_1, \dots, x_m)$ - точки відповідно m і $m-1$ - мірних просторів.

У системі /1/ - /2/ $\mathcal{U}(P) = (\mathcal{U}_1(P), \dots, \mathcal{U}_d(P)), f(P) = (f_1(P), \dots, f_d(P))$ d - компонентні вектор-функції; A_{ij}, R - матриці d -го порядку, елементи яких є функціями від змінних $x_1, \dots, x_m$.

Відносно заданих функцій припустимо, що $f(P)$ належить дійсному гільбертовому простору d -компонентних вектор-функцій $H = L_2(D)$ із нормою

$$\|f\|^2 = \int_D f^2(P) dP = \int_D \sum_{k=1}^d f_k^2(P) dP.$$

Матриці A_{ij} задовольняють наступні умови:

$$a/ \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$

б/ якщо б $_k$ не були d -компонентні вектори $t_1, t_2, \dots, t_m$

завжди наявна нерівність

$$\mu_0 \sum_{k=1}^m \|t_k\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^m A_{ij} t_j t_i \leq \mu_1 \sum_{k=1}^m \|t_k\|^2, \quad /3/$$

$\mu_0, \mu - \text{const} > 0$; тут крапка означає скалярне множення, $\| \|$ - довжину вектора.

Відносно матриці R припускаємо, що вона задовольняє умову

$$\beta_0 u^2 \leq Ru \cdot u \leq \beta_1 u^2. \quad /4/$$

За область визначення $D(L)$ оператора L приймаємо множину Δ - компонентних вектор-функцій, двічі неперервно диференційованих у замкнутій області $D = D + \Gamma$, які задовольняють крайові умови /2/.

Введемо оператор T , який визначається формулами

$$Tu \equiv - \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

$$u|_{\Gamma} = 0,$$

з $D(T) = D(L)$. Оператор T , як це випливає з нерівності Фрідрікса, додатно визначений

$$(Tu, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad \gamma - \text{const} > 0. \quad /5/$$

Позначимо через $H_0 \subset H$ енергетичний простір оператора T , тобто замкнуту лінійну оболонку $D(T)$ у метриці

$$[u, v]_0 = (Tu, v) = \int_D \sum_{j=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\rho,$$

$$\|u\|_0^2 = [u, u]_0.$$

Із нерівності /5/ у результаті граничного переходу для довільної вектор-функції $u \in H_0$ отримуємо

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_0. \quad /6/$$

Припускаємо, крім цього, що для заданої задачі /1/ - /2/ константи μ_0, β_0, γ такі, що для константи σ , яка визначається співвідношенням

$$\sigma = \begin{cases} \mu_0 + \frac{\beta_0}{\gamma^2} & , \text{ коли } \beta_0 \leq 0, \\ \mu_0 & , \text{ якщо } \beta_0 \geq 0, \end{cases} \quad /7/$$

виконується умова $\sigma > 0$.

Для довільних d -компонентних вектор-функцій $u, v \in H_0$ формально введемо білінійну форму

$$L(u, v) = \int_D \left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(p) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + R(p) u v \right] dp. \quad /8/$$

Встановимо тепер для довільної вектор-функції $u \in H_0$ виконання нерівності

$$L(u, u) \geq \sigma |u|_0^2. \quad /9/$$

Справді, для довільної вектор-функції $u \in H_0$, використовуючи /3/ і /4/, маємо

$$\begin{aligned} L(u, u) &= \int_D \left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij}(p) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} + R(p) u \cdot u \right] dp \geq \\ &\geq \mu_0 \int_D \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dp + \beta_0 \int_D u^2 dp = \mu_0 |u|_0^2 + \beta_0 \|u\|^2. \end{aligned}$$

Якщо $\beta_0 \leq 0$, то використовуючи /6/, отримуємо

$$L(u, u) \geq \mu_0 |u|_0^2 + \beta_0 \|u\|^2 \geq \mu_0 |u|_0^2 = \sigma |u|_0^2.$$

Отже, нерівність /9/ виконується. З неї випливає, що оператор задачі /1/ - /2/ додатно визначений.

Аналогічним чином встановлюється, що для довільної вектор-функції $u \in H_0$ виконується нерівність

$$L(u, u) \leq \eta |u|_0^2, \quad /10/$$

де η визначається співвідношенням

$$\eta = \begin{cases} \mu_1 + \frac{\beta_1}{\gamma^2} & , \text{ якщо } \beta_1 \geq 0, \\ \mu_1 & , \text{ коли } \beta_1 < 0. \end{cases} \quad /11/$$

Таким чином, для довільної вектор-функції $u(p) \in H_0$ справедлива нерівність

$$\sigma |u|_0^2 \leq L(u, u) \leq \eta |u|_0^2, \quad /12/$$

де σ і η визначаються відповідно співвідношеннями /7/ і /11/.

Узагальненим розв'язком задачі /1/ - /2/ називається 1 -компонентна вектор-функція $u \in H_0$, для якої виконується тотожність

$$L(u, v) = \int_D \left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + R u \cdot v \right] dP = \int_D f \cdot v dP \quad /13/$$

при довільній вектор-функції $v(P) \in H_0$.

Якщо $v(P)$ довільна неперервно диференційовна в D вектор-функція, дорівнює нулеві на границі Γ області D , а $u(P)$ - двічі неперервно диференційовна в D вектор-функція, що дорівнює нулеві на границі Γ області D і всі елементи матриць A_{ij} , R і вектор-функція $f(P)$ в системі /1/ достатньо гладкі, то /1/ - /2/ і відношення /13/ еквівалентні. З /1/ - /2/ випливає /13/, а з /13/ випливає /1/ - /2/. Тому введений узагальнений розв'язок задачі /1/ - /2/ є природнім розширенням класичного поняття розв'язку задачі /1/ - /2/. Відомо, що виконання умови /13/ забезпечує існування та єдиність узагальненого розв'язку [1].

Задачу /1/ - /2/ розв'язуємо методом Канторонича, згідно з яким наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^4 C_{k\ell}(x_i) \varphi_{k\ell}(P), \quad /14/$$

де $u_n(P) = (u_{n1}(P), \dots, u_{nm}(P))$; $\varphi_{k\ell}(P)$ ($k=1, 2, \dots, n$; $\ell=1, 2, \dots, 4$) - попередньо вибрані лінійно незалежні в Γ 1 -компонентні вектор-функції, для яких виконуються умови

$$\varphi_{k\ell}(P)|_{\Gamma} = 0.$$

Їх виберемо таким чином, щоб система функцій $\{x_p(x_i) \varphi_{k\ell}(P)\} \in H_0$ ($k, p=1, 2, \dots; \ell=1, 2, \dots, 4$) була повною системою лінійно незалежних функцій у просторі H_0 , при цьому система функцій $\{x_p(x_i)\}$ задовольняє умови

$$x_p(x_i)|_{x_i=a} = x_p(x_i)|_{x_i=b} = 0, \quad p=1, 2, 3, \dots$$

Невідомі коефіцієнти $C_{k\ell}(x_1)$ визначаємо з системи

$$\int_{D_{x_1}} (Lu_n - f) \varphi_{k\ell}(p) dQ = 0, \quad /15/$$

$$C_{k\ell}(x_1)|_{x_1=\alpha} = C_{k\ell}(x_1)|_{x_1=\beta} = 0, \quad k=1,2,\dots,n; \ell=1,2,\dots,d, \quad /16/$$

де D_{x_1} - переріз області D гіперплощиною $x_1 = \text{const}$.

Система /15/ зводиться до лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно $C_{k\ell}(x_1)$.

Введемо поняття узагальненого розв'язку для системи методу Канторовича /15/ - /16/. Позначимо через $H_n \subset H$ простір d -компонентних функцій вигляду

$$u_n(p) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^d a_{k\ell}(x_1) \varphi_{k\ell}(p),$$

де $u_n(p) = (u_{n1}(p), \dots, u_{nd}(p))$. Нехай для деякої вектор-функції $u_n(p) \in H_n \cap H_0$ справедлива тотожність

$$L(u_n, g_n) \equiv \int_D \left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial g_n}{\partial x_i} + R u_n, g_n \right] dP = \int_D f g_n dP, \quad /17/$$

в якій $g_n(p)$ - довільна вектор-функція із $H_n \cap H_0$. Тоді вектор-функція $u_n(p)$ називається узагальненим розв'язком системи методу Канторовича /15/ - /16/.

Покажемо тепер, що узагальнений розв'язок системи методу Канторовича /15/ - /16/ існує. Для цього, розв'язуючи задачу /1/ - /2/, застосуємо метод Бунова-Гальоркіна, згідно з яким наближений розв'язок $u_n^t(p)$ шукаємо у вигляді

$$u_n^t(p) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^d \sum_{p=1}^t C_{k\ell}^p \chi_p(x_1) \varphi_{k\ell}(p), \quad /18/$$

де $u_n^t = (u_{n1}^t(p), \dots, u_{nd}^t(p))$. Невідомі коефіцієнти $C_{k\ell}^p$ визначаємо зі системи

$$L(u_n^t, \chi_p \varphi_{k\ell}) \equiv \int_D \left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u_n^t}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\chi_p(x_1) \varphi_{k\ell}(p)) + R u_n^t \chi_p(x_1) \varphi_{k\ell}(p) \right] dP = \int_D f \chi_p(x_1) \varphi_{k\ell}(p) dP, \quad k=1,2,\dots,n; \ell=1,2,\dots,d; p=1,2,\dots,t, \quad /19/$$

яка зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів C_{kl}^p .

Позначимо через $H_n^t \subset H_0$ простір функцій вигляду

$$h_n^t(p) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^1 \sum_{p=1}^t \theta_{kl}^p x_p(x_i) \varphi_{kl}(p),$$

де θ_{kl}^p - довільні числа. Тоді на основі системи /19/ для довільного елемента $g_n^t(p) \in H_n^t$ маємо

$$I(u_n^t, g_n^t) = \int_D \left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u_n^t}{\partial x_j} \frac{\partial g_n^t}{\partial x_i} + R u_n^t g_n^t \right] d\rho = \int_D f g_n^t d\rho. \quad /20/$$

Система /19/ має єдиний узагальнений розв'язок, оскільки з огляду на умову /12/ одержуємо

$$I(u_n^t, u_n^t) = \int_D \left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u_n^t}{\partial x_j} \frac{\partial u_n^t}{\partial x_i} + R u_n^t u_n^t \right] d\rho \geq \sigma |u_n^t|_0^2, \quad /21/$$

звідки випливає, що детермінант системи /19/ відмінний від нуля.

Покажемо тепер, що послідовність розв'язків $\{u_n^t\}$ системи рівнянь /19/ методу Бубнова-Гальоркіна слабо збігається в просторі H_0 до узагальненого розв'язку системи методу Канторовича /15/ - /16/.

Для цього встановимо спочатку обмеженість послідовності $\{u_n^t\}$ у просторі H_0^t . Використовуючи нерівність /21/ і співвідношення /20/ при $g_n^t = u_n^t$, маємо $|u_n^t|_0^2 \leq \frac{1}{\sigma} I(u_n^t, u_n^t) = \frac{1}{\sigma} \int_D f \cdot u_n^t d\rho \leq \frac{1}{\sigma} \|f\| \|u_n^t\|$.

Звідси, враховуючи нерівність /6/, одержуємо $|u_n^t|_0 \leq \frac{1}{\sigma} \|f\|$.

Із останньої нерівності випливає, що з послідовності $\{u_n^t\}$ можна виділити підпослідовність $\{u_{n_\alpha}^t\}$, яка при $t_\alpha \rightarrow \infty$ слабо збігається в просторі $H_n \cap H_0$ і, тим більше в просторі $H_n \cap H$, принаймні до однієї граничної точки $u_n \in H_n \cap H_0$.

Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що вся послідовність $\{u_n^t\}$ слабо збігається в просторі H_0 до u_n .

Оскільки для довільного елемента $g_n(p) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^1 a_{kl}(x_i) \varphi_{kl}(p) \in H_n \cap H_0$, можна побудувати послідовність елементів

$g_n^t(\rho) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^t \sum_{p=1}^t a_{k\ell}^p \chi_p(x_i) \varphi_{k\ell}(\rho) \in H_n^t \subset H_0$ де коефіцієнти $a_{k\ell}^p$ визначаються із системи

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^t \sum_{p=1}^t a_{k\ell}^p [\chi_p(x_i) \varphi_{k\ell}(\rho), \chi_\tau(x_i) \varphi_{\tau\ell}(\rho)]_0 = [g_n(\rho), \chi_\tau(x_i) \varphi_{\tau\ell}(\rho)]_0, \quad /22/$$

$$\tau = 1, 2, \dots, n; \quad \tau = 1, 2, \dots, t;$$

таку, що $|g_n - g_n^t|_0 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Зафіксувавши елемент $g_n \in H_n \cap H_0$, беремо у співвідношенні /20/ елемент $g_n^t \in H_n^t$, коефіцієнти $a_{k\ell}^p$ якого визначають із системи /22/. Тепер у співвідношенні /20/ можемо перейти до границі при $t \rightarrow \infty$. При цьому дістанемо рівність

$$Z(u_n, g_n) = \int_D \left[\sum_{i,j=1}^m A_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial g_n}{\partial x_i} + R u_n g_n \right] d\rho = \int_D f g_n d\rho,$$

справедливу для довільної вектор-функції $g_n(\rho) = (g_{n1}(\rho), \dots, g_{ns}(\rho)) \in H_n \cap H_0$. Єдиність розв'язку забезпечується виконанням умови /12/.

Дійсно, нехай $u_n(\rho)$ і $w_n(\rho)$ - два узагальнені розв'язки системи методу Канторовича /15/ - /16/. Для них, враховуючи тожність /17/, при $g_n = u_n - w_n$ відповідно маємо

$$Z(u_n, u_n - w_n) = \int_D f(u_n - w_n) d\rho,$$

$$Z(w_n, u_n - w_n) = \int_D f(u_n - w_n) d\rho.$$

Віднімаючи від першої рівності другу і враховуючи співвідношення /12/, дістаємо

$$0 = Z(u_n - w_n, u_n - w_n) \geq \epsilon |u_n - w_n|_0^2.$$

Звідси випливає, що $u_n \equiv w_n$. Таким чином, система методу Канторовича /15/ - /16/ має єдиний узагальнений розв'язок

$u_n(\rho) \in H_n \cap H_0$. Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема. Якщо матриці A_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, m$) системи /1/ такі, що виконується умова /12/, то для довільної вектор-функції $f(\rho) = (f_1(\rho), \dots, f_s(\rho)) \in H$ задача /1/ - /2/ має єдиний узагальнений

розв'язок $u(p) = (u_1(p), \dots, u_n(p)) \in H$ і при довільному n система методу Канторовича /15/ - /16/ - єдиний узагальнений розв'язок $u_n(p) = (u_{n1}(p), \dots, u_{nd}(p)) \in H_n \cap H_0$.

Список літератури: 1. В а р г а Р. Функціональний аналіз і теорія апроксимації в численному аналізі. - М., 1974. 2. В л а - с о в а З.А. Розв'язок задачі Дирихле методом приведення до звичайних дифференціальних рівнянь. - В кн.: Науч. тр. Ленинград. ін-та текстильної і легкої пром-ти, 1971, II. 3. К а н т о - р о в и ч Л.В. Приближенні методи вищого аналізу. - М., 1962. 4. Л у ч к а А.Ю., Ж у к М.В. Исследование скорости сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. - В кн.: Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. - К., 1975.

Стаття надійшла в редакцію 14.12.81

УДК 517.946

І.М.Дудзяний, В.М.Цимбал

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДЕЯКОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

В області $D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ розглянемо задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) u = f(x, t), \quad /1/$$

$$u(0, t) = 0, \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, u(l, t) = 0, u(x, 0) = 0, \quad /2/$$

де $\varepsilon > 0$ - малий параметр.

Умови однозначного розв'язку задачі /1/, /2/ встановлені у праці [6], там же наведені фізичні задачі, що приводять до математичних такого виду.

Припустимо, що виконуються умови:

1/ $a(x,t) > 0$, $b(x,t) > 0$ в області D ;

2/ функції, які входять в /1/, достатньо гладкі;

3/ $\frac{\partial^{i+j} f(0,0)}{\partial t^i \partial x^j} = \frac{\partial^{i+j} f(\ell,0)}{\partial t^i \partial x^j} = 0$ ($i=0, \dots, N+1, j=0, \dots, N+1$), де N - точність побудованої нижче асимптотики.

Методом прилежового шару [1, 2] побудуємо асимптотичне розвинення розв'язку задачі 1/, 2/. Розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(x,t) + \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \Pi_i(x,\tau) + \varepsilon \sum_{i=0}^{N+1} \varepsilon^i Q_i(\xi,t) + \varepsilon^{N+1} R_N, \quad /3/$$

де $\tau = t/\varepsilon$; $\xi = x/\varepsilon$ функції, що входять у /3/, визначаєм нижче.

Рівняння для знаходження регулярної частини асимптотики $\sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(x,t)$ одержуємо застосуванням стандартної процедури методу збурень

$$\begin{aligned} -a(x,t) \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial x^2} + b(x,t) \bar{u}_0 &= f(x,t) - a(x,t) \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x^2} + b(x,t) \bar{u}_i = \\ &= -\left(\frac{\partial \bar{u}_{i-1}}{\partial t} - \frac{\partial^3 \bar{u}_{i-1}}{\partial x^3} \right) \quad (i=1, \dots, N). \end{aligned} \quad /4/$$

Опишемо, як одержують рівняння для визначення $\Pi_i(x,\tau)$. В операторі L_ε зробимо регуляризуюче перетворення $\tau = t/\varepsilon$ і розвинемо всі коефіцієнти у скінченні стрічки Тейлора в околі $t=0$. Одержаний таким чином оператор позначимо через M_ε

Зрівнюючи в $M_\varepsilon \left(\sum_{i=0}^N \varepsilon^i \Pi_i(x, \tau) \right) = 0$ коефіцієнти при однакових степенях ε , дістаємо рівняння для визначення $\Pi_i(x, \tau)$ ($i = 0, \dots, N$)

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} - a(x, 0) \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x^2} + b(x, 0) \Pi_i = g_i(x, \tau), \quad /5/$$

де $g_0(x, \tau) \equiv 0$; $g_i(x, \tau)$ ($i = 1, \dots, N$) легко можна виписати явно і лінійно виразити через $\Pi_j(x, \tau)$ ($j < i$) та їх похідні.

Рівняння для визначення $Q_i(\xi, t)$ ($i = 0, \dots, N+1$), які служать для ліквідації нев'язки у виконанні граничних умов в околі границі $x=0$, одержуємо процедурою аналогічною наведеній вище для знаходження $\Pi_i(x, \tau)$ /регуляризуюче перетворення $\xi = x/\varepsilon$ /.

Тоді запишемо

$$\frac{\partial^3 Q_i}{\partial \xi^3} + a(0, t) \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \xi^2} = q_i(\xi, t) \quad (i = 0, \dots, N+1), \quad /6/$$

де $q_0(\xi, t) \equiv 0$, $q_i(\xi, t)$ ($i = 1, \dots, N+1$) легко можна зобразити у явному вигляді і лінійно виразити через $Q_j(\xi, t)$ ($j < i$) та їх похідні.

Умови, при яких слід розв'язувати рівняння /4/ - /6/, знаходимо за допомогою стандартної процедури з використанням /3/ і /2/, а також міркувань, що Π - і Q -функції повинні бути функціями типу прилежового шару в околі відповідних границь області D .

Тоді маємо

$$\bar{U}_0(0, t) = 0, \bar{U}_i(0, t) = -Q_{i-1}(0, t) \quad (i = 1, \dots, N); \bar{U}_i(\ell, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, N), \quad /7/$$

$$\Pi_i(x, 0) = -\bar{U}_i(x, 0) \quad (i = 0, \dots, N); \Pi_i(0, \tau) = \Pi_i(\ell, \tau) = 0 \quad (i = 0, \dots, N), \quad /8/$$

$$\frac{\partial Q_i(0, t)}{\partial \xi} = -\frac{\partial \bar{U}_i(0, t)}{\partial x} \quad (i = 0, \dots, N); \frac{\partial Q_{N+1}(0, t)}{\partial \xi} = 0, Q_i(\xi, t) \rightarrow 0 \quad \xi \rightarrow \infty \quad /9/$$

Отже, функції $\bar{u}_l(x, t)$ є розв'язками двоточкових задач для звичайних диференціальних рівнянь /4/, /7/. Функції $\Pi_l(x, \tau)$ визначають як розв'язки змішаних задач для параболічних рівнянь другого порядку /5/, /8/. $Q_l(\xi, t)$ ($l=0, \dots, N+1$) знаходять із задач /6/, /9/ для звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами / t є параметром/. З попереднього видно, що всі функції, які входять у /3/, можна знайти рекурентно у такій послідовності: $\bar{u}_0(x, t)$, $\Pi_0(x, \tau)$, $Q_0(\xi, t)$, $\bar{u}_1(x, t)$ і т.д.

Однозначна розв'язність двоточкових задач /4/, /7/ випливає з праці [5], а змішаних для параболічних рівнянь – з праці [4]. Звідси ж безпосередньо випливає і те, що функції $\Pi_l(x, \tau)$ – це функції типу примежового шару. Характеристичне рівняння $\lambda^3 + a(0, t)\lambda^2 = 0$, що відповідає диференціальному рівнянню /6/, має рівно один від'ємний корінь $\lambda = -a(0, t)$, тобто стільки ж скільки умов випадає при переході до виродженої задачі. Таким чином, виродження регулярне. Аналогічно легко показати [2], що функції $Q_l(\xi, t)$ ($l=0, \dots, N+1$) – це функції типу примежового шару.

Методом інтегралів енергії [3] одержана оцінка

$$\| R_N(x, t, \varepsilon) \|_{L_2(D)} \leq C,$$

де константа C не залежить від ε , що і доводить асимптотичну коректність розвинення /3/.

Результат роботи сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. При виконанні умов I/-3/ розв'язок задачі /1/, /2/ допускає асимптотичне розвинення /3/, де $\bar{u}_l(x, t)$ – розв'язки задач /4/, /7/; функції параболічного примежового шару визначають в /5/, /8/; функції звичайного примежового шару – це розв'язки задач /6/, /9/.

Список літератури: І. В а с и л ь е в а А.Б., Б у т у з о в В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных систем. М.: Наука, 1980.

ценных уравнений. - М.: Наука, 1973. 2. Вишик М.И., Лютерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Усп. мат. наук, 1957, 12, № 5. 3. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. 4. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. - М.: Мир, 1968. 5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Мир, 1970. 6. Kattabriga L. Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari. - Ann. Scuola norm. super. Pisa (sci. fis. e. mat.), 1959, 13, №2.

Стаття надійшла в редакцію 14.12.81

УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко, Михайло Д.Мартиненко

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗІ ЗМІННИМИ

КОЕФІЦІЄНТАМИ

Нехай D - область тривимірного евклідового простору E_3 обмежена поверхнею Ляпунова S , $\Pi = \{(x, t): x \in D, -\infty < t \leq T\}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. В області Π шукається обмежений при $t > -\infty$ розв'язок рівняння

$$1.1 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a(t) \Delta u + b(t)u,$$

що задовольняє на S умову

$$1.2 \quad u|_S = f(x, t),$$

де $f(x, t)$ - неперервна на S функція; $a(t)$, $b(t)$ - задані неперервні функції.

Має місце наступна теорема.

Теорема. Нехай

1/ $a(t) \geq a_0^2 > 0$, $b(t) \geq b_0^2 > 0$ a_0, b_0 -
сталі/, причому $a(t)$ - монотонна функція t при $-\infty < t \leq T$

та $\int_{-\infty}^t a(t) dt < +\infty$, $\int_{-\infty}^t b(t) dt < +\infty$;

2/ функція $f(x, t)$ неперервна на S та в області Π задовольняє умову

$$|f(x, t)| \leq C \exp \left\{ \int_{-\infty}^t b(t) dt + \beta_0' \right\} \quad (C, \beta_0' = \text{const});$$

3/ поверхня S задовольняє умову

$$C \iint_S \frac{|\cos \varphi|}{r^2} dS < 1.$$

Тоді задача без початкових умов 1/ - 2/ має єдиний розв'язок.

Доведення теореми проводять за такою схемою. Заміною

$$u(x, t) = v(x, \gamma(t)) \exp \{ \beta(t) \},$$

де

$$\beta(t) = \int_{-\infty}^t b(t) dt + \beta_0; \quad \gamma(t) = \int_{-\infty}^t a(t) dt, \quad \beta_0 < \beta_0',$$

1/ - 2/ зводять до задачі без початкових умов для стандартного рівняння теплопровідності з постійними коефіцієнтами, для якого методами з праці [1] виявляють умову розв'язності.

Відзначимо, що сформульовані в цій теоремі обмеження на коефіцієнти $a(t)$, $b(t)$ - мінімальні, вони відмінні від відомих більш громіздких умов розв'язності задач без початкових умов для загальних рівнянь параболічного типу зі змінними коефіцієнтами [2]. Крім того, третя умова теореми - досить "жорстке" обмеження на S ; вона не охоплює, зокрема, задачу без початкових умов для кола, яка має єдиний розв'язок /в цьому легко переконатись безпосередніми підрахунками/.

Список літератури: І. Мартиненко Марія Д.,
Мартиненко Михайло Д., Бойко Л.Ф. Задача без по-
чаткових умов для рівняння теплопровідності. - Вісн. Львів. ун-ту,
сер. мех.-мат., 1982, вип. 19, 2. Мартиненко М.Д.,
Бойко Л.Ф. О разрешимости задач без начальных условий для
параболических по И.Г.Петровскому систем. - ДАН СССР, 1978,
т.243, № 1.

Стаття надійшла в редколегію 2.03.82

УДК 519.21

І.Д.Квіт

ЗВОРОТНА ФОРМУЛА ДЛЯ ВІДБИТТЯ ВИПАДКОВОГО ВЕКТОРА

Нехай додатний випадковий вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ має
функцію розподілу ймовірностей $F(t) = F(t_1, \dots, t_n)$. Позначимо
 n -вимірний інтервал у першому гіпероктанті R_n^+

$$R_n^+ = \{t_k > 0; k = 1, \dots, n\} \quad /1/$$

через J_n

$$J_n = \{a_k < t_k \leq b_k; k = 1, \dots, n, 0 \leq a_k < b_k \leq \infty\}. \quad /2/$$

Приріст n -вимірної неспадної функції розподілу на інтервалі J_n
виражається формулою [1]

$$F(b_1, \dots, b_n) - \sum_{k=1}^n F(b_1, \dots, a_k, \dots, b_n) + \sum_{1 \leq j < k \leq n} F(b_1, \dots, a_j, \dots, a_k, \dots, b_n) - \dots + (-1)^n F(a_1, \dots, a_n) = \int_{J_n} dF(t) = P\{\xi \in J_n\}. \quad /3/$$

Нехай існує відбиття вектора ξ

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty t_1^{z_1-1} \dots t_n^{z_n-1} dF(t_1, \dots, t_n), \quad /4/$$

що є аналітичною функцією принаймні в n -вимірній смузі S_n

$$S_n = \{1 - \alpha_k < \operatorname{Re} z_k < 1 + \beta_k; \alpha_k > 0, \beta_k > 0; k=1, \dots, n\} \quad /5/$$

n -вимірного комплексного простору C_n , елементи якого – набори n комплексних чисел $z = (z_1, \dots, z_n)$

$$C_n = \{z_k = x_k + iy_k; i = \sqrt{-1}, x_k \in R, y_k \in R; k=1, \dots, n\}. \quad /6/$$

Комплекснозначна функція від n комплексних змінних називається аналітичною в смузі S_n , якщо вона в кожній точці смуги є аналітичною функцією по кожній змінній зокрема. Інтеграл /4/ розуміємо в сенсі Радона-Стільт'єса.

Означення. Інтервальним обмежником в R^+ називаємо довільну функцію, яка на інтервалі $J_n \in R_n^+$ дорівнює одиниці, а зовні нього – нулю.

Наприклад, інтервальним обмежником в R_n^+ є вираз

$$\begin{aligned} R_n^+(a, b) &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k - i\infty}^{c_k + i\infty} \frac{(\frac{b_k}{t_k} + 0)^{z_k} - (\frac{a_k}{t_k} + 0)^{z_k}}{z_k} dz_k = \\ &= \prod_{k=1}^n \left\{ \begin{array}{l} 0, 0 < t_k \leq a_k, t_k > b_k \\ 1, a_k < t_k \leq b_k \end{array} \right\} = \prod_{k=1}^n \frac{\operatorname{sgn}(\frac{b_k}{t_k} + 0 - 1) - \operatorname{sgn}(\frac{a_k}{t_k} + 0 - 1)}{2}, \quad /7/ \\ &\quad (c_k > 0; k=1, \dots, n). \end{aligned}$$

Зворотна формула. Нехай у смузі /5/ існує відбиття /4/ додатного випадкового вектора ξ . Тоді приріст функції розподілу /3/ вектора ξ на інтервалі /2/ з області /1/ виражається формулою

$$\Phi\{\xi \in J_n\} = \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \dots \int_{c_n - i\infty}^{c_n + i\infty} \prod_{k=1}^n \frac{(\frac{b_k}{t_k} + 0)^{1-z_k} - (\frac{a_k}{t_k} + 0)^{1-z_k}}{2\pi i (1-z_k)} \varphi(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n, \quad /8/$$

де $\max(0, 1 - \alpha_k) < C_k < 1$. Інтеграл /8/ розуміємо в сенсі головного значення Коші.

Доведення. Коли врахувати /4/, то правий бік /8/ можна записати у вигляді $2n$ -кратного інтегралу

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{C_1 - i\tau}^{C_1 + i\tau} \dots \int_{C_n - i\tau}^{C_n + i\tau} \prod_{k=1}^n \frac{(b_k + 0)^{1-z_k} - (a_k + 0)^{1-z_k}}{2\pi i (1 - z_k)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty t_1^{z_1-1} \dots t_n^{z_n-1} dF(t_1, \dots, t_n) dz_1 \dots dz_n,$$

де $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$. Оскільки у виразі /9/ інтеграли відносно $t = (t_1, \dots, t_n) \in R_n^+$ абсолютно збігаються для $z = (z_1, \dots, z_n)$ зі смуги /5/ і, зокрема, на сукупності прямих

$$L_n = \{ \operatorname{Re} z_k = C_k, \max(0, 1 - \alpha_k) < C_k < 1; k = 1, \dots, n \};$$

а стосовно $z = (z_1, \dots, z_n)$ межі інтегралів скінченні, то змінюємо черговість інтегрування. Одержуємо

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k - i\tau_k}^{C_k + i\tau_k} \frac{(b_k + 0)^{1-z_k} - (a_k + 0)^{1-z_k}}{1 - z_k} dz_k \right\} dF(t_1, \dots, t_n) = \\ = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{(1-C_k) - i\tau_k}^{(1-C_k) + i\tau_k} \frac{\left(\frac{b_k}{t_k} + 0\right)^{z_k} - \left(\frac{a_k}{t_k} + 0\right)^{z_k}}{z_k} dz_k \right\} dF(t_1, \dots, t_n), \end{aligned}$$

$z_k \quad 0 < 1 - C_k < \min(1, \alpha_k).$

Границя добутку внутрішніх інтегралів останнього виразу існує та збігається з обмежником /7/. Отже, дістаємо

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty R_n^+(a, b] dF(t_1, \dots, t_n) = \int_{J_n} dF(t) = P\{\xi \in J_n\}$$

— лівий бік /8/. Зворотна формула /8/ доведена.

Безпосереднім наслідком зворотної формули /8/ є n -вимірна теорема єдиності. Відбиття /4/ у смугі /5/, якщо воно існує, однозначно визначає свою функцію розподілу $F(t)$, причому

$$F(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1 - i\infty}^{C_1 + i\infty} \dots \int_{C_n - i\infty}^{C_n + i\infty} \prod_{k=1}^n \frac{(t_k + 0)^{1-z_k}}{1 - z_k} \varphi(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n, \quad (10)$$

$\max(0, 1 - \alpha_k) < C_k < 1, t_k > 0; k = 1, \dots, n.$

Для доведення співвідношення /10/ досить у зворотній формулі /8/ замість δ_K прийняти t_K і спрямувати a_K до нуля для всіх $K=1, \dots, n$.

Формальним посереднім наслідком зворотної формули /8/ є зворотна формула для густини. Якщо додатний випадковий вектор ξ абсолютно неперервний та має густину

$$f(t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_1 \dots \partial t_n}, \quad (t_1, \dots, t_n) \in R_n^+,$$

то співвідношення /4/, якщо воно існує, набуває вигляду

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty t_1^{z_1-1} \dots t_n^{z_n-1} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n, \quad (z_1, \dots, z_n) \in S_n / II /$$

і зі співвідношення /10/ формально дістаємо

$$f(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1-i\infty}^{C_1+i\infty} \dots \int_{C_n-i\infty}^{C_n+i\infty} t_1^{-z_1} \dots t_n^{-z_n} \varphi(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n, \quad (t_1, \dots, t_n) \in R_n^+. \quad /I2/$$

Відзначимо, що при $n=1$ формули /8/, /10/ і /12/ розглянуто у праці [2], а при $n=2$ формули /11/ і /12/ наведено у праці [3].

Для ілюстрації двох останніх формул розглянемо приклади.

Знайти відбиття β - вектора з густиною [4]

$$f(t_1, t_2) = \frac{\Gamma(\gamma+q+r)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(q)\Gamma(r)} t_1^{\gamma-1} t_2^{q-1} (1-t_1-t_2)^{r-1}, \quad t_1 > 0, t_2 > 0, t_1+t_2 < 1; \\ \gamma > 0, q > 0, r > 0.$$

За формулою /11/ запишемо

$$\varphi(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(\gamma+q+r)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(q)\Gamma(r)} \int_0^1 t_2^{z_2+q-2} \left\{ \int_0^{1-t_2} t_1^{z_1+\gamma-2} (1-t_1-t_2)^{r-1} dt_1 \right\} dt_2.$$

Оскільки,

$$\left\{ \right\} = (1-t_2)^{z_1+\gamma+r-2} \frac{\Gamma(z_1+\gamma-1)\Gamma(r)}{\Gamma(z_1+\gamma+r-1)}, \quad \operatorname{Re} z_1 > 1-\gamma,$$

та

$$\int_0^1 \frac{z_2^{q-2}}{t_2^{q-2} (1-t_2)^{q-2}} dt_2 = \frac{\Gamma(z_2+q-1) \Gamma(z_2+q-1)}{\Gamma(z_2+z_2+q+q-2)}, \operatorname{Re} z_2 > 1-q,$$

то відомити

$$\varphi(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(\gamma+q+r) \Gamma(z_1+\gamma-1) \Gamma(z_2+q-1)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(q) \Gamma(z_1+z_2+\gamma+q+r-2)}, \operatorname{Re} z_1 > 1-\gamma, \operatorname{Re} z_2 > 1-q.$$

Знайти густину розподілу ймовірностей відповідну відомиттю

$$\varphi(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1+\gamma-1) \Gamma(z_1+z_2+\gamma+q-2)}{a^{z_1+z_2-2} \Gamma(\gamma) \Gamma(z_1+\gamma+q-1)}, a > 0, \gamma > 0, q > 0.$$

За формулою /12/ запишемо

$$f(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \frac{z_1^{-z_1} \Gamma(z_1+\gamma-1)}{a^{z_1-1} \Gamma(\gamma)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2-i\infty}^{c_2+i\infty} \frac{z_2^{-z_2} \Gamma(z_1+z_2+\gamma+q-2)}{a^{z_2-1} \Gamma(z_1+\gamma+q-1)} dz_2 \right\} dz_1.$$

Тому що

$$\left\{ \right\} = \frac{a^{z_1+\gamma+q-1}}{\Gamma(z_1+\gamma+q-1)} t_2^{z_1+\gamma+q-2} e^{-at_2}, \quad 0 < t_2,$$

та

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_1-i\infty}^{c_1+i\infty} \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{-z_1} \frac{\Gamma(z_1+\gamma-1) \Gamma(\gamma+q)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(z_1+\gamma+q-1)} dz_1 = \frac{\Gamma(\gamma+q)}{\Gamma(\gamma) \Gamma(q)} \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^{\gamma-1} \left(1 - \frac{t_1}{t_2} \right)^{q-1},$$

$$0 < \frac{t_1}{t_2} < 1,$$

то густина

$$f(t_1, t_2) = \frac{a^{\gamma+q}}{\Gamma(\gamma) \Gamma(q)} t_1^{\gamma-1} (t_2-t_1)^{q-1} e^{-at_2}, \quad 0 < t_1 < t_2.$$

Це густина одного з трьох двовимірних γ -розподілів [4].

Список літератури: 1. К в і т І.Д. Уточнення зворотної формули для характеристичної функції випадкового вектора. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1971, вип. 6. 2. К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1978, вип. 13. 3. *Springer M.D. The Algebra of Random Variables. N.Y., 1979.* 4. *Mardia K. V. Families of bivariate distributions, - L., 1970.*

Стаття надійшла в редакцію 26.10.81

УДК 621.3

О.П.Гнатюшин

ПОЕЛЕМЕНТНЕ РЕЗЕРВУВАННЯ

ПРИ НЕОДНАКОВІЙ НАДІЙНОСТІ РЕЗЕРВУ

Нехай деяка технічна система складається з n елементів, надійність яких відповідно дорівнює $z_1, z_2, \dots, z_n$, а вартість - $c_1, c_2, \dots, c_n$. Припустимо, що початкові надійність R_0 і вартість C_0 системи задаються відповідно формулами $R_0 = \prod_{i=1}^n z_i$ і $C_0 = \sum_{i=1}^n c_i$. Нехай збільшена від R_0 до R_1 надійність системи досягається з допомогою паралельного незавантаженого підключення до елементів системи певної кількості елементів відповідно з надійностями $z'_1, z'_2, \dots, z'_n$. Тоді надійність зарезервованого i -го елемента при $k_i - 1$ резервних елементах

$$p_i = 1 - (1 - z_i)(1 - z'_i)^{k_i - 1}, \quad (1)$$

а надійність зарезервованої системи

$$R_1 = \prod_{i=1}^n p_i \quad (2)$$

Оскільки вартість зарезервованого i -го елемента дорівнює $k_i c_i$, то вартість зарезервованої системи

$$C_1 = \sum_{i=1}^n k_i c_i. \quad /3/$$

Очевидно, що завжди можна однозначно вказати число $a_i, 0 < a_i \leq 1$, яке задовольняє співвідношення $\rho_i = R_1^{a_i}$. Звідси та з умови /1/ отримуємо

$$k_i = 1 + \frac{\ln \frac{1-R_1^{a_i}}{1-z_i}}{\ln(1-z_i)}, \quad (i=1,2,\dots,n). \quad /4/$$

Отже, вартість зарезервованої системи

$$C_1 = \sum_{i=1}^n k_i c_i = C_0 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i \ln \frac{1-R_1^{a_i}}{1-z_i}}{\ln(1-z_i)}. \quad /5/$$

З умови /2/ маємо

$$R_1 = \prod_{i=1}^n \rho_i = \prod_{i=1}^n R_1^{a_i} = R_1^{\sum_{i=1}^n a_i}, \quad /6/$$

тобто

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1. \quad /7/$$

Таким чином, сталі $a_1, a_2, \dots, a_n$ утворюють розподіл ймовірностей. Доведено з праці [2], що стаціонарне значення відношення $\frac{C_1}{R_1}$ досягається при

$$a_i = \frac{\frac{c_i}{\ln(1-z_i)}}{\sum_{j=1}^n \frac{c_j}{\ln(1-z_j)}}, \quad (i=1,2,\dots,n) \quad /8/$$

Оскільки при підстановці /8/ в /4/ значення k_i , як правило не ціле число, то доповнимо його до найближчого цілого і позначимо це фігурною дужкою

$$k_i = 1 + \left\{ \frac{\ln \frac{1-R_1^{a_i}}{1-z_i}}{\ln(1-z_i)} \right\}, \quad (i=1,2,\dots,n). \quad /9/$$

Для контролю якості обчислень k_i знаходимо вираз фактичної надійності зарезервованої системи

$$R_i^* = \prod_{i=1}^n [1 - (1 - z_i)(1 - z'_i)^{k_i - 1}]. \quad /10/$$

Значення виразу /10/ повинно бути не менше від R_i . Вартість зарезервованої системи визначаємо за формулою /3/, де k_i обчислені з виразу /9/.

Приклад. Нехай $z_1 = 0,6$; $z_2 = 0,7$; $z_3 = 0,8$; $c_1 = 1$; $c_2 = 2$; $c_3 = 3$; $z'_1 = 0,4$; $z'_2 = 0,5$; $z'_3 = 0,6$. Зарезервувати систему до надійності $R_i = 0,95$ та знайти у скільки разів зарезервована система дорожча від початкової.

Тут система складається з трьох елементів ($n=3$); початкова надійність системи $R_0 = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336$, а початкова вартість $C_0 = 1 + 2 + 3 = 6$. За формулою /8/ визначаємо компоненти стохастичного вектора: $a_1 = 0,2411722$; $a_2 = 0,354714$; $a_3 = 0,4033563$. У межах точності сума $a_1 + a_2 + a_3$ дорівнює одиниці. З виразу /9/ обчислюємо числа резервних елементів

$k_1 = 1 + \{6,817095\} = 8$; $k_2 = 1 + \{4,053473\} = 6$; $k_3 = 1 + \{2,437250\} = 4$. За формулою /10/ отримуємо фактичну надійність зарезервованої системи: $R_i^* = (1 - 0,4 \cdot 0,6^7)(1 - 0,3 \cdot 0,5^5)(1 - 0,2 \cdot 0,4^3) = 0,9888026 \cdot 0,990625 \cdot 0,9872 = 0,9669945 > 0,95 = R_i$.

Використовуючи /3/, знаходимо вартість зарезервованої системи $C_i = 8 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 32$. Зарезервована до надійності 0,9669945 система дорожча від початкової в $\frac{C_i}{C_0} = \frac{32}{6} = 5\frac{1}{3}$ разів.

Список літератури: І. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. - М.: Сов. Радио, 1969. 2. Оптимальные задачи надежности / Под ред. И.А.Ушакова. - М., 1968.

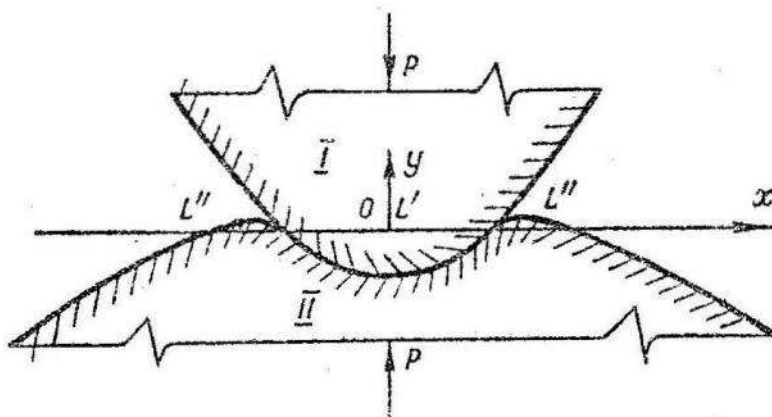
Стаття надійшла в редколегію 28.12.82

Д.В.Гриліцький

СИСТЕМА СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
 ДЛЯ ПЛОСКОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ
 ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ ТЕПЛОВИДІЛЕННІ НА ДІЛЯНЦІ КОНТАКТУ

Плоска контактна задача термопружності про стиснення двох пружних ізотропних тіл при стаціонарному тепловиділенні на ділянці контакту вперше була розглянута М.В.Коровчинським [2]. Він вважав, що між співдотичними тілами наявний ідеальний тепловий контакт, а зовні ділянки контакту поверхні тіл теплоізовані. Останнє допущення значно спрощує задачу в математичному відношенні, але приводить до нереального розподілу температури вздовж відрізка контакту.

Ми, розглядаючи цю задачу, вважатимемо, що на ділянці контакту існує неідеальний тепловий контакт тіл, а поза ділянкою контакту між тілами і зовнішнім середовищем здійснюється теплообмін за законом Ньютона. Температуру зовнішнього середовища, не зменшуючи загальності задачі, приймемо рівною нулю. Поставимо задачу та введемо для неї систему сингулярних інтегральних рівнянь.



Розглянемо задачу про стиснення силами P /див. рисунок/ двох пружних ізотропних тіл в умовах плоского деформованого стану. Припустимо, що тіла в області контакту обмежені гладкими поверхня-

ми, рівняння яких $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = -f_2(x)$, і одне тіло ковзає по поверхні другого з малою сталою швидкістю V .

За рахунок сил тертя на ділянці контакту відбувається теплоутворення, яке приводить до появи теплових потоків, що йдуть у кожне з співдотичних тіл, які в свою чергу викликають температурні напруження у тілах і перерозподіл контактних напружень.

Припустимо, що поза ділянкою контакту поверхні тіл вільні від зовнішніх напружень, а на ділянці контакту тангенціальні напруження зв'язані з нормальними за законом Кулона.

При зроблених допущеннях необхідно визначити ширину смуги контакту тіл, значення та характер розподілу нормальних напружень і температур вздовж відрізка контакту.

Оскільки ми розглядаємо стаціонарну задачу теплопровідності та відсутність джерел тепла у тілах, то температура кожного зі співдотичних тіл задовольняє у своїй області рівняння Лапласа.

Введемо такі позначення: L' - відрізок контакту; L'' - границя тіл поза відрізком контакту, $L = L' + L''$.

Граничні умови задачі:

а/ механічні

$$\sigma_y^{(1)}(x) = \sigma_y^{(2)}(x) = \tau_{xy}^{(1)}(x) = \tau_{xy}^{(2)}(x) = 0 \quad \text{на } L'', \quad /1/$$

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} \right)_{y=0} = -f_1'(x) - f_2'(x) = -f'(x) \quad \text{на } L', \quad /2/$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x) = \tau_{xy}^{(2)}(x) = f \sigma_y(x) \quad \text{на } L'; \quad /3/$$

б/ температурні

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} + h(T_2 - T_1) = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} + h(T_2 - T_1) = 0 \quad \text{на } L', \quad /4/$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} = \frac{V}{J} \tau_{xy}(x) \quad \text{на } L', \quad /5/$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial y} - K_1 T_1 = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial y} + K_2 T_2 = 0 \quad \text{на } L'', \quad /6/$$

Введені такі позначення: V_1, V_2 - нормальні компоненти векторів пружного переміщення; f - коефіцієнт тертя, h, k_1, k_2 - коефіцієнти теплообміну; λ_1, λ_2 - коефіцієнти теплопровідності; $J = 42700 \frac{\text{кгсм}}{\text{ккал}}$ - механічний еквівалент тепла. Інші величини загальноприйняті.

Одним зі співвідношень /4/ виражена умова неідеальності теплового контакту тіл. Із формули /5/ випливає, що в кожній точці відрізка контакту сума інтенсивностей теплових потоків дорівнює інтенсивності теплоутворення за рахунок сил тертя.

Крім того, мають виконуватися ще умови

$$\int_L \sigma_y(t) dt = -P; \int_L \frac{\partial T_1}{\partial y} dt = \int_L \frac{\partial T_2}{\partial y} dt = 0 \quad /7/$$

і температура на границі кожного тіла повинна бути неперервною функцією.

Вважаючи, що радіуси кривини кожного з тіл великі порівняно з довжиною відрізка контакту, тому при визначенні переміщень і температур у тілах останні будемо замінювати півплощинами.

Введемо функції розподілу температур

$$F_j(z) = T_j(x, y) + iS_j(x, y) \quad (j=1,2). \quad /8/$$

Дійсна та уявна частини функції $F_j(z)$ зв'язані відомими залежностями

$$\frac{\partial T_j}{\partial x} = \frac{\partial S_j}{\partial y}, \quad \frac{\partial T_j}{\partial y} = -\frac{\partial S_j}{\partial x}. \quad /9/$$

Напруження, нормальне переміщення і функція $S_j(x)$ на границі півплощин, з урахуванням умов /1/, задовольняють співвідношенням [1]

$$\left(\frac{\partial V_j}{\partial x} \right)_{y=0} = \pm \frac{\alpha_j - 1}{4\mu_j} \tau_{xy}(x) - \frac{\alpha_j + 1}{4\pi\mu_j} \int_L \frac{\sigma_y dt}{t-x} + \gamma_j S_j(x) \quad /10/$$

(j=1,2).

Тут і далі верхній знак береться при $j=1$, нижній - при $j=2$

$$\gamma_j = \frac{\alpha_j^{(j)} E_j(x_j+1)}{4(1-\gamma_j)\mu_j} \quad /II/$$

Підставляючи /ІО/ в умову /2/, враховуючи при цьому /3/, одержуємо

$$\alpha \int_{L'} \frac{G_y dt}{t-x} + \beta G_y(x) + \gamma_1 S_1(x) + \gamma_2 S_2(x) = -f'(x), \quad x \in L', \quad /I2/$$

де

$$\alpha = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{x_1+1}{\mu_1} + \frac{x_2+1}{\mu_2} \right); \quad \beta = \frac{1}{4} \left(\frac{x_1-1}{\mu_1} - \frac{x_2-1}{\mu_2} \right) f; \quad /I3/$$

$S_j(x)$ - невідомі функції.

Розв'язуючи першу та другу граничні задачі теплопровідності для верхньої і нижньої півплощин та враховуючи /9/, знаходимо формули на відрізку L' дійсної осі

$$S_j(x) = \mp \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{T_j dt}{t-x} \mp \frac{1}{\pi} \int_{L''} \frac{T_j dt}{t-x}, \quad x \in L',$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial x} = \mp \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{\frac{\partial T_j}{\partial y} dt}{t-x} \mp \frac{1}{\pi} \int_{L''} \frac{\frac{\partial T_j}{\partial y} dt}{t-x} \quad (j=1,2), \quad x \in L'. \quad /I4/$$

Задовольняючи умови /6/ за допомогою формул /I4/, маємо ще два інтегральні співвідношення

$$K_j S_j(x) - \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{\frac{\partial T_j}{\partial y} dt}{t-x} = \pm T_j'(x) \mp \frac{K_j}{\pi} \int_{L'} \frac{T_j dt}{t-x} \quad (j=1,2), \quad x \in L', \quad /I5/$$

які можна записати, використовуючи /9/, у вигляді

$$K_j S_j(x) + \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{S_j' dt}{t-x} = \pm T_j'(x) \mp \frac{K_j}{\pi} \int_{L'} \frac{T_j dt}{t-x} \quad (j=1,2), \quad /16/$$

$x \in L'$

Кожне зі співвідношень /15/ або /16/ зв'язує на L' функції $S_j(x)$ з відповідною температурою $T_j(x)$.

Користуючись формулами /15/, задовольнимо умову /5/. В результаті одержимо залежність між $S_j(x)$, $T_j(x)$ ($j=1,2$) і $\phi_j(x)$ на L'

$$\begin{aligned} \lambda_1 K_1 S_1(x) - \lambda_2 K_2 S_2(x) - \frac{V \cdot f}{\pi \cdot T} \int_{L'} \frac{\phi_2 dt}{t-x} = \\ = \lambda_1 T_1'(x) + \lambda_2 T_2'(x) - \frac{\lambda_1 K_1}{\pi} \int_{L'} \frac{T_1 dt}{t-x} - \frac{\lambda_2 K_2}{\pi} \int_{L'} \frac{T_2 dt}{t-x}, \end{aligned} \quad /17/$$

$x \in L'$

Задовольняючи, врешті, одну з двох умов /4/ за допомогою відповідної формули /15/, знаходимо одне з двох співвідношень

$$K_1 S_1(x) + \frac{h}{\pi} \int_{L'} \frac{(T_2 - T_1) dt}{t-x} = T_1'(x) - \frac{K_1}{\pi} \int_{L'} \frac{T_1 dt}{t-x}, \quad /18/$$

$x \in L'$

або

$$K_2 S_2(x) + \frac{h}{\pi} \int_{L'} \frac{(T_2 - T_1) dt}{t-x} = -T_2'(x) + \frac{K_2}{\pi} \int_{L'} \frac{T_2 dt}{t-x}, \quad /19/$$

$x \in L'$

Отже, для визначення п'яти характеристик на L' $\phi_j(x)$, $S_j(x)$ і $T_j(x)$ ($j=1,2$) маємо стільки ж сингулярних інтегральних рівнянь: /12/, два співвідношення /16/, /17/ і рівняння /18/ або /19/ залежно від того, якою умовою неідеального теплового контакту користуватися.

Зауважимо, що умови /4/ з врахуванням /9/ можна записати у вигляді

$$S_1'(x) - h(T_2 - T_1) = 0 \quad \text{або} \quad S_2'(x) - h(T_2 - T_1) = 0 \quad \text{на } L' /20/$$

Рівняння /18/ або /19/ можна замінити відповідною умовою /20/.

Для побудови наближеного розв'язку одержаної системи сингулярних інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь з успіхом можна застосувати метод ортогональних поліномів.

Для визначення ширини смуги контакту необхідно використати першу умову /7/ і умову обмеженості контактних напружень всюди на відрізку контакту, включаючи кінці.

Список літератури: 1. Г р и л і ц ь к и й Д.В., П о п о - в и ч Б.І. Плоскі контактні задачі термопружності. - Львів: Вища школа, 1973. 2. К о р о в ч и н с к и й М.В. Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхностях соприкасания. - В кн.: Контактная прочность машиностроительных материалов. М.: Наука, 1964.

Стаття надійшла в редколегію 5.12.81

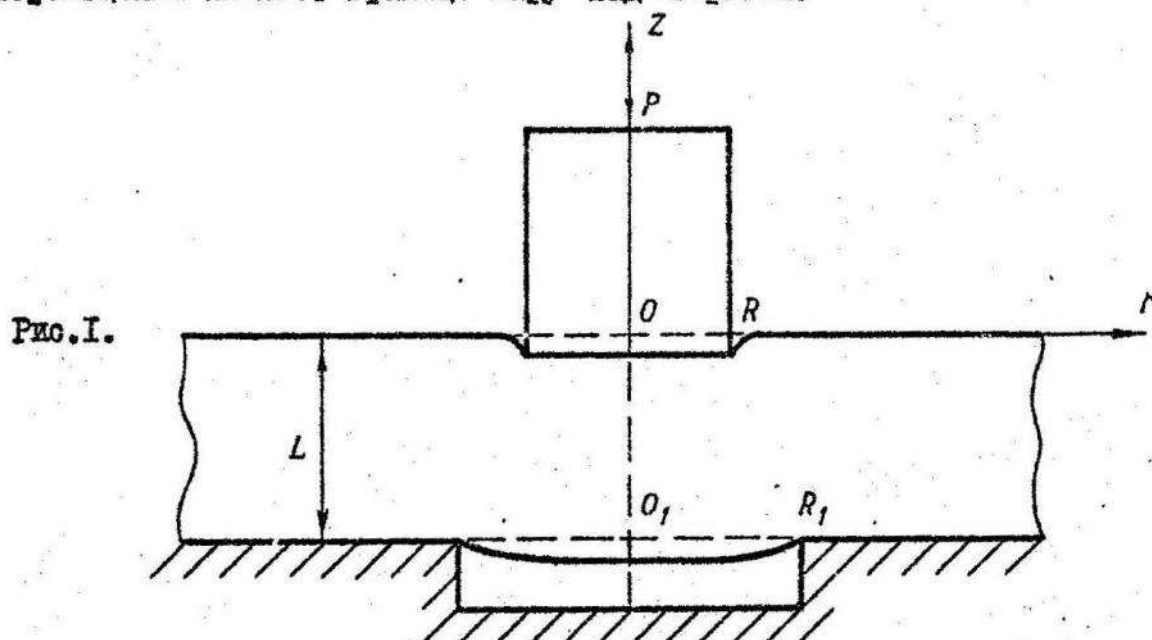
УДК 539.3

Д.В.Гриліцький, Б.С.Окренкий
ОСЕЦИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ПРО ТИСК ШТАМПА
НА ІЗОТРОПНИЙ ШАР, ЯКИЙ ЛЕЖИТЬ
НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ З ВИРІЗОМ

Розглянемо безмежний плоскопаралельний шар скінченої товщини L , який лежить на жорсткій гладкій основі з вирізом циліндричної форми.

Нехай у шар силою P втискується жорсткий круговий циліндричний штамп з площею гладкою основою радіусом R . Лінія дії сили P збігається з осью симетрії штампів та вирізу основи /рис.1/.

Припускаємо, що поверхні шару зовні штампів та над вирізом вільні від зовнішніх зусиль. Визначимо напруження під штампом і переміщення нижньої границі шару над вирізом.



Для розв'язування задачі введемо циліндричну систему координат r, θ, z з площиною $z=0$, яка збігається з верхньою поверхнею шару та віссю Oz , направленою всередину штампів по його осі симетрії.

Поставлену задачу досліджуватимемо при таких граничних умовах:

$$u_z = -\varepsilon \quad (z=0, 0 \leq r < R), \quad /1/$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad (z=0, 0 \leq r < \infty), \quad /2/$$

$$\sigma_z = 0 \quad (z=0, R < r < \infty), \quad /3/$$

$$\sigma_z = 0 \quad (z=-L, 0 \leq r < R_1), \quad /4/$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad (z=-L, 0 \leq r < \infty), \quad /5/$$

$$u_z = 0 \quad (z=-L, R_1 < r < \infty), \quad /6/$$

де R_1 - радіус основи кругового циліндричного вирізу; ε - переміщення штампів.

При розв'язуванні задачі скористаємось загальними співвідношеннями [1] для знаходження переміщень і напружень в ізотропному шарі:

$$\begin{aligned}
 u_z &= - \int_0^\infty \eta^4 \left\{ \left[\frac{1}{b_1 R} \eta F_1(\eta) + \left(2 + \frac{1}{b_1 R} \eta^3 \right) F_2(\eta) \right] e^{-\eta^3} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{b_1 R} \eta F_3(\eta) + \left(-2 + \frac{1}{b_1 R} \eta^3 \right) F_4(\eta) \right] e^{\eta^3} \right\} J_0(\eta \rho) d\eta, \\
 \sigma_z &= \frac{2b_3}{R} \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{\eta}{R} F_1(\eta) + (b_1 + \eta^3) F_2(\eta) \right] e^{-\eta^3} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-\frac{\eta}{R} F_3(\eta) + (b_1 - \eta^3) F_4(\eta) \right] e^{\eta^3} \right\} J_0(\eta \rho) d\eta, \quad m/ \\
 \tau_{rz} &= \frac{2b_3}{R} \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{\eta}{R} F_1(\eta) + (-b_2 + \eta^3) F_2(\eta) \right] e^{-\eta^3} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{\eta}{R} F_3(\eta) + (b_2 + \eta^3) F_4(\eta) \right] e^{\eta^3} \right\} J_1(\eta \rho) d\eta,
 \end{aligned}$$

де σ_z, τ_{rz}, u_z - компоненти напружень і переміщень в пружному шарі; $F_i(\eta)$ ($i=1,4$) - невідомі функції;

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \xi = \frac{z}{R}, \quad b_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad b_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad b_3 = \lambda + \mu;$$

λ, μ - коефіцієнти Ляме.

Задовольнивши граничні умови /2/, /5/ і ввівши позначення

$$\begin{aligned}
 \eta \Phi_1(\eta) &= \frac{\eta}{R} F_1(\eta) + b_1 F_2(\eta) - \frac{\eta}{R} F_3(\eta) + b_1 F_4(\eta) \\
 \eta \Phi_2(\eta) &= -\frac{1}{b_1 R} \eta e^{\eta^3} F_1(\eta) - \left(2 - \frac{1}{b_1 R} \eta^3 \right) e^{\eta^3} F_2(\eta) - \\
 &\quad - \frac{1}{b_1 R} \eta e^{-\eta^3} F_3(\eta) + \left(2 + \frac{1}{b_1 R} \eta^3 \right) e^{-\eta^3} F_4(\eta).
 \end{aligned}$$

Для напружень $\sigma_z(\rho, \xi)$ і переміщень $u_z(\rho, \xi)$ на верхній і нижній граничних площинах шару одержуємо формули

$$\begin{aligned}
 u_z(\rho, 0) &= \frac{1+b_1}{b_1} R \int_0^\infty [1 - G(2\eta l)] \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta + \\
 &+ R \int_0^\infty \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \\
 \sigma_z(\rho, 0) &= 2b_3 \int_0^\infty \eta \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \\
 u_z(\rho, -l) &= R \int_0^\infty \Phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \\
 \sigma_z(\rho, -l) &= 2b_3 \left[\int_0^\infty \eta \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \right. \\
 &\left. - \frac{b_1}{1+b_1} \int_0^\infty \eta \frac{R_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta, \right.
 \end{aligned}$$

18/

где $l = \frac{L}{R}$; $P_1(\eta) = 2(\operatorname{sh} \eta l + \eta l \operatorname{ch} \eta l)$;

$R_1(\eta) = 2(\operatorname{sh}^2 \eta l - \eta^2 l^2)$;

$Q_1(\eta) = \operatorname{sh} 2\eta l + 2\eta l$; $G(2\eta l) = \frac{1 + 2\eta l - e^{2\eta l}}{\operatorname{sh} 2\eta l + 2\eta l}$

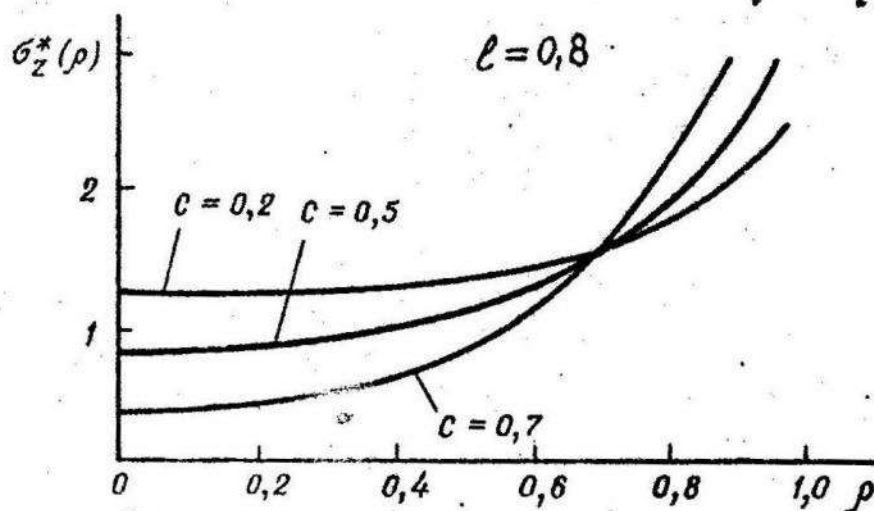


Рис. 2.

Вимагаючи виконання граничних умов /1/, /3/, /4/ і /6/, приходимо до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $\Phi_1(\eta)$ і $\Phi_2(\eta)$

$$\frac{1+b_1}{b_1} \int_0^{\infty} \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = -\frac{\varepsilon}{R} + \frac{1+b_1}{b_1} \int_0^{\infty} G(2\eta l) \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^{\infty} \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta \quad (\rho < 1), \quad /9/$$

$$\int_0^{\infty} \eta \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad (\rho > 1), \quad /10/$$

$$\frac{1+b_1}{b_1} \int_0^{\infty} \eta \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi_1(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \int_0^{\infty} \eta \frac{R_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi_2(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad (\rho < c), \quad /11/$$

$$\int_0^{\infty} \Phi_2(\eta) J_0(2\rho) d\eta = 0 \quad (\rho > c), \quad /12/$$

де $c = R_1/R$.

Якщо ввести функцію $f(t)$ за формулою

$$\Phi_1(\eta) = \frac{b_1}{1+b_1} \int_0^1 f(t) \cos \eta t dt, \quad /13/$$

то рівняння /10/ задовольняється тотожно, а рівняння /9/ зводиться до інтегрального рівняння Абеля

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} dt = g(\rho),$$

/14/

розв'язок якого дається формулою [4]

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g(\rho)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho,$$

/15/

де

$$g(\rho) = -\frac{\varepsilon}{R} + \frac{1+b_1}{b_1} \int_0^\infty G(2\eta\ell) \varphi_1(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta - \\ - \int_0^\infty \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \varphi_2(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta.$$

/16/

Підставивши співвідношення /16/ в формулу /15/ і враховуючи при цьому /13/, одержуємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду відносно функції $f(t)$

$$f(t) = -\frac{2\varepsilon}{\pi R} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^\infty G(2\eta\ell) \cos \eta x \cos \eta t d\eta - \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \varphi_2(\eta) \cos \eta t d\eta \quad (0 \leq t < 1).$$

/17/

Контактні напруження під штапом $\phi_2(\rho, 0)$ /8/ з врахуванням /13/ визначаємо за формулою

$$\phi_2(\rho, 0) = x_0 \left[\frac{f(1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \int_\rho^1 \frac{f'(t)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt \right] \quad (\rho < 1),$$

/18/

де

$$x_0 = \frac{2b_1 b_2}{1+b_1}.$$

Використавши умову рівновати штампів $P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho \phi_2(\rho) d\rho$
і вираз /18/, рівняння /17/ набуде вигляду

$$\psi(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi(x) dx \int_0^\infty G(2\eta t) \cos \eta x \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi(\eta) \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta = 1 \quad (0 \leq t < 1), \quad /19/$$

де

$$f(t) = -\frac{P}{2\pi R^2 x_0} \psi(t); \quad \Phi_2(\eta) = -\frac{P}{2\pi R^2 x_0} \Phi(\eta); \quad /20/$$

$\Phi(\eta), \psi(t)$ - невідомі функції.

Підставивши співвідношення /20/ в рівняння /11/ і /12/ та використовуючи при цьому /13/, приходимо до такої системи інтегральних рівнянь:

$$\int_0^1 \psi(x) dx \int_0^\infty \eta \frac{P_1(\eta)}{Q_1(\eta)} J_0(\eta \rho) \cos \eta x d\eta - \\ - \int_0^\infty \eta \frac{R_1(\eta)}{Q_1(\eta)} \Phi(\eta) J_0(2\rho) d\eta = 0 \quad (\rho < c), \quad /21/$$

$$\int_0^\infty \Phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0 \quad (\rho > c). \quad /22/$$

Таким чином, для визначення двох функцій $\psi(t)$ і $\Phi(\eta)$ маємо інтегральне рівняння /19/ і парні інтегральні рівняння /21/ - /22/. Для визначення функції $\Phi(\eta)$ продовжимо рівняння /22/ на інтервал $(0 \leq \rho < \infty)$

$$\int_0^\infty \Phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = u(c-\rho) X(\rho) \quad (0 \leq \rho < \infty). \quad /23/$$

Тут $U(x)$ — функція Хевісайда; $X(\rho)$ — невідома функція, яку шукають з допомогою формули

$$X(\rho) = \sum_{k=1}^N a_k J_0\left(\frac{\lambda_k}{c} \rho\right), \quad /24/$$

де $J_0(x)$ — функція Бесселя від дійсного аргумента; $a_k (k=1, N)$ — невідомі коефіцієнти, що підлягають визначенню; $\lambda_k (k=1, \infty)$ — додатні корені рівняння $J_0(\lambda_k) = 0$.

Застосувавши до обох частин рівняння /23/ формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля [3], знаходимо функцію

$$\Phi(\eta) = - \sum_{k=1}^N \lambda_k J_1(\lambda_k) a_k \frac{\eta J_0(\eta c)}{\eta^2 - \frac{\lambda_k^2}{c^2}}. \quad /25/$$

Переміщення нижньої границі шару $U_z(\rho, -\ell)$ /8/ з врахуванням /20/ і /25/ визначаємо за формулою

$$U_z(\rho, -\ell) = - \frac{\rho}{2\pi R^2 \alpha_0} \sum_{k=1}^N a_k J_0\left(\frac{\lambda_k}{c} \rho\right). \quad /26/$$

Підставивши $\Phi(\eta)$ із /25/ в інтегральні рівняння /19/ і /21/, дістаємо співвідношення, які зв'язують функцію $\psi(t)$ і коефіцієнти $a_k (k=1, N)$

$$\begin{aligned} \psi(t) = & - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \psi(x) dx \int_0^\infty G(2\eta\ell) \cos \eta x \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta - \\ & - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \lambda_k J_1(\lambda_k) a_k(t) a_k = 1 \quad (0 \leq t < 1), \end{aligned} \quad /27/$$

$$\int_0^1 \psi(x) \beta_0(x, \rho) dx + \sum_{k=1}^N a_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \beta_k(\rho) = 0 \quad (\rho < c). \quad /28/$$

Тут $\alpha_k(t)$, $\beta_{0,n}(x, \rho)$, $\beta_k(\rho)$ ($k = \overline{1, N}$) - відомі функції.

Помноживши обидві частини рівняння /28/ на $\rho J_0(\lambda_n \rho)$ і проінтегрувавши по ρ в межах від 0 до 1, то використавши при цьому умову ортогогальності функцій Бесселя, знаходимо

$$\int_0^1 \psi(x) \beta_{0,n}(x) dx + \sum_{k=1}^N \lambda_k J_1(\lambda_k) \beta_{k,n} a_k = 0 \quad (n = \overline{1, N}). \quad /29/$$

Функція $\beta_{0,n}(x)$ і коефіцієнти $\beta_{k,n}$ ($k, n = \overline{1, N}$) - відомі.

Застосувавши метод скінчених сум [2] для розв'язування системи інтегральних рівнянь /27/ і /29/, прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\psi(t_i)$ ($i = \overline{1, N+1}$) і a_k ($k = \overline{1, N}$)

$$\begin{aligned} \psi(t_i) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N A_k g_1(t_k, t_i) \psi(t_k) - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N a_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \alpha_k(t_i) = 1 \quad (i = \overline{1, N+1}), \\ \sum_{k=1}^N A_k \beta_{0,n}(t_k) \psi(t_k) + \sum_{k=1}^N a_k \lambda_k J_1(\lambda_k) \beta_{k,n} = 0 \quad (n = \overline{1, N}), \end{aligned} \quad /30/$$

де

$$g_1(t_k, t_i) = \int_0^\infty G(2\eta t) \cos \eta t_k (\cos \eta t_i - \frac{\sin \eta}{\eta}) d\eta;$$

$$t_i = (i-1)/N \quad (i = \overline{1, N+1}); \quad A_1 = A_{N+1} = \frac{1}{2N};$$

$$A_k = \frac{1}{N} \quad (k = \overline{1, N}) -$$

числові коефіцієнти для квадратурної формули трапецій. Число N підбирається таким, щоб забезпечити необхідну точність розв'язку.

Визначивши невідомі $\psi(t_k)$ із системи лінійних алгебраїчних рівнянь /30/, для функції $\psi(x)$ побудуємо апроксимувачий

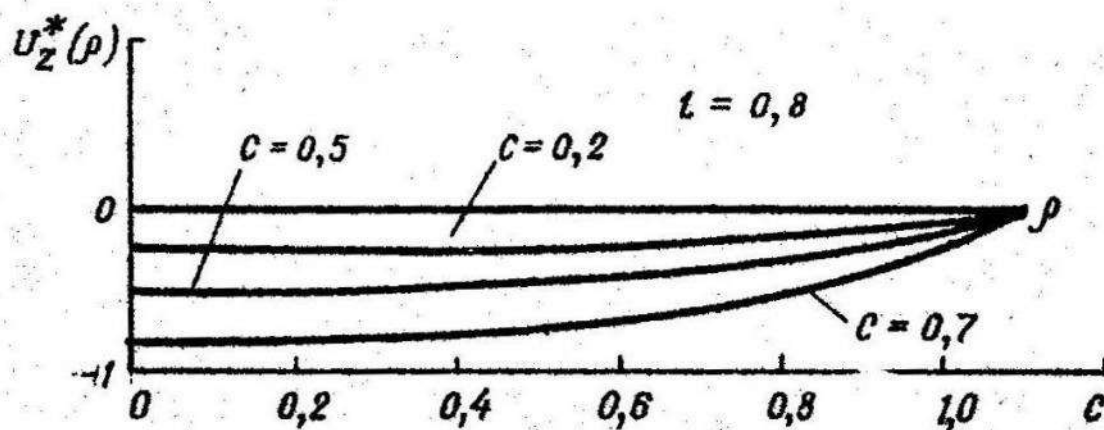


Рис. 3.

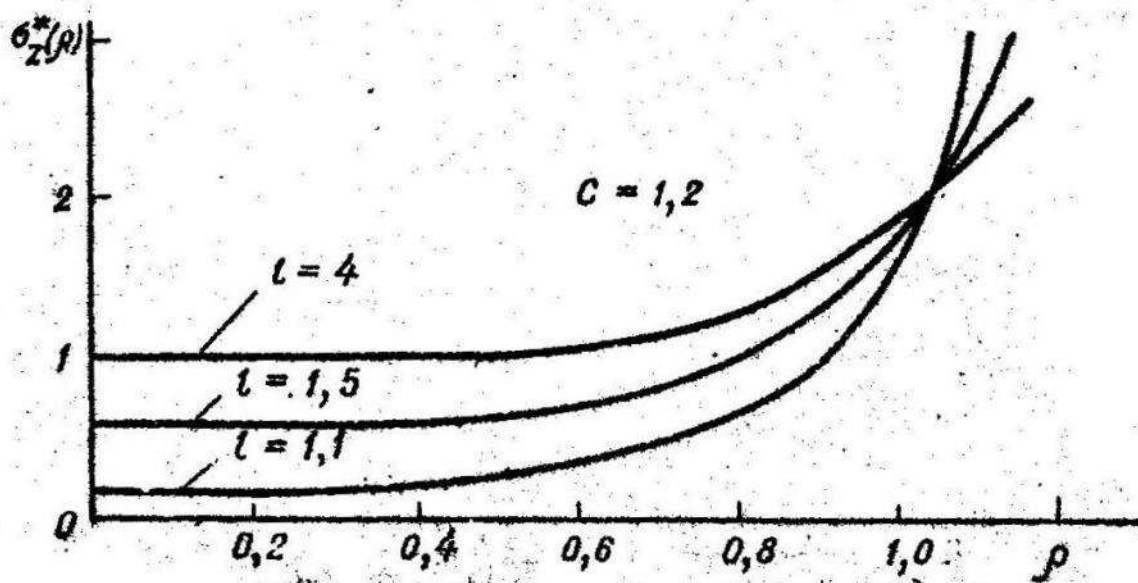


Рис. 4.

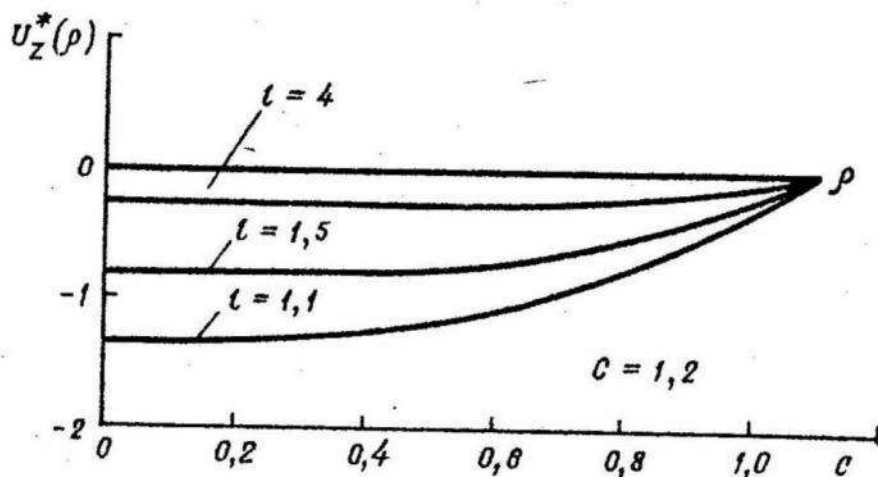


Рис. 5.

многочлен [2]

$$Q_{2m}(x) = \sum_{k=0}^m C_k x^{2k},$$

/31/

який використовується для знаходження пружно-деформованого стану шару.

Наприклад, для визначення контактних напружень під штампом з врахуванням формул /18/, /20/ і /31/ одержуємо

$$\sigma_z(\rho, 0) = -\frac{\rho}{2\pi R^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[\sum_{k=0}^m C_k - 2\sqrt{1-\rho^2} \sum_{k=1}^m k C_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (1-\rho^2)^{2k-2i-2} \right] (\rho < 1).$$

/32/

Наведемо результати числового аналізу контактних напружень під штампом і переміщень нижньої границі шару залежно від параметрів $c = R_1/R$, $\nu = L/R$.

На ЕОМ ЕС-1022 розв'язували системи лінійних алгебраїчних рівнянь /30/ 41-го порядку відносно невідомих $\psi(t_i)$ і a_k ($i = 1, 21$; $k = 1, 20$).

Для функції $\psi(x)$ достатньо побудувати апроксимуючий многочлен

$$Q_{10}(x) = \sum_{k=0}^5 C_k x^{2k},$$

/33/

який використовується для визначення напружень під штампом згідно з формулою /32/.

Графіки величин $\epsilon_z(\rho, 0) = -\frac{\rho}{2\pi R^2} \epsilon_z^*(\rho)$,
 $u_z(\rho, \ell) = -\frac{\rho}{2\pi R^2 \chi_0} u_z^*(\rho)$ для значень $\ell = 0,8$;
 $C = 0,2; 0,5; 0,7$ показані на рис. 2, 3, а для значень
 $C = 1, 2; \ell = 1,1; 1,5; 4$ - на рис. 4, 5.

Дослідження показують, що зі зменшенням товщини шару при фіксованому радіусі вирізу основи та зі збільшенням радіуса вирізу основи при фіксованій товщині шару контактні напруження під штампом спадають, а переміщення нижньої границі шару над вирізом зростають.

Список літератури: І. Г р и л и ц к и й Д.В., К и з н - м а Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1981. 2. Д е м и д о в и ч Б.П., М а р о н И.А., Ш у в а л о - в а Э.З. Численные методы анализа. - М.: Физматгиз, 1967. 3. С н е д д о н И.Н. Преобразования Фурье. - М.: ИЛ, 1955. 4. У и т т е к е р Э.Т., В а т с о н Г.Н. Курс современного анализа. - М.: Физматгиз, 1963.

Стаття надійшла в редколегію 15.02.82

УДК 539.3

І.П.Шацький

ПОЛОГА ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА

З ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ВЗДОВЖ НАПРЯМНОЇ

Розглянемо пологу циліндричну оболонку Кірхгофа радіуса R і товщини h , яка містить абсолютно жорстке лінійне включення довжини 2ℓ , локалізоване вздовж відрізка напрямної. Оболонка перебуває під дією симетричного відносно лінії включення навантаження. Дослідимо вплив кривини серединної поверхні оболонки на концентрацію напружень в околі кінців жорсткого включення.

Для розв'язування задачі виберемо в серединній поверхні оболонки декартову систему безрозмірних координат xOy з початком у центрі включення та віссю Ox вздовж напрямної. Надалі для зусиль і моментів в оболонці збережемо позначення праці [2].

З допомогою інтегрального перетворення Фур'є відомим прийомом [2] задача зведена до визначення невідомих функцій стрімків зсувного та перерізуючого зусиль із системи сингулярних інтегральних рівнянь

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1,3} \int_{-1}^1 K_{jk}(\xi-x) f_k(\xi) d\xi = F_j(x), \quad x \in [-1,1], \quad j=1,3. \quad /1/$$

де

$$f_1(x) = S(x, +0) - S(x, -0);$$

$$f_3(x) = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{\ell}{h} \int_{-1}^x [Q_y^*(\xi, +0) - Q_y^*(\xi, -0)] d\xi - \lambda^2 \int_{-1}^x [S(\xi, +0) - S(\xi, -0)] d\xi d\xi;$$

$$K_{11} = (3+2\nu-\nu^2) M_1 + M_3; \quad K_{13} = -K_{31} = (1-\nu) M_2; \quad K_{33} = -M_1;$$

$$M_1(z) = \frac{d}{dz} \operatorname{ker} z; \quad M_2(z) = \frac{d}{dz} \operatorname{kei} z; \quad M_3(z) = \lambda^2 \int_0^z \operatorname{kei} \zeta d\zeta;$$

$$\zeta = \frac{\lambda}{2} |z|; \quad z = \xi - x; \quad \operatorname{ker} z, \quad \operatorname{kei} z \quad - \text{функції Томсона};$$

$$\lambda^2 = \frac{\ell^2}{Rh} \sqrt{12(1-\nu^2)}; \quad \nu - \text{коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки};$$

$$F_1(x) = -T_x^0 + \nu T_y^0, \quad F_3(x) = \frac{12}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} (G_x^0 - \nu G_y^0) / \ell; \quad /2/$$

функції основного напруженого стану.

Система інтегральних рівнянь /1/ має єдиний розв'язок у класі не обмежених функцій при виконанні додаткових умов

$$\int_{-1}^1 f_k(\xi) d\xi = 0, \quad k=1,3. \quad /3/$$

Для оцінки напруженого стану оболонки в околі кінців включення використаємо асимптотичні співвідношення, які застосовують у задачах розтягу-згину пластин з жорсткими включеннями [1]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T_r \\ T_\vartheta \\ S_{r\vartheta} \end{pmatrix} &= \frac{K_1^\pm}{4\sqrt{2r}} \begin{bmatrix} 5\cos\frac{1}{2}\vartheta + \frac{7-\nu}{1+\nu}\cos\frac{3}{2}\vartheta \\ 3\cos\frac{1}{2}\vartheta - \frac{7-\nu}{1+\nu}\cos\frac{3}{2}\vartheta \\ \sin\frac{1}{2}\vartheta - \frac{7-\nu}{1+\nu}\sin\frac{3}{2}\vartheta \end{bmatrix} + O(r^0), \\ (3+\nu) \begin{pmatrix} G_r \\ G_\vartheta \\ H_{r\vartheta} \end{pmatrix} &= \frac{K_3^\pm}{4\sqrt{2r}} \begin{bmatrix} (3+5\nu)\cos\frac{1}{2}\vartheta + (1-\nu)\cos\frac{3}{2}\vartheta \\ (5+3\nu)\cos\frac{1}{2}\vartheta - (1-\nu)\cos\frac{3}{2}\vartheta \\ -(1-\nu)\sin\frac{1}{2}\vartheta - (1-\nu)\sin\frac{3}{2}\vartheta \end{bmatrix} + O(r^0), \\ (3+\nu) \begin{pmatrix} Q_r \\ Q_\vartheta \end{pmatrix} &= \frac{K_3^\pm}{\sqrt{2}r^3} \begin{bmatrix} -\cos\frac{1}{2}\vartheta \\ -\sin\frac{1}{2}\vartheta \end{bmatrix} + O(r^{-1}), \end{aligned}$$

де

$$K_i^\pm = \pm A_i \sqrt{r} \lim_{x \rightarrow \pm 1} \sqrt{1-x^2} f_i(x); \quad i = 1, 3 -$$

коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів $A_1 = (1+\nu)/4$, $A_3 = (3+\nu)/4$;

r, ϑ - полярні координати з початком у вершині включення;
 $x = \pm 1$.

Наближений розв'язок рівнянь /1/, /3/ при $\nu = 1/3$ побудовано методом механічних квадратур.

На рис. 1, 2 показані графіки залежностей зведених коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від параметра кривини λ для випадку розтягу оболонки осьовими зусиллями інтенсивності рівномірно розподіленими вздовж прямої ($T_x^0 = G_x^0 = G_y^0 = 0, T_y^0 = \rho$).

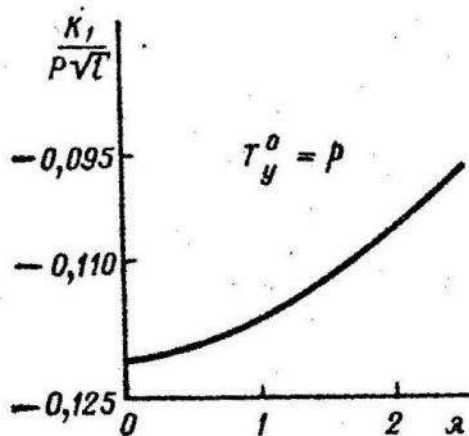


Рис. 1.

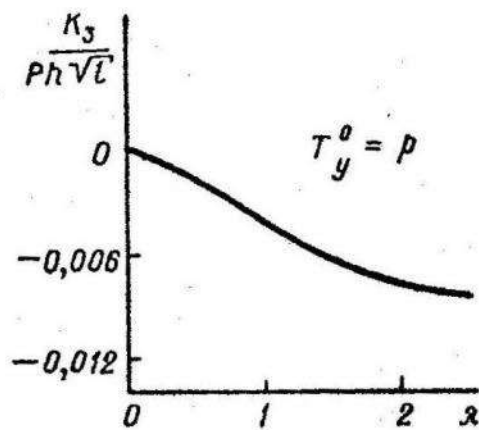


Рис. 2.

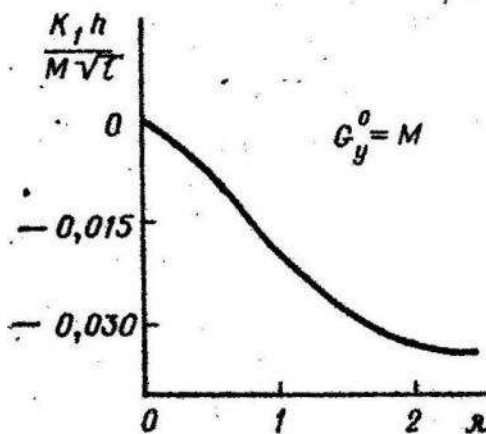


Рис. 3.

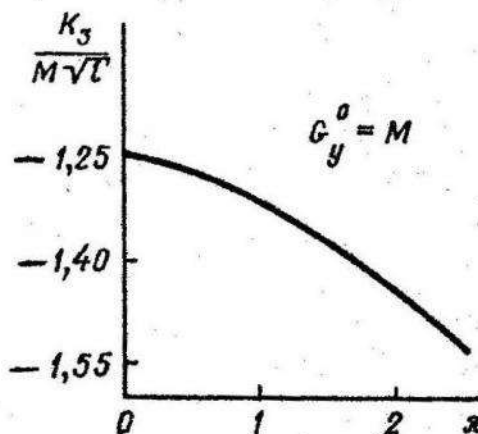


Рис. 4.

Згину циліндричної панелі рівномірно розподіленими моментами $T_x^0 = T_y^0 = G_x^0 = 0, G_y^0 = M$ / відповідають криві на рис. 3, 4.

При безмоментному навантаженні зі збільшенням параметра кривини λ абсолютне значення мембранного коефіцієнта інтенсивності K_1 спадає, а згинного K_3 - зростає. При моментному наван-

таженні ріст параметра кривини приводить до підвищення рівня і мембранної, і згинної складових напруженого стану в околі вершини жорсткого включення.

Як випливає з формул /2/, випадки навантаження труби з вільними кінцями рівномірним внутрішнім тиском $T_x^0 = qR$ / і згину циліндричної панелі моментами $G_x^0 = M$ одержуть з результатів, показаних на рис. 1-4, множенням на $-1/\nu$. Крім того, при заданому коефіцієнті Пуассона завжди існує така комбінація зовнішнього навантаження, що $F_1 = F_2 = 0$, і жорстке включення не викликає збурення напружено-деформованого стану в пологій оболонці.

Список літератури: І. Б е р е ж н и ц к и й Л.Т., Д е л я в с к и й М.В., П а н а с ю к В.В. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. - К.: Наукова думка, 1979. 2. П а н а с ю к В.В., С а в р у к М.П., Д а ц ь ш и н А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - К.: Наукова думка, 1976.

Стаття надійшла в редакцію 12.05.82

УДК 539.3

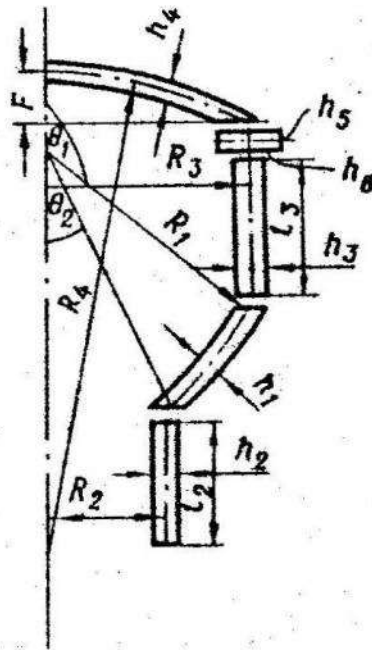
Л.Я.Овчинко

ОПТИМАЛЬНЫЙ РОЗРАХУНОК ОБОЛОНОК ЕВП

Задачі оптимального проектування пов'язані зі створенням більш якісних конструкцій і зводяться до розв'язання задач математичного програмування. Розв'язок шукають на підмножині повного класу розв'язків відповідно до значення цільової функції, що визначена на цій підмножині. Допустима підмножина визначається умовами, що накладаються на поведінку конструкції при заданому

навантаженні. Термін оптимальний проект має зміст при досягненні цільової функцією мінімуму на допустимій множині.

Розглянемо задачу оптимального проектування за вагою на міцність однорідної скляної конструкції, що складається зі спряжених через ребро жорсткості сферичної і циліндричної оболонок, які в свою чергу спряжені зі сферичною та циліндричною оболонками. Ребро – прямокутного поперечного перерізу. Конструкція знаходиться під дією рівномірного зовнішнього тиску q /див. рисунок/.



За регульовані параметри вибираєм товщини оболонок і геометричні параметри ребра.

Задача оптимального проектування за вагою на міцність набуває в мінімізації цільової функції, яка є об'ємом конструкції

$$V/\pi = 2R_1^2(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)h_1 + 2R_2l_2h_2 + 2R_3h_3(l_3 - h_5/2) + 2R_4bh_4 + h_4^3/6 - R_4h_4h_5 + 2R_3h_5h_6$$

/1/

на підмошині проектування, що визначається обмеженнями на максимальні еквівалентні напруження та деякі геометричні параметри

$$\sigma_{\theta_1}^{екв} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{x_1}^{екв} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{\theta_2}^{екв} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{x_2}^{екв} \leq [\sigma];$$

$$C_5 h_5 \leq h_3; \quad C_6 h_6 \leq h_4; \quad h_i > 0, \quad i = \overline{1,6},$$

/2/

де $\sigma_{\theta_1}^{екв}, \sigma_{x_1}^{екв}, \sigma_{\theta_2}^{екв}, \sigma_{x_2}^{екв}$ - максимальні еквівалентні напруження відповідно у сферичній оболонці товщини h_4 , циліндричній оболонці товщини h_3 , сферичній оболонці товщини h_1 і циліндричній оболонці товщини h_2 ; $[\sigma]$ - допустиме напруження; C_5, C_6 - постійні.

Для визначення точок, в яких виникають максимальні еквівалентні напруження, проводили пружний розрахунок конструкції. Напружено-деформований стан оболонок розбивали на безмоментний напружений стан і крайовий ефект [4]. Розрахунок конструкції проводили аналогічно [3].

Задачу оптимального проектування /1/ - /2/, апроксимуючи функції одночленими поліномами, зводимо до задачі геометричного програмування, пряма програма якого формується так:

мінімізувати

$$g_0(\bar{h}) = V/\pi \approx C_0 \prod_{i=1}^6 h_i^{\delta_{i0}}$$

/3/

при обмеженнях

$$g_1(\bar{h}) = \sigma_{\theta_1}^{екв} / [\sigma] \approx C_1 \prod_{i=1}^6 h_i^{\delta_{i1}} \leq 1;$$

$$g_2(\bar{h}) = \sigma_{x_1}^{екв} / [\sigma] \approx C_2 \prod_{i=1}^6 h_i^{\delta_{i2}} \leq 1;$$

$$g_3(\bar{h}) = \sigma_{\theta_2}^{екв} / [\sigma] \approx C_3 \prod_{i=1}^6 h_i^{\delta_{i3}} \leq 1;$$

$$g_4(\bar{h}) = \sigma_{x_2}^{екв} / [\sigma] \approx C_4 \prod_{i=1}^6 h_i^{\delta_{i4}} \leq 1;$$

$$g_5(\bar{h}) = C_5 h_3^{\delta_{3,5}} h_5^{\delta_{5,5}} \leq 1;$$

$$g_i(\bar{h}) = C_i h_i^{\theta_{i,6}} h_6^{\theta_{6,6}} \leq 1;$$

$$h_i > 0, \quad i = \overline{1,6},$$

/4/

де

$$\theta_{i,j} = \left[\frac{h_i}{g_j(\bar{h})} \frac{\partial g_j(\bar{h})}{\partial h_i} \right]_{\bar{h}^*}; \quad i = \overline{1,6}; j = \overline{1,4};$$

$$c_j = [g_j(\bar{h}) / (\prod_{i=1}^6 h_i^{\theta_{ij}} [6])]_{\bar{h}^*};$$

$$\theta_{3,5} = \theta_{4,6} = -1; \quad \theta_{5,5} = \theta_{6,6} = 1;$$

/5/

$\bar{h}^*$ - вихідна точка. При апроксимації використовували числові методи.

Двоїста програма, що відповідає програмі /3/ - /4/, полягає в максимізації двоїстої функції

$$v(\bar{\delta}) = \prod_{i=0}^6 C_i^{\delta_i}$$

/6/

при лінійних обмеженнях на вектор двоїстих змінних

$$\delta_0 = 1;$$

$$\sum_{i=0}^6 \theta_{ij} \delta_i = 0; \quad j = \overline{1,6};$$

$$\delta_i \geq 0; \quad i = \overline{0,6}.$$

$\bar{\delta}'$

/7/

Визначивши максимізуючий вектор $\bar{\delta}'$ і максимум двоїстої функції, на основі першої теореми двоїстості [1] визначаємо мінімум функції $g_v(\bar{h})$ і мінімізуючий вектор $\bar{h}$. Для уточнення отриманого розв'язку використовували ітераційний процес [2].

Складена програма на алгоритмічній мові АЛГОЛ - 60, що визначає точки, в яких виникають максимальні еквівалентні напруження, апроксимує функції одночленними поліномами, розв'язує двоїсту задачу геометричного програмування, визначає мінімум об'єму і мінімізуючу точку.

Аналіз отриманих результатів показує, що об'єм конструкції з ребром зменшується порівняно з такою ж конструкцією без ребра.

Наприклад, при фіксованих параметрах

$$g = 0,01 \text{ кг/мм}^2; E = 6240 \text{ кг/мм}^2; [\sigma] = 0,9 \text{ кг/мм}^2; \nu = 0,2;$$

$$F = 10 \text{ мм}; R_1 = 100 \text{ мм}; R_2 = 40 \text{ мм}; R_3 = \sqrt{3} R_1 / 2;$$

$$R_4 = (R_3^2 + F^2) / 2F; \ell_2 = 25 \text{ мм}; \ell_3 = 10 \text{ мм}; \theta_1 = 2\pi/3;$$

$$\theta_2 = \arcsin(R_2/R_1); C_5 = 0,5; C_6 = 2;$$

оптимальні товщини і об'єм конструкцій відповідно дорівнюють

а/ з ребром

$$h_1 = 1,64 \text{ мм}; h_2 = 2,30 \text{ мм}; h_3 = 4,73 \text{ мм}; h_4 = 4,05 \text{ мм};$$

$$h_5 = 2,36 \text{ мм}; h_6 = 8,10 \text{ мм}; V/\pi = 0,55938 \cdot 10^5 \text{ мм}^3;$$

б/ без ребра

$$h_1 = 3,10 \text{ мм}; h_2 = 3,73 \text{ мм}; h_3 = 5,16 \text{ мм}; h_4 = 4,55 \text{ мм};$$

$$V/\pi = 0,69318 \cdot 10^5 \text{ мм}^3.$$

Наявність ребра зменшує об'єм конструкції на 19,3 %.

Список літератури: 1. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. - М.: Мир, 1972. 2. Зенер К. Геометрическое программирование и техническое проектирование. - М.: Мир, 1973. 3. Ощипко Л.Я. Оптимізація складових оболонок електровакуумних приладів. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1980, вип. 16. 4. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник. - М.: Машиностроение, 1968. Т.1.

Стаття надійшла в редколегію 22.02.82

Д.Г.Хлебніков, І.А.Прокопівши, О.М.Паранжак

ОСЕССИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ЗГИНУ ПЛАСТИНКИ
ГЛАДКИМ ШТАМПОМ З ВРАХУВАННЯМ ВІДСТАВАННЯ

Вивчення явища відставання в контактних задачах згину пластинок неможливе без врахування поперечного обтиску. Осесиметричний згин пластинки гладким круговим у плані штампом з врахуванням обтиску розглянутий у працях [3, 4], однак явище відставання пластинки від штампу там не досліджувалось. Відставання балки від штампу при її згині досліджував Г.Б.Ковнерістов [2]. Відставання штампів від багатшарової основи в рамках осесиметричної задачі теорії пружності вивчено у праці [1].

Нижче на основі праці [3] розглянемо односторонній контакт пластинки з кільцевим штампом при осесиметричному згині.

Нехай на вільно оперту по краю $r = c$ кругову пластину товщини $2h$ діє з силою P центрально прикладений гладкий штамп, контакт якого з пластиною відбувається по кільцевій зоні $a \leq r \leq b$. Основа штампів описується рівнянням $z = f(r) + h$.

Наближене рівняння для контактної тиску q з врахуванням обтиску, одержане операторним методом з умови контакту

$$W(r, h) = f(r) - \delta h, \quad /1/$$

має вигляд [3]

$$\frac{1}{D} \left(1 - \frac{4}{5} h^2 \Delta^2 + \frac{256}{525} h^4 \Delta^4 \right) q = \Delta^2 f(r), \quad a < r < b. \quad /2/$$

Тут і надалі використовуємо позначення праці [3].

Розв'язок рівняння /2/ запишемо як

$$q(r) = \frac{P}{\pi b^2} \bar{q}(\rho) = \frac{P}{\pi b^2} \left[A_1 \tilde{u}_0(\rho) + A_2 \tilde{v}_0(\rho) + A_3 \tilde{f}_0(\rho) + A_4 \tilde{g}_0(\rho) + q_*(\rho) \right]. \quad /3/$$

Функція напружень $\psi(\rho)$ має вигляд [3]

$$\psi(\rho) = B_0 h + B h \rho^2 + \frac{1}{2(1-\nu)D} \left\{ \frac{11}{525} h^4 q(a_0 h \rho) - \frac{a_0^4 h^4}{4} \int [\alpha_0(\rho, \tau) + \frac{1}{5a_0^2} \beta_0(\rho, \tau)] q(a_0 h \tau) d\tau \right\},$$

$$\alpha_0(\rho, \tau) = \tau^3 \left[\ln \frac{\tau}{\rho} - 1 + \frac{\rho^2}{\tau^2} (1 + \ln \frac{\tau}{\rho}) \right], \beta_0(\rho, \tau) = 4\tau \ln \frac{\tau}{\rho} \cdot 1/4/$$

Для визначення констант $A_1, A_2, A_3, A_4, B_0, B$ та осадки штампів δ використовуємо умови рівності нулю згинного моменту та прогину при $\tau = c$

$$\frac{16(1-\nu^2)}{a_0^2} B = \bar{x} \int_a^b t \left[2(1+\nu) \ln \frac{t}{\gamma} + (1-\nu) \left(\frac{t^2}{\gamma^2} - 1 \right) + \frac{8\nu}{5a_0^2 \gamma^2} \right] \bar{q}(t) dt, \quad 15/$$

$$B_0 + \left(\gamma^2 - \frac{4}{a_0^2} \right) B = \frac{a_0^2 \bar{x}}{8(1-\nu)} \int_a^b \left[\alpha_0(\gamma, t) - \frac{4}{5a_0^2} \beta_0(\gamma, t) \right] \bar{q}(t) dt,$$

$$\alpha = \frac{a}{a_0 h}, \quad \beta = \frac{b}{a_0 h}, \quad \gamma = \frac{c}{a_0 h}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\pi \beta^2} = \frac{\rho h}{\pi \beta^2 D},$$

16/

умову рівноваги штампів

$$\int_a^b \bar{q}(\rho) \rho d\rho = \frac{\beta^2}{2}, \quad 17/$$

а також рівності, що забезпечують повне виконання /з точністю $O(h^4)$ / умови контакту /I/. Вони мають вигляд

$$\bar{x} \left[\frac{4}{5} \bar{q}'(\alpha) - \frac{256}{525 a_0^2} (\Delta \bar{q})'(\alpha) \right] = -(\Delta f_0)'(\alpha), \quad 18/$$

$$4(1-\nu) \alpha B + \frac{256}{525 a_0^2} \bar{x} \bar{q}'(\alpha) = f_0'(\alpha), \quad 19/$$

$$8(1-\nu) B - \bar{x} \left[\frac{4}{5} \bar{q}(\alpha) - \frac{256}{525 a_0^2} \Delta \bar{q}(\alpha) \right] = \Delta f_0(\alpha), \quad 10/$$

$$2(1-\nu) B_0 + 2(1-\nu) \left[\alpha^2 - \frac{4}{a_0^2} \right] B + \frac{256}{525 a_0^2} \bar{x} \bar{q}(\alpha) = f_0(\alpha) - \delta_0 f_0(\rho) = \frac{f(a_0 h \rho)}{h} \quad 11/$$

Якщо внутрішній радіус a зони контакту невідомий, а зовнішній b - заданий /наприклад, у випадку відставання центральної частини плоского кругового штампа/, то маємо додаткову умову

$$\bar{q}(\alpha) = 0. \quad /12/$$

При цьому, коли функція f , яка визначає форму штампа, є такою, що хоч одне з рівнянь /8/ - /10/ неоднорідне, то, задаючись

α , з рівнянь /5/, /8/ - /10/, /12/ знаходимо константи

$B, \bar{x}, A_i (i = \overline{1,4})$, а з рівняння рівноваги /7/ визначаємо безрозмірне зусилля $\bar{x}$, що відповідає заданому α . Якщо рівняння /8/ - /10/ однорідні /штамп з плоскою основою/, то зона контакту не залежить від зусилля $\bar{x}$, що діє на штамп. Тоді, задаючись α , з рівнянь /7/ - /10/, /12/ знаходимо сталі

$B/\bar{x}, A_i (i = \overline{1,4})$. Для визначення γ , що відповідає даному α , з умови /5/ одержуємо трансцендентне рівняння виду

$$L + M\lambda + \ln \lambda = 0, \quad \lambda = 1/\gamma^2. \quad /13/$$

Після цього сталу B_0 шукають з умови /6/, а δ - з /11/.

Якщо невідомі обидва радіуси a та b зони контакту, то поряд з /12/ слід використовувати умову

$$\bar{q}(\beta) = 0. \quad /14/$$

У цьому випадку, задаючись значенням β , систему /5/, /7/ - /10/, /12/, /14/ відносно $B, A_i (i = \overline{1,4}), \bar{x}$ та α розв'язуємо методом послідовних наближень.

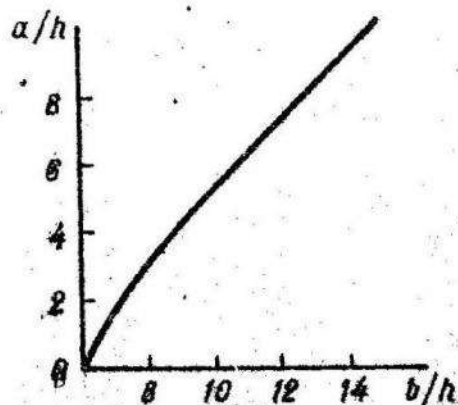


Рис. 1.

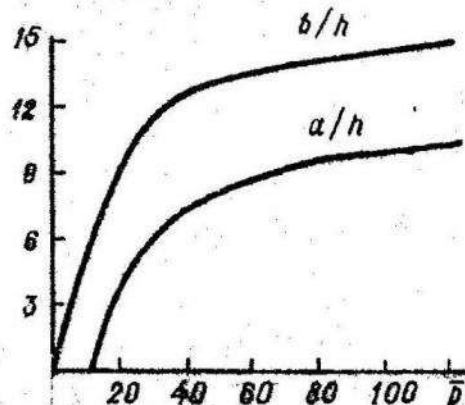


Рис. 2.

Рис. 1 для штампa з основою $f(r) = \frac{r^2}{2R}$ ілюструє залежність між зовнішнім b/h і внутрішнім a/h радіусами зони контакту, яка має місце при довільних c/h . Відставання центральної частини штампa від пластинки починається при $b/h = 6,13$. На рис. 2 показана залежність радіусів зони контакту a/h , b/h від безрозмірного зусилля $\bar{p} = \frac{PR}{a^2 D}$ при $c/h = 15$.

Список літератури: І. И л ь м а н В.М., Л а м з ю к В.Д., П р и в а р н и к о в А.К. О характере взаимодействия штампa с упругим многослойным основанием. - Механика твердого тела, 1975, № 5. 2. К о в н е р и с т о в Г.Б. Взаимодействие штампa и балочной плиты. - Сопротивление материалов и теория сооружений, 1975, вып. 25. 3. Х л е б н і к о в Д.Г., П а р а щ а к О.М. Осесимметричний згин круглої пластинки гладким штампом. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1979, вып. 14. 4. Ш в а б ю к В.И. Учет эффекта сжимаемости нормали в контактных задачах для трансверсально изотропных плит. - Прикладная механика, 1980, т. 16, вып. 4.

Стаття надійшла в редакцію 12.04.82

УДК 517.94:539.3

Н.П. Флейшман, Х.О. Бобик

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ІНВАРІАНТНОГО ЗАПУРЕННЯ

Крайові задачі для двовимірного диференціального рівняння у частинних похідних четвертого порядку моделюють різні задачі теорії ізотропних та анізотропних пластин /плоска задача теорії пружності, поперечний згин тонких плит, вимушені гармонійні коливання пластин на пружній основі та ін./.

У деяких випадках вигідно замінити рівняння четвертого порядку системою двох рівнянь другого порядку відносно двох шука-

них функцій, яку можна простіше розв'язати з достатньою точністю наближеннями методами. Якщо область, яку займає серединна площа пластинки, однозв'язна, то її можна відобразити на прямокутник $\Omega: \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ з границею $\partial\Omega$. При цьому задані диференціальні рівняння та відповідні граничні умови на границі пластинки зводять, взагалі кажучи, до такого виду:

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{n+l=0}^2 a_{nkr}(x,y) \frac{\partial^{n+l} u^{(k)}(x,y)}{\partial x^n \partial y^l} + \varphi_r(x,y) = 0, \quad /1/$$

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{n+l=0}^1 b_{nkr}(x,y) \frac{\partial^{n+l} u^{(k)}(x,y)}{\partial x^n \partial y^l} + \varphi_r(x,y) = 0 \text{ на } \partial\Omega \quad /2/$$

($r=1,2$),

де $u^{(k)}(x,y)$ - шукані функції; $a_{nkr}(x,y), b_{nkr}(x,y)$ - відомі змінні коефіцієнти; $\varphi_r(x,y), \varphi_r(x,y)$ - відомі функції.

Крайову задачу /1/ - /2/ розв'яземо наближено за допомогою дискретного варіанту методу занурення, при числовій реалізації якого можна ефективно використовувати ЕОМ.

Постановка задачі. Розглянемо розглядувану прямокутну область Ω прямокутною сіткою, кроки h і τ якої виберемо з умов $a = N\tau$, $b = Mh$, де N, M - цілі числа.

Позначимо через $u_{ji}^{(k)}, a_{nkrji}, b_{nkrji}, \varphi_{ji}, \varphi_{ji}^{(k)}$ ($i = \overline{0, N}; j = \overline{0, M}$) відповідно дискретні значення шуканих $u(x,y)$ і відомих функцій $a_{nkr}(x,y), b_{nkr}(x,y), \varphi_r(x,y), \varphi_r(x,y)$ у вузлах сітки та замінімо диференціальні оператори в /1/ - /2/ їх симетричними різницевими аналогами з точністю $O(h^2)$.

Після такої дискретизації система /1/ набуває вигляду

$$\sum_{k=1}^2 Q_{k1i}^{(p)} u_{i+1}^{(k)} + Q_{k1i}^{(p)} u_i^{(k)} + Q_{k2i}^{(p)} u_{i-1}^{(k)} + \varphi_{ki}^{(p)} = 0 \quad /3/$$

($p=1,2; i=\overline{1, N-1}$),

де $u_i^{(k)} \equiv u_{iN}^{(k)}$ - вектор вузлових значень шуканих функцій $u_{ji}^{(k)}$ при фіксованому значенні i . Прийняте позначення підкреслює залежність розв'язку від розміру області. У формулі /3/ введені ще такі позначення: $Q_{k1i}^{(p)}, Q_{k1i}^{(p)}, Q_{k2i}^{(p)}$ - відо-

мі квадратні матриці розмірності $(M-1)$; $\varphi_{ki}^{(p)}$ - відомий вектор [1]. Введемо також складні вектори розмірності

$$u_i = \begin{bmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \varphi_i = \begin{bmatrix} \varphi_i^{(1)} \\ \varphi_i^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (i = \overline{1, N-1}). \quad /4/$$

Тоді система /3/ записується як одне матрично-векторне різнице-
ве рівняння другого порядку

$$A_i u(i+1, N) + B_i u(i, N) + C_i u(i-1, N) + \varphi_i = 0, \quad /5/$$

де A_i, B_i, C_i - відомі блочні квадратні матриці розмірності $(2M-2)$. Їх вигляд залежить, очевидно, від змінних коефіцієнтів вихідної системи /1/. При правильній побудові матриць A_i, B_i, C_i дискретизовані крайові умови на краях $y=0$ і $y=b$ задовольняються тотожно.

Систему різницевих рівнянь /5/ відносно шуканих векторів формально можна розглядати як одновимірну.

Граничні умови на краях прямокутника $x=0$ і $x=a$ в найбільш загальному випадку набувають вигляду

$$L_1 u(-1, N) + L_2 u(0, N) + L_3 u(1, N) = C,$$

$$\beta_1(N) u(N+1, N) + \beta_2(N) u(N, N) + \beta_3(N) u(N-1, N) = d, \quad /6/$$

де C, d - задані вектори; $L_k, \beta_k(N)$ ($k = \overline{1, 3}$) - задані квадратні блочні матриці розмірності $(2M-2)$, які залежать від відомих коефіцієнтів граничних умов /2/.

Використовуючи ідею методу інваріантного занурення [1], представимо шуканий вектор у вигляді

$$u(i, N) = U(i, N) d + p(i, N), \quad /7/$$

де квадратна матриця $U(i, N)$ і вектор $p(i, N)$ в розв'язках наступних двоточкових крайових задач

$$A_i U(i+1, N) + B_i U(i, N) + C_i U(i-1, N) = 0, \quad /8/$$

$$L_1 U(-1, N) + L_2 U(0, N) + L_3 U(1, N) = 0, \quad /9/$$

$$\beta_1(N) U(N+1, N) + \beta_2(N) U(N, N) + \beta_3(N) U(N-1, N) = I, \quad /10/$$

$$A_i p(i+1, N) + B_i p(i, N) + C_i p(i-1, N) + \varphi_i = 0, \quad /11/$$

$$L_1 p(-1, N) + L_2 p(0, N) + L_3 p(1, N) = c, \quad /12/$$

$$\beta_1(N) p(N+1, N) + \beta_2(N) p(N, N) + \beta_3(N) p(N-1, N) = 0. \quad /13/$$

Легко перевірити, що вектор /7/ тотожно задовольняє задачу /5/ - /6/.

Знаходження матриці $U(i, N)$ методом запуснення. Розглянемо задачу /8/ - /10/ на відрізку довжиною $N+1$:

$$A_i U(i+1, N+1) + B_i U(i, N+1) + C_i U(i-1, N+1) = 0, \quad /14/$$

$$L_1 U(-1, N+1) + L_2 U(0, N+1) + L_3 U(1, N+1) = 0,$$

$$\beta_1(N+1) U(N+2, N+1) + \beta_2(N+1) U(N+1, N+1) + \beta_3(N+1) U(N, N+1) = I \quad /15/$$

і введемо позначення

$$R(N) = \beta_1(N) U(N+1, N+1) + \beta_2(N) U(N, N+1) + \beta_3(N) U(N-1, N+1). \quad /16/$$

Шляхом порівняння лінійних задач /14/ - /15/ і /8/ - /10/ знаходимо

$$U(i, N+1) = U(i, N) R(N). \quad /17/$$

Приймаючи тепер в /14/, /17/ і /8/ відповідно. $i = N$, $i = N-1$, $i = N$, $i = N-1$, $i = N-2$, $i = N-1$ і замінюючи в /16/ N на $N-1$, отримуємо систему семи алгебраїчних рівнянь, з якої шукані величини виражаються через $R(N)$, $R(N-1)$.

Таким чином, знаходимо

$$U(N, N) = g^{-1} [(I + \tau H^{-1} F) R(N-1) - \tau H^{-1}], \quad /18/$$

$$\tau = \beta_2(N-1) - \beta_3(N-1) C_{N-1}^{-1} B_{N-1}, \quad H = f_N - a_N g^{-1} \tau,$$

$$g = \beta_1(N-1) - \beta_3(N-1) \bar{C}_{N-1}^{-1} A_{N-1}, \quad F = a_N g^{-1},$$

$$f_N = \beta_3(N) - \beta_1(N) A_N^{-1} C_N, \quad a_N = \beta_2(N) - \beta_1(N) A_N^{-1} C_N. \quad /19/$$

З /16/ далі отримуємо

$$R(N) = [B_* - A_* R(N-1)]^{-1}, \quad /20/$$

де

$$\begin{aligned} B_* &= a_{N+1} \bar{A}_N^{-1} B_N g^{-1} G - a_{N+1} \bar{A}_N^{-1} C_N H^{-1} f_N g^{-1} G, \\ A_* &= a_{N+1} \bar{A}_N^{-1} B_N g^{-1} [I + GF] - a_{N+1} \bar{A}_N^{-1} C_N H^{-1} F - f_N g^{-1} [I + GF], \\ G &= z H^{-1}. \end{aligned} \quad /21/$$

Формулу /20/ використовувати для рекурентного обчислення матриць $R(N)$. Початкові значення $R(0)$ визначають з /16/ при $N=0$ у вигляді

$$R(0) = \beta_1(0) U(1,1) + \beta_2(0) U(0,1) + \beta_3(0) U(-1,1), \quad /22/$$

де

$$\begin{aligned} U(1,1) &= \bar{a}_1^{-1} (I + f_1 \bar{D}' d_1 \bar{a}_1^{-1}); \\ U(0,1) &= -\bar{D}' d_1 \bar{a}_1^{-1}; \\ U(-1,1) &= -\bar{C}_0^{-1} A_0 \bar{a}_1^{-1} [I + f_1 \bar{D}' d_1 \bar{a}_1^{-1}] + \bar{C}_0^{-1} B_0 \bar{D}' d_1 \bar{a}_1^{-1}; \\ D &= z - d_1 \bar{a}_1^{-1} f_1; \quad z = L_2 - L_1 \bar{C}_0^{-1} B_0; \quad d_1 = L_3 - L_1 \bar{C}_0^{-1} A_0. \end{aligned} \quad /23/$$

Отже, після обчислення матриць $R(n)$ за формулою /20/ можна визначити шукану матрицю $U(i, n+1)$ згідно /7/ у вигляді

$$U(i, n+1) = U(i, n) R(n), \quad (i \leq n \leq N-1) \quad /24/$$

з початковим значенням $U(i, i)$, яке отримувати з /18/ при $N=i$.

Обчислення вектора $p(i, N)$ методом занурення. Шляхом складання різниці рівнянь /11/ - /13/ і відповідних рівнянь, одержан-

них з них при заміні N на $N+1$, отримуємо

$$\begin{aligned} A_i P_*(i+1, N) + B_i P_*(i, N) + C_i P_*(i-1, N) &= 0, \\ L_1 P_*(-1, N) + L_2 P_*(0, N) + L_3 P_*(1, N) &= 0, \\ \beta_1(N) P_*(N+1, N) + \beta_2(N) P_*(N, N) + \beta_3(N) P_*(N-1, N) &= S(N). \end{aligned} \quad /25/$$

Тут позначено

$$\begin{aligned} P_*(i, N) &= p(i, N+1) - p(i, N), \\ S(N) &= \beta_1(N) p(N-1, N+1) + \beta_2(N) p(N, N+1) + \beta_3(N) p(N+1, N+1). \end{aligned} \quad /26/$$

Порівнюючи лінійні задачі /25/ і /8/ - /10/ і враховуючи /26/, знаходимо

$$p(i, N+1) = p(i, N) + U(i, N) S(N). \quad /27/$$

Поступаючи далі аналогічно попередньому, отримуємо

$$S(n) = R(n) [A_* S(n-1) + D_3] \quad (n = \overline{1, N}), \quad /28/$$

де

$$\begin{aligned} D_3 = & -a_{N+1} A_N' B_N g^{-1} z H^{-1} \{ \beta_1(N) A_N' \varphi_N - F \beta_3(N-1) C_{N-1}' \varphi_{N-1} \} + \\ & + a_{N+1} A_N' B_N g^{-1} \beta_3(N-1) C_{N-1}' \varphi_{N-1} + a_{N+1} A_N' C_N H^{-1} \{ \beta_1(N) A_N' \varphi_N - \\ & - F \beta_3(N-1) C_{N-1}' \varphi_{N-1} \} + a_{N+1} A_N' \varphi_N - f_{N+1} g^{-1} \{ \beta_3(N-1) C_{N-1}' \varphi_{N-1} - \\ & - z H^{-1} \beta_1(N) H^{-1} \varphi_N + z H^{-1} F \beta_3(N-1) C_{N-1}' \varphi_{N-1} \} + \beta_1(N+1) A_{N+1}' \varphi_{N+1}. \end{aligned}$$

Початкове значення $S(0)$, яке необхідне для рекурентного обчислення $S(n)$ за формулою /28/, визначають у вигляді

$$\begin{aligned} S(0) &= \beta_1(0) p(1, 1) + \beta_2(0) p(0, 1) + \beta_3(0) p(-1, 1), \\ p(1, 1) &= \alpha_1' \beta(1) A_1' \varphi_1 - \alpha_1' f_1 D^{-1} \{ c + L_1 C_0' \varphi_0 - d_1 \alpha_1' \beta(1) A_1' \varphi_1 \}, \\ p(0, 1) &= D^{-1} \{ c + L_1 C_0' \varphi_0 - d_1 \alpha_1' \beta(1) A_1' \varphi_1 \}, \\ p(-1, 1) &= -C_0' A_0 \{ \alpha_1' \beta(1) A_1' \varphi_1 - \alpha_1' f_1 D^{-1} [c + L_1 C_0' \varphi_0 - \\ & - d_1 \alpha_1' \beta(1) A_1' \varphi_1] \} - C_0' B_0 D^{-1} \{ L_1 C_0' \varphi_0 - d_1 \alpha_1' \beta(1) A_1' \varphi_1 + c \} - C_0' \varphi_0. \end{aligned} \quad /29/$$

Після визначення векторів $S(n)$ за формулою /28/ шукані вектори $p(i, n+1)$ обчислюють за співвідношенням /27/ при $N=n$

$$p(i, n+1) = p(i, n) + U(i, n) S(n), \quad (n \geq i). \quad /30/$$

Початковим значенням тут

$$p(i, i) = \alpha_i^{-1} [\beta_i(i) A_i^{-1} \varphi_i - f_i p(i-1, i)],$$

$$p(i-1, i) = H^{-1} \{ \beta_i(i) A_i^{-1} \varphi_i - F_3 S(i-1) - F_3 \beta(i-1) \tilde{C}_{i-1}^{-1} \varphi_{i-1} \}.$$

Знаючи матрицю $U(i, N+1)$ і вектор $p(i, N+1)$, обчислюємо $u(i, N+1)$ за формулою /7/. Таким чином, поставлена задача повністю розв'язана.

П р и к л а д и . Для чисельної реалізації виведеного алгоритму складена програма на мові ФОРТРАН-IV для ЕОМ ЕС-1022, за допомогою якої проведено обчислення прогинів пластин для двох випадків.

1. Вимушені коливання прямокутної плити на пружній основі, які описуються системою рівнянь [2]

$$\Delta W - V = 0, \quad \Delta V - 2\tau^2 V + (1 - m\omega^2) W = \frac{p}{D}.$$

Порівняння чисельних результатів з відомими точним розв'язком для одного часткового випадку дали змогу зробити висновок, що при $\alpha = \beta = 1$, $h = 1/20$ найбільша відносна похибка наближеного розв'язку не перевищує 2,3 %. Зі зменшенням кроків сітки похибка зменшується.

2. Побудова амплітудно-частотної характеристики для прогину центра тонкої прямокутної плити при різних значеннях частоти вимушених коливань ω ($p = \text{const}$, $\tau = \Delta = 0$).

Результати розрахунку підтверджують досить високу точність розв'язку методом інваріантного занурення.

Список літератури: І. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. - М.: Мир, 1974. 2. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. - М.: Физматгиз, 1960.

Стаття надійшла в редколегію 18.II.82

УДК 539.311

Л.О.Тисовський

ЗГИН ПЛИТИ З КРУТЛОЮ ШАЙБОЮ І ТОНКИМИ ПРУЖИМИ ПРЯМОЛІНІЙНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Розглянемо пружну рівновагу ізотропної плити /матриці/ товщиною $2h$ з впавною наскрізною шайбою радіуса R і N довільно розташованими прямолінійними тонкими пружними включеннями довжиною $2\ell_k$, шириною $2b_k$, товщиною $2h$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Центр шайби, точку O , зв'яжемо з декартовою системою координат xOy , а в центрах тонких включень, точках O_k , розмістимо початки локальних систем координат $x_k O_k y_k$, причому вісь x_k збігається з серединною лінією k -го включення і утворює кут α_k з віссю x /рис. 1/.

Припустимо, що плита знаходиться під дією рівномірно розподілених на нескінченності згинальних моментів M_x^∞, M_y^∞ , а на лініях розділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного контакту.

Величини, що характеризують пружне включення, позначатимемо індексом K / $k=1, 2, \dots, N$ /, шайбу - індексом 0. Параметри матриці писатимемо без індексів. Значками „плюс“ і „мінус“ позначатимемо граничні значення функцій відповідно при $y_k \rightarrow +0$ і $y_k \rightarrow -0$, а область $|z| \leq R$ - через S_0 , область $|z| \geq R$ - через S_2 .

Згідно з постановкою задачі на берегах k -го включення наявні граничні умови

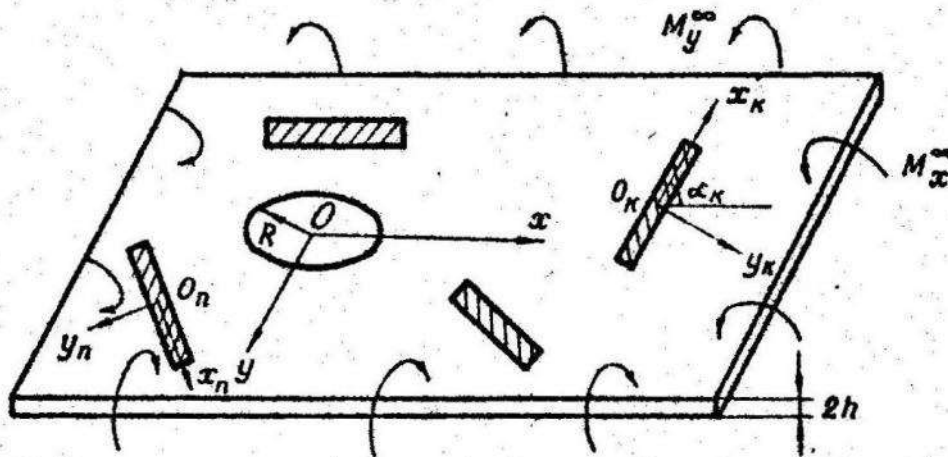


Рис. I.

$$\begin{aligned} (M_y)_k^\pm &= (M_y)^\pm, \quad (N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x})_k^\pm = (N_y + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x})^\pm, \\ (W)_k^\pm &= (W)^\pm, \quad (\frac{\partial W}{\partial y})_k^\pm = (\frac{\partial W}{\partial y})^\pm. \end{aligned}$$

/I/

Відомо, що в загальному випадку напружений стан у точкій плиті виражається через дві функції комплексної змінної $\Phi(z), \Psi(z)$ [3], які для даної задачі, з огляду її лінійності, можна записати у вигляді

$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \sum_{k=1}^N \Phi_k(z)$, $\Psi(z) = \Psi_0(z) + \sum_{k=1}^N \Psi_k(z)$, де $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ - функції, які голоморфні в комплексній площині зовні кругової шайби; $\Phi_k(z)$, $\Psi_k(z)$ - функції, що голоморфні у всій комплексній площині, крім лінії розміщення k -го включення.

Використавши методику праці [1], на основі граничних умов /1/ отримаємо в локальній системі координат x_k, y_k , крайові задачі для визначення невідомих функцій $\Phi_k(x)$, $\Psi_k(x)$ з лінійних стрибків $[-\ell_k, \ell_k]$

$$[\Phi_k(x) - \Omega_k(x)]^+ - [\Phi_k(x) - \Omega_k(x)]^- = 2i\beta_k K_k'(x), |x| \leq \ell_k,$$

$$[\alpha \Phi_k(x) + \Omega_k(x)]^+ - [\alpha \Phi_k(x) + \Omega_k(x)]^- = \frac{2\mu_k i \beta_k}{\mu} M_k'(x), |x| \leq \ell_k^{1/3},$$

$$[\Phi_k(x) + \Omega_k(x)]^+ + [\Phi_k(x) + \Omega_k(x)]^- =$$

$$= \frac{2}{1+\alpha_k} [(1-\alpha_k) K_k(x) + 2M_k(x) + 2\overline{K_k(x)} + 2\overline{M_k(x)}] - 2P_k(x) \cdot \varepsilon_1^k, |x| \leq \ell_k,$$

$$[\alpha \Phi_k(x) - \Omega_k(x)]^+ + [\alpha \Phi_k(x) - \Omega_k(x)]^- = iC_k +$$

$$+ \frac{2\mu_k}{\mu(1+\alpha_k)} [2\alpha_k K_k(x) + (\alpha_k - 1) M_k(x) - 2\overline{K_k(x)} - 2\overline{M_k(x)}] - 2P_k(x) \varepsilon_2^k, |x| \leq \ell_k,$$

$$\Omega_k(z) = \overline{\Phi_k(z)} + z \overline{\Phi_k'(z)} - \overline{\Psi_k(z)},$$

$$R_k(x) = \Phi_0(z_k) + \overline{\Phi_0(z_k)} + e^{-2i\alpha_k} [\overline{\Psi_0(z_k)} + z_k \overline{\Phi_0'(z_k)}],$$

$$P_k(x) = (1+\alpha) \Phi_0(z_k) - R_k(x), z_k = x e^{i\alpha_k} + z_k^0, z_k^0 = x_k^0 + i y_k^0,$$

$$\varepsilon_1^k = 1 - \frac{\min(\mu, \mu_k)}{\mu_k}, \quad \varepsilon_2^k = 1 - \frac{\min(\mu, \mu_k)}{\mu}.$$

/5/

Для простоти в /4/ і надалі індекс k біля змінної x відкидаємо; $K_k(x)$, $M_k(x)$ - невідомі функції; μ , μ_k - постійні. Дяме відповідно для матеріалів матриці та включення; x_k^0, y_k^0 - координати точки O_k у системі координат xOy .

Розв'язавши задачі лінійного спряження /3/, отримавмо значення функцій $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$ ($k=1,2,\dots,N$).

Врахувавши умови ідеального механічного контакту на лінії розділу кругової шайби та матриці, дістанемо задачі лінійного спряження для знаходження виразів для функцій $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$ через функції $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$ ($k=1,2,\dots,N$). Після цього знаходимо вирази для функцій $\Phi(z), \Psi(z)$ у системі координат x_n, y_n і підставляємо їх в співвідношення /4/. Тоді отримуємо систему інтегродиференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій $K_k(x), M_k(x)$ ($k=1,2,\dots,N$).

$$\sum_{j=1}^4 \alpha_{ij} f_{jn}(\xi) - \sum_{k=1}^N \beta_{ik} \int_{-1}^1 \left[\sum_{j=1}^4 S_{ijnk}(\tau, \xi) f'_{jk}(\tau) \right] d\tau = p_{in}(\xi), \quad |\xi| \leq 1 \quad /6/$$

($i=1,2; n=1,2,\dots,N$).

Тут введено наступні позначення:

$$\begin{aligned} \xi &= x/\ell_n, \quad \tau = t/\ell_k, \quad f_{1k}(\xi) = M_k(\ell_n \xi), \quad f_{2k}(\xi) = \overline{M_k(\ell_n \xi)}, \quad f_{3k}(\xi) = K_k(\ell_n \xi), \\ f_{4k}(\xi) &= \overline{K_k(\ell_n \xi)}, \quad \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{14} = \frac{2}{1+\alpha_n}, \quad \alpha_{13} = \frac{1-\alpha_n}{1+\alpha_n}, \quad \beta_{ik} = \frac{b_k}{\ell_k} \frac{\varepsilon_i^k}{\pi(1+\alpha)}, \\ \alpha_{22} = \alpha_{24} &= -\frac{2}{1+\alpha_n} \frac{\mu_n}{\mu}, \quad \alpha_{21} = \frac{\alpha_n-1}{1+\alpha_n} \frac{\mu_n}{\mu}, \quad \alpha_{23} = \frac{2\alpha_n}{1+\alpha_n} \frac{\mu_n}{\mu}, \\ S_{1jnk}(\tau, \xi) &= \frac{\mu_k}{\mu} \left[\frac{2}{\varepsilon_1^k} L_{jnk}(\tau, \xi) + G_{jnk}(\tau, \xi) + g_{jnk}(\tau, \xi) + f_{jnk}(\tau, \xi) \right], \quad j=1,2, \\ S_{13nk}(\tau, \xi) &= \frac{1-\alpha}{\varepsilon_1^k} L_{1nk}(\tau, \xi) + f_{1nk}(\tau, \xi) - \alpha g_{1nk}(\tau, \xi) + G_{1nk}(\tau, \xi), \\ S_{14nk}(\tau, \xi) &= \frac{1-\alpha}{\varepsilon_1^k} L_{2nk}(\tau, \xi) + f_{2nk}(\tau, \xi) + g_{2nk}(\tau, \xi) - \alpha G_{2nk}(\tau, \xi), \\ S_{2jnk}(\tau, \xi) &= \frac{\mu_k}{\mu} \left[\frac{\alpha-1}{\varepsilon_2^k} L_{jnk}(\tau, \xi) + \alpha g_{jnk}(\tau, \xi) - G_{jnk}(\tau, \xi) - f_{2j-1,nk}(\tau, \xi) \right], \quad j=1,2, \\ S_{23nk}(\tau, \xi) &= \frac{2\alpha}{\varepsilon_2^k} L_{1nk}(\tau, \xi) - G_{1nk}(\tau, \xi) - \alpha^2 g_{1nk}(\tau, \xi) - f_{1nk}(\tau, \xi), \\ S_{24nk}(\tau, \xi) &= \frac{2\alpha}{\varepsilon_2^k} L_{2nk}(\tau, \xi) + \alpha G_{2nk}(\tau, \xi) + \alpha g_{2nk}(\tau, \xi) - f_{2nk}(\tau, \xi), \end{aligned}$$

$$L_{1n\kappa}(\tau, \zeta) = \frac{e^{+i\alpha_\kappa}}{2} \left[\frac{1}{T_\kappa - \lambda_{n\kappa} X_n} + \frac{e^{-2i\alpha_n}}{T_\kappa - \lambda_{n\kappa} \bar{X}_n} \right],$$

$$L_{2n\kappa}(\tau, \zeta) = \frac{e^{-i\alpha_\kappa}}{2} \left[\frac{1}{T_\kappa - \lambda_{n\kappa} \bar{X}_n} - \frac{T_\kappa - \lambda_{n\kappa} X_n}{(T_\kappa - \lambda_{n\kappa} \bar{X}_n)^2} e^{-2i\alpha_n} \right],$$

$$g_{1n\kappa}(\tau, \zeta) = \frac{c \varepsilon_n^2 e^{i\alpha_\kappa}}{X_n (X_n T_\kappa - \lambda_{n\kappa} \varepsilon_n^2)}, \quad g_{2n\kappa}(\tau, \zeta) = c e^{-i\alpha_\kappa} \left[\frac{\varepsilon_n^2 (\varepsilon_n^2 \lambda_{n\kappa}^2 - T_\kappa \bar{T}_\kappa)}{T_\kappa (\varepsilon_n^2 \lambda_{n\kappa} - X_n \bar{T}_\kappa)^2} - \frac{1}{T_\kappa} \right],$$

$$G_{1n\kappa}(\tau, \zeta) = e^{i\alpha_\kappa} \left\{ \frac{c_1 \varepsilon_n^2 e^{-2i\alpha_n}}{\bar{X}_n (\bar{X}_n T_\kappa - \lambda_{n\kappa} \varepsilon_n^2)} + c \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_n^2 e^{-2i\alpha_n}}{X_n^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_n^2 (\varepsilon_n^2 \lambda_{n\kappa}^2 - T_\kappa \bar{T}_\kappa)}{T_\kappa (\varepsilon_n^2 \lambda_{n\kappa} - \bar{X}_n T_\kappa)^2} - \frac{1}{T_\kappa} \right) - \frac{2 \varepsilon_n^2 (X_n \bar{X}_n - \varepsilon_n^2) (\varepsilon_n^2 \lambda_{n\kappa}^2 - T_\kappa \bar{T}_\kappa)}{X_n (\varepsilon_n^2 \lambda_{n\kappa} - T_\kappa \bar{X}_n)^3} \right] \right\},$$

$$G_{2n\kappa}(\tau, \zeta) = c \varepsilon_n^2 e^{-i\alpha_\kappa} \left\{ \frac{1}{\bar{X}_n (T_\kappa \bar{X}_n - \varepsilon_n^2 \lambda_{n\kappa})} + e^{-2i\alpha_n} \frac{X_n \bar{X}_n (\varepsilon_n^2 \lambda_{n\kappa}^2 - 2 T_\kappa \bar{X}_n) + 3 \varepsilon_n^2 T_\kappa \bar{X}_n - 2 \varepsilon_n^4 \lambda_{n\kappa}}{\bar{X}_n^3 (\varepsilon_n^2 \lambda_{n\kappa} - T_\kappa \bar{X}_n)^2} \right\},$$

$$f_{1n\kappa}(\tau, \zeta) = \left[C + \frac{\varepsilon_n^2 e^{-2i\alpha_n}}{X_n^2} (C + C_4) \right] \frac{e^{i\alpha_\kappa}}{T_\kappa}, \quad f_{2n\kappa}(\tau, \zeta) = \left[C + \frac{\varepsilon_n^2 e^{-2i\alpha_n}}{X_n^2} (1 - C_3) \right] \frac{e^{-i\alpha_\kappa}}{T_\kappa},$$

$$f_{3n\kappa}(\tau, \zeta) = f_{2n\kappa}(\tau, \zeta) - C(1 + \alpha) \frac{e^{-i\alpha_\kappa}}{T_\kappa}, \quad C = \frac{\mu_0 - \mu}{\alpha \mu + \mu_0}, \quad C_1 = \frac{\alpha_0 \mu_0 - \alpha \mu}{\alpha_0 \mu_0 + \mu},$$

$$P_{in}(\zeta) = (-1)^{(i-1)n} \left\{ 2\Gamma + \bar{\Gamma}' e^{-2i\alpha_n} + c \varepsilon_n^2 \left[\frac{\bar{\Gamma}'}{X_n^2} + \frac{\Gamma'}{\bar{X}_n^2} + \frac{\Gamma' e^{-2i\alpha_n}}{X_n^3} \left(\frac{3 \varepsilon_n^2}{X_n} - 2 X_n \right) \right] + \frac{\varepsilon_n^2 e^{-2i\alpha_n} \Gamma'}{\bar{X}_n^3} (1 - C_2 C_3 + C_1) - (1 + \alpha) \left(\Gamma + \frac{c \varepsilon_n^2}{X_n^2} \Gamma' \right) \delta_{2i} \right\} i C_n \delta_{2i},$$

$$\Gamma = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \Gamma' = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D(1-\nu)}, \quad \lambda_{n\kappa} = \frac{\ell_n}{\ell_\kappa}, \quad \varepsilon_n = \frac{R}{\ell_n},$$

$$C_2 = \frac{\mu_0(1+\alpha)}{\alpha_0 \mu_0 + \mu}, \quad C_3 = \frac{\mu(1+\alpha)}{\alpha_0 \mu_0 + 2\mu - \mu_0}, \quad C_4 = C_3 \frac{\mu - \mu_0}{\alpha_0 \mu_0 + \mu},$$

$$X_n = \lambda e^{i\alpha_n} + z_n^0 / \ell_n, \quad T_\kappa = \tau e^{i\alpha_\kappa} + z_\kappa^0 / \ell_\kappa.$$

Крім того, повинні виконуватися умови однозначності кутів повороту нормалі до серединної площини при обході контура n -го включення, рівності нулю головного момента всіх зусиль, прикладених до n -го включення, а також умови однозначності прогинів точок серединної площини при обході n -го включення, які можна записати як

$$\int_{-1}^1 f_{jn}'(\tau) d\tau = 0, j=1,3; n=1,2,\dots,N; \int_{-1}^1 \tau f_{3n}'(\tau) d\tau = 0. \quad /7/$$

Систему рівнянь /6/, /7/ розв'язували чисельно з використанням методу механічних квадратур[1]. Коефіцієнти інтенсивності зусиль у цьому випадку визначали за формулами

$$K_{1n}^j - iK_{2n}^j = \sqrt{\frac{\pi}{\ell}} \frac{\alpha \beta_n E h}{\alpha - 1} \frac{\mu_n}{\mu} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{(m-1)n} U_{1m}^n \left(\operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi \right)^{(2j-3)},$$

$$K_{3n}^j - iK_{4n}^j = \sqrt{\frac{\pi}{\ell}} \frac{\alpha \beta_n E h}{\alpha - 1} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{(m-1)n} U_{3m}^n \left(\operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi \right)^{(2j-3)}, \quad /8/$$

де $j = 1$ для лівого кінця; $j = 2$ для правого кінця; M - парне;

$$U_{jm}^n = f_{jn}'(t_m) \sqrt{1-t_m^2}; \quad t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi.$$

На рис. 2 показана графічна залежність коефіцієнтів інтенсивності напружень $K_{ij} = h^2 K_{ij} / (M^2 \sqrt{\pi \ell})$ від кута орієнтації включення для випадку плити з довільно розташованими кутлим отвором і одним прямолінійним тонкостінним включенням при $M_y^{\infty} = 0 (M_x^{\infty} = M_y^{\infty})$. Величини, що відносяться до ближньої /по відношенню до отвору/ вершини включення, позначені суцільними лініями, до дальньої - пунктирними.

Обчислення проводили при наступних значеннях параметрів:

$$x_0/\ell = 4, \quad y_0/\ell = 0, \quad \beta/\ell = 0,1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 5.$$

Криві 4, 3 характеризують значення K_{31} відповідно для тріщини та пружного включення при відносній жорсткості включення $k = \mu_1/\mu = 0,1$. Криві 2, 7, 1, 6 дають значення коефіцієнтів

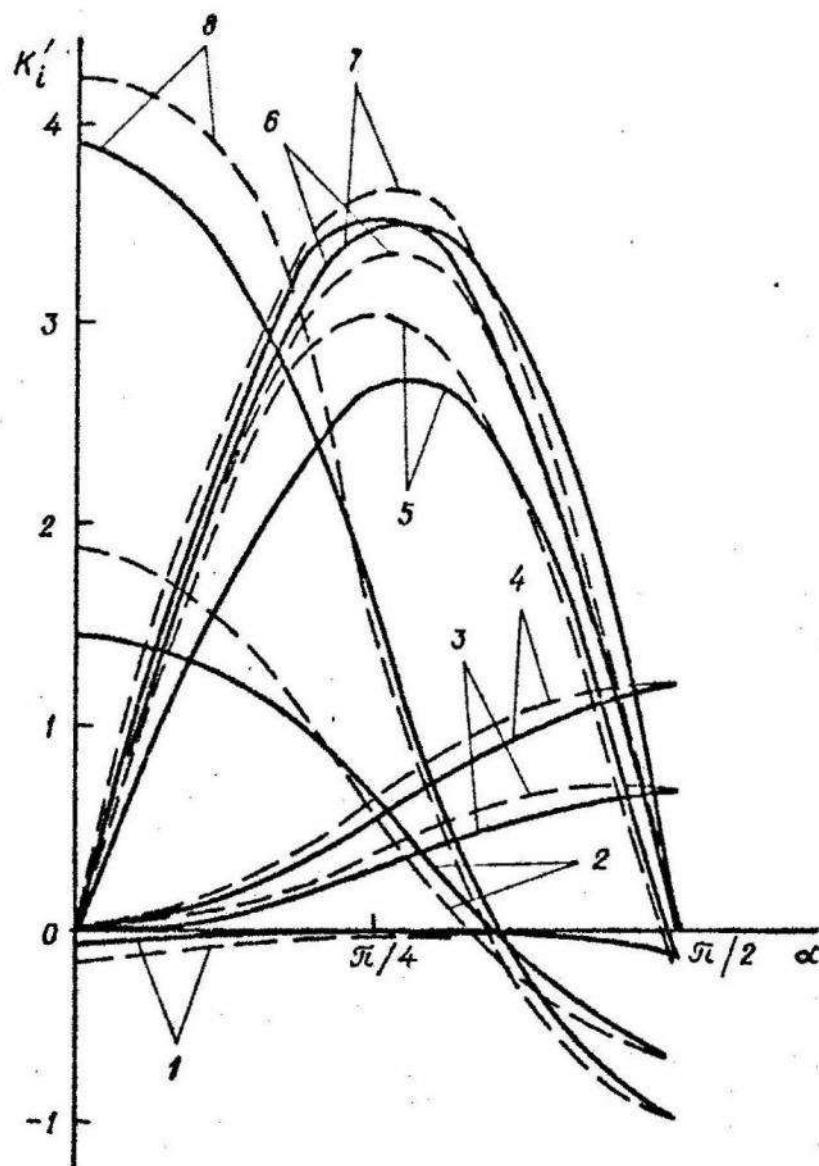


Рис. 2.

$K_{II}'/l = 1, 2, 3, 4$ для пружного включення при $k = 10$, криві 8" 5 - значення коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{II}' , K_{21}' для абсолютно жорсткого включення. Решта величин мають порядок $10^{-3} - 10^{-1}$ і на рисунку не показані.

Список літератури: І. Грилицкий Д.В.; Драган М.О., Оманасович В.К. Изгиб плиты с прямолинейным тонкостенным включением. - МТТ, 1979, № 3. 2. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - Киев: Наукова думка, 1979. 3. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит. - Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1975.

Стаття надійшла в редакцію 4.07.82

В.К.Опанасович, М.С.Драган

АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ ТІЛА

З СИСТЕМОЮ ТОНКИХ ПРУЖНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Нехай у пружному тілі, яке зв'язане з декартовою системою координат $OXYZ$ є N прямолінійних тонких пружних включень типу смуги шириною $2\ell_k$ і товщиною $2h_k$ ($k=1,2,\dots,N$). Припускаємо, що тіло перебуває під дією зовнішнього навантаження в умовах антипоскої деформації і вісь деформації направлена по осі OZ . На берегах включень має місце ідеальний механічний контакт.

Подібно до монографії [3] розглядатимемо лише поперечний переріз XOY . Нехай центри включень O_k визначаються координатами $Z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0$. Точки O_k візьмемо за початки локальних систем координат $x_k O_k y_k$, а вісь $O_k x_k$ спрямуємо вздовж k -го включення, при цьому кут між цією віссю і віссю Ox позначимо через α_k /рис. 1/. Величини, які характеризують k -те включення, позначатимемо індексом k , знаками "плюс" і "мінус" - граничні значення функцій при $y_k \rightarrow +0$ і $y_k \rightarrow -0$; сегмент дійсної осі $O_k x_k [-\ell_k, \ell_k]$ - через L_k .

Умови механічного контакту n -го включення з тілом

$$\tau_{yz}^{\pm} = (\tau_{yz})_n^{\pm}, \quad W^{\pm} = W_n^{\pm}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad \text{II}$$

де W - проекція вектора пружного переміщення на вісь OZ ;

τ_{yz} - компонента тензора напружень.

Нехай у пружному тілі є тільки одне тонке прямолінійне пружне включення, тоді в системі координат $x_k O_k y_k$ аналітична функція $F(z_k)$, що характеризує напружено-деформований стан

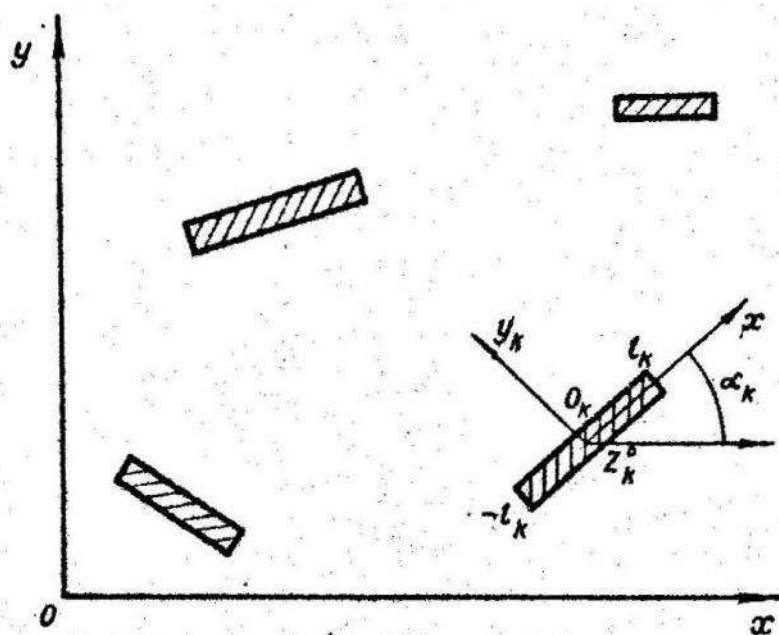


Рис. 1.

тіла, має вигляд [2]

$$F(z_k) = h_k [I_k(z_k) + J_k(z_k)] / (2\pi i) + F_0(z_k), \quad /2/$$

де

$$I_k(z_k) = \beta_k \int_{-l_k}^{l_k} \frac{\rho'_k(t) dt}{t - z_k}; \quad J_k(z_k) = i \int_{-l_k}^{l_k} \frac{Q'_k(t) dt}{t - z_k};$$

$$z_k = x_k + iy_k; \quad \beta_k = \mu / \mu_k;$$

μ, μ_k - коефіцієнти Ламе;

задачі для тіла без виключення;

функції.

$F_0(z_k)$ - розв'язок тієї ж

$\rho_k(x), Q_k(x)$ - невідомі

Враховуючи співвідношення /2/ і лінійність задачі, аналітичну функцію $F(z)$ для тіла з N щільними виключеннями можна подати у вигляді

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N h_k e^{-i\alpha_k} [I_k(z_k) + J_k(z_k)] + F_0(z), \quad /3/$$

де

$$z_k = e^{-i\alpha_k} (z - z_k^0).$$

Використовуючи формули переходу від однієї системи координат до другої [3], для визначення компоненти напруження τ_{yz} і похідної від переміщення W по x_n у системі координат $x_n O_n y_n$ матимемо наступні співвідношення

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial x} W\right)_n - l(\tau_{yz})_n = \tilde{F}_n(z_n) + \tilde{F}(z_n), \quad /4/$$

де

$$\tilde{F}_n(z_n) = h_n [I_n(z_n) + J_n(z_n)] / (2\pi i);$$

$$\tilde{F}(z_n) = \sum_{k \neq n} h_k e^{i\alpha_{nk}} [I_k(z_k) + J_k(z_k)] / (2\pi i) + F_{on}(z_n); /5/$$

$$z_k = e^{-i\alpha_k} (z_n e^{i\alpha_n} + z_n^0 - z_k^0), \quad \alpha_{nk} = \alpha_n - \alpha_k.$$

Символ $\sum_{k \neq n}^N$ позначає суму $\sum_{k=1}^N$, причому при $k=n$ доданок у ній відсутній.

Беручи до уваги /4/, для n -го включення можемо записати [2]

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n^+(x_n) + \tilde{F}_n^-(x_n) &= \beta_n Q_n(x_n) - i\rho_n(x_n) - \\ &- 2[\alpha_n \operatorname{Re} \tilde{F}(x_n) + i\beta_n \operatorname{Im} \tilde{F}(x_n)], \quad x_n \in L_n, \quad n=1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad /6/$$

де

$$\alpha_n = 1 - \min(1, \beta_n); \quad \beta_n = 1 - \min(1, 1/\beta_n).$$

Підставляючи вирази функцій $\tilde{F}_n(z_n)$, $\tilde{F}(z_n)$ /5/ в умову /6/, одержуємо систему інтегродиференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій $Q_n(x)$ і $P_n(x)$:

$$\begin{aligned} \pi P_n(x) - h_n I_n(x) + b_n \sum_{k \neq n} h_k \int_{-\ell_k}^{\ell_k} [Q'_k(t) \operatorname{Im} R_{nk}(t, x) - \\ - \beta P'_k(t) \operatorname{Re} R_{nk}(t, x)] dt = -2\pi b_n I_m F_{on}(x), \\ \pi \beta_n Q_n(x) + i h_n J_n(x) - a_n \sum_{k \neq n} h_k \int_{-\ell_k}^{\ell_k} [\beta P'_k(t) \operatorname{Im} R_{nk}(t, x) + \\ + Q'_k(t) \operatorname{Re} R_{nk}(t, x)] dt = 2\pi a_n \operatorname{Re} F_{on}(x), \quad n=1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

причому

$$R_{nk}(t, x) = \frac{e^{i d_n}}{i'_k - X_n}, \quad T_k = t e^{i d_k + z_k^0}, \quad X_n = x e^{i d_n + z_n^0}.$$

Тут і далі індекс в x_n опускаємо.

На основі /7/, використовуючи метод механічних квадратур [3], запишемо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M v_n(t_m) [\pi \eta(x_i - t_m) - \gamma_n \beta / (t_m - x_i)] + b_n \sum_{k \neq n} h_k \sum_{m=1}^M [u_k(t_m) \times \\ \times \operatorname{Im} R_{nk}(\ell_k t_m, \ell_n x_i) - \beta v_k(t_m) \operatorname{Re} R_{nk}(\ell_k t_m, \ell_n x_i)] = \\ = -2M b_n I_m F_{on}(\ell_n x_i), \\ \sum_{m=1}^M u_n(t_m) [\pi \beta \eta(x_i - t_m) - \gamma_n / (t_m - x_i)] - a_n \sum_{k \neq n} h_k \sum_{m=1}^M [\beta v_k(t_m) \times \end{aligned}$$

$$\times I_m R_{nk} (\ell_k t_m \ell_n x_z) + U_k(t_m) \operatorname{Re} R_{nk} (\ell_k t_m, \ell_n x_z)] = \\ = 2M \alpha_n \operatorname{Re} F_{0n} (\ell_n x_z), \quad m=1, 2, \dots, M, \quad z=1, 2, \dots, M-1, \quad n=1, 2, \dots, N, \quad /8/$$

де

$$x_n = h_n / \ell_n; \quad t_m = \cos(\pi(2m-1)/(2M)); \quad x_z = \cos(\pi z / M),$$

$$U_n(t) = \sqrt{1-t^2} Q'_n(t); \quad v_n(t) = \sqrt{1-t^2} P'_n(t), \quad |t| \leq 1;$$

$\eta(x)$ — функція Хевісайда.

Систему /8/ слід доповнити співвідношеннями

$$\sum_{m=1}^M U_n(t_m) = 0, \quad \sum_{m=1}^M v_n(t_m) = 0, \quad n=1, 2, \dots, N, \quad /9/$$

які виражають умови рівноваги для кожного включення й умови однозначності переміщень при обході контура включення.

Напружений стан в околі кінців n -го включення описується тими ж залежностями, що і для одного включення [2], причому коефіцієнти інтенсивності напружень K_{1n}/K_{2n} визначають за формулами

$$K_{1n}^{\pm} - i K_{2n}^{\pm} = \mp \frac{h_n}{2\sqrt{\ell_n}} (U_n(\pm 1) - i \beta_n v_n(\pm 1)), \quad /10/$$

де

$$\left\| \begin{matrix} U_n(\pm 1) \\ v_n(\pm 1) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\| \begin{matrix} U_n(t_m) \\ v_n(t_m) \end{matrix} \right\| (-1)^z \operatorname{tg}^{\mp 1} \left(\frac{2m-1}{4M} \pi \right); \\ z = m+1 + (M+1)(1 \mp 1)/2.$$

Зробивши в /7/ або /8/ відповідний граничний перехід, одержимо розв'язок задачі для бездефектного тіла та тіла з тріщинами [3] і жорсткими включеннями [1].

Проведено числовий аналіз КІН при взаємодії двох включень однакової відносної жорсткості $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ у випадку, коли задані зсувні напруження на нескінченності. Обчислення проводили при таких значеннях параметрів задачі: $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, $h_1 = h_2 = h$, $h/\ell = 0,1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $z_1^0 = 0$.

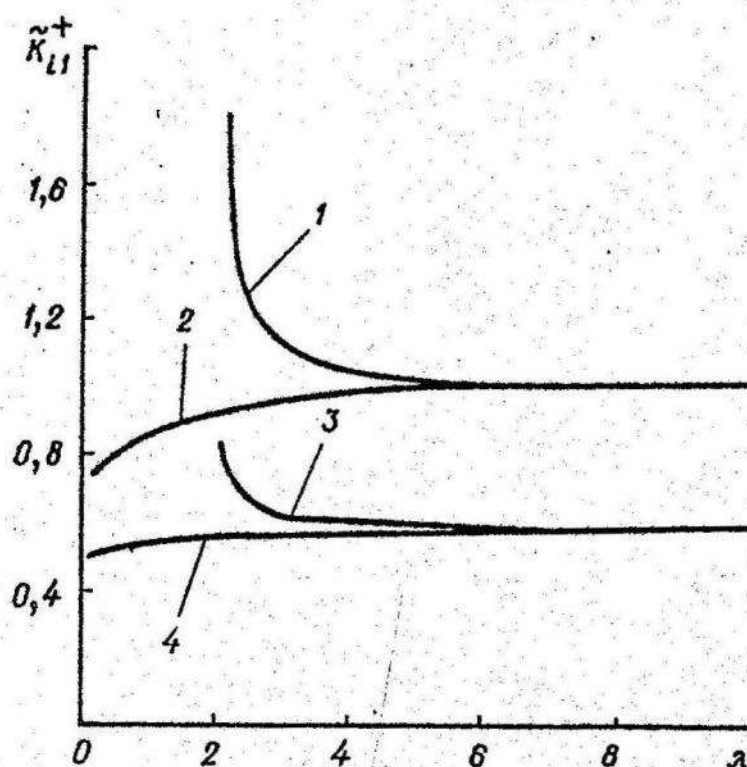


Рис. 2.

На рис. 2 показана залежність КІН $\tilde{K}_{i1}^+ = K_{i1}^+ / \sqrt{\ell} \tau$ ($i=1,2$) від відносної відстані між центрами включень $\lambda = d/\ell$ і d - відстань між центрами включень. Криві 1, 3 побудовані для випадку, коли $z_2^0 = d$ і $\tau = \tau_{xz}^\infty$, а криві 2, 4 - для випадку $z_2^0 = id$, $\tau = \tau_{xz}^\infty$. Криві 1, 2 і 3, 4 характеризують R_{21}^+ відповідно, коли β дорівнює 10^5 і 10 . Зауважимо, що ті ж самі криві 1, 2 і 3, 4 характеризують $\tilde{K}_{11}^+$ відповідно при β , рівному 10^{-5} і $0,1$ у випадку, коли $\tau = \tau_{yz}^\infty$, при тих же параметрах, що і для $\tau = \tau_{xz}^\infty$.

Як впливає із графіків, КІН збільшуються, коли $z_2^0 = a$ і зменшуються, якщо $z_2^0 = id$. Взаємодія між включеннями починається при значенні параметра $\lambda < 5$.

Список літератури: І. Б е р е ж н и ц к и й Л.Т., Л е н ь М.П. Антиплоская деформація тела с жесткими включениями. - Проблемы прочности, 1975, № 8. 2. О п а н а с о в и ч В.К.; Д р а г а н М.С. Антиплоская деформація тіла з тонкоостінним пружним включенням. - Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1981, вип. 17. 3. П а н а с о в к В.В., С а в р у к М.П., Д а ц и ш и н А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. - Киев: Наукова думка, 1976.

Стаття надійшла в редколегію 3.01.83

УДК 539.3.

М.Ф.Копитко, Я.Г.Савула

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНОК НУЛЬОВОЇ ГАУССОВОЇ КРИВИНИ

Розглянемо задачу знаходження власних форм і частот оболонок нульової гауссової кривини, геометрія яких описана у праці [4]. Для апроксимації розв'язку використаємо напіваналітичний метод скінченних елементів /НСЕ/ [2, 3].

Задача пошуку n найменших частот і відповідних їм форм власних коливань НСЕ зводиться до визначення n найменших власних значень і власних векторів системи рівнянь високого порядку N ($n \ll N$):

$$KU - \lambda MU = 0, \quad //1/$$

де K - матриця жорсткості; M - матриця маси оболонки; U - вектор невідомих коефіцієнтів; $\lambda = \omega^2$, ω - колова частота власних коливань.

При розв'язуванні неповної проблеми власних значень для системи /1/ необхідно враховувати малу заповненість матриць K і M , їх велику розмірність N і те, що $n \ll N$.

Перераховані вимоги задовольняє метод, в основу якого покладена ідея одночасної ітерації в n -мірному підпросторі [5; 6]. Цей метод /його ще називають блочно-степеневим/ є узагальненням класичного степеневого методу.

Ідея цього методу полягає ось у чому. Виходячи з матриці U_{i-1} , складеної з n лінійно незалежних стовпців, які є наближеннями для власних векторів, розв'язуємо систему рівнянь

$$KX_i = MU_{i-1}.$$

Пізніше розглядаємо n -вимірну задачу на власні значення вигляду

$$(X_i^T K X_i) Q = \nu (X_i^T M X_i) Q. \quad /2/$$

Наближеннями значеннями перших n власних чисел системи /1/ є власні значення системи /2/. Нова матриця U_i , яка дорівнює добутку матриці X_i на квадратну матрицю, складену із власних векторів системи /2/, це i -те наближення для власних векторів системи /1/. Доведено, що при $i \rightarrow \infty$ власні значення системи /2/ прямують до n перших власних значень системи /1/, а власні вектори U_i — до власних векторів системи /1/.

Описаний підхід до знаходження власних форм коливань і відповідних їм частот реалізований у вигляді комплексу програм на мові ФОРТРАН-IV для машини ЕС 1022 і апробований на ряді прикладів.

Приклад I. Розглянемо власні коливання прямокутної шарнірно опертої пластини товщини $h = 0,05$, ширини $a = 3,14$,

довжини $\ell = 10$ /коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, модуль Юнга $E = 1$, густина матеріалу $\rho = 1$.

Для n півхвиль по ширині пластинки і однієї півхвилі по довжині в табл. 1 наведені значення квадратів власних колових частот коливань ω^2 . Дані табл. 1 дають змогу говорити про характер збіжності власних частот залежно від кількості скінчених елементів $N1$ на ширині пластинки.

Таблиця 1

n	$\omega^2 \cdot 10^3$			
	[7]	$N1 = 6$	$N1 = 12$	$N1 = 22$
1	0,27635	0,27638	0,27568	0,26914
2	3,8459	3,8519	3,8457	3,8419
3	18,952	19,099	18,962	189,947
4	59,333	61,089	59,428	59,338

Приклад 2. Розглянемо власні коливання колової циліндричної оболонки товщини $h = 0,05$, радіуса $R = 10$, довжини $\ell = 10$. На торцях оболонки задані умови шарнірного опирання. Для власних форм коливань з однією півхвилею по довжині оболонки і числом півхвиль, кратним восьми, по торцю у табл. 2 наведені значення квадратів власних колових частот при різній кількості елементів $N1$ по торцю.

Таблиця 2

$n/8$	$\omega^2 \cdot 10^3$				
	[1]	$N1 = 6$	$N1 = 12$	$N1 = 18$	$N1 = 26$
1	0,30343	0,55357	0,35975	0,32409	0,31612
2	1,6326	2,6062	1,8684	1,7274	1,6914
3	7,8609	9,9996	8,3873	8,0727	7,9879
4	24,417	28,556	25,423	24,854	24,705
5	37,960	37,964	37,962	37,958	37,955

Приклад 3. Дослідимо залежність частот і форм власних коливань циліндричного перекриття від виду напрямної. Довжина перекриття $\ell = 100$, ширина $a = 16\pi$, висота $b = 16$, товщина $h = 2$. Для різних видів напрямної у табл. 3 наведено шість перших власних частот коливань.

Таблиця 3

n	$\omega^2 \cdot 10^3$				
	коло	еліпсо	парабола	косинусоїда	ланцюгова лінія
1	0,11526	0,08557	0,08890	0,08040	0,09624
2	0,24796	0,11035	0,27956	0,25979	0,27788
3	0,83809	0,46447	0,75335	0,64120	0,82903
4	1,07276	0,76558	0,82939	0,83782	0,83832
5	1,8487	1,4447	1,7605	1,6831	1,7900
6	2,3235	1,8898	2,0181	1,9951	2,0385

Список літератури: І. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик Т.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. - М.: Наука, 1979. 2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. 3. Савула Я.Г., Флейшман Н.П., Шинкаренко Г.А. Метод расчета труб с произвольной криволинейной осью. - Сопротивление материалов и теория сооружений, 1978, вып. 38. 4. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А., Вовк В.Н. Некоторые приложения метода конечных элементов. - Львов, 1981. 5. Смирненко Т.В. Применение метода конечных элементов к расчету форм и частот собственных колебаний авиационных конструкций. - Уч. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та, 1981, 12, № 2. 6. Стрент Г., Фико Дж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1976. 7. Филипов А.П. Колебания деформируемых систем. - М.: Машиностроение, 1970.

Стаття надійшла в редакцію 02.11.81

Б.В.Ковальчук

ДВОВІМІРНА СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

ДЛЯ ШАРУ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянемо шар товщиною ℓ , в якому на відстані $\frac{\ell}{2}$ від граничної поверхні $z=0$ розміщена серединна поверхня чужорідного включення товщиною $2d$. На поверхнях $z=0$, $z=\ell$ шару задані температури як функції координати x , тобто

$$t|_{z=0} = t_0(x), \quad t|_{z=\ell} = t_\ell(x). \quad /1/$$

Подемо теплопровідність шару як єдиного цілого у вигляді

$$\lambda(z) = \lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1) N(z), \quad /2/$$

де λ_1 , λ_0 - коефіцієнти теплопровідності основного матеріалу і включення;

$$N(z) = S_-(z - z_1 + d) - S_+(z - z_1 - d),$$

$$S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5 \pm 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Підставивши /2/ у рівняння теплопровідності неоднорідного тіла

$$\lambda(z) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(z) \frac{\partial t}{\partial z} \right] = 0, \quad /3/$$

одержимо

$$[\lambda_1 + (\lambda_0 - \lambda_1) N(z)] \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + (\lambda_0 - \lambda_1) \frac{\partial}{\partial z} \left[N(z) \frac{\partial t}{\partial z} \right] = 0. \quad /4/$$

Оскільки включення тонке, то [1]

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{N(z)}{2d} = \delta(z - z_1), \quad /5/$$

де $\delta(z - z_1)$ - дельта-функція Дірака.

Ввівши зведену теплопровідність $\Lambda_0 = 2\lambda_0 d$ [2], з огляду на /5/ запишемо рівняння /4/ у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = & -\frac{\Lambda_0}{2\lambda_1} (1 - K_\lambda^{-1}) \left[2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \Big|_{z_1} \delta(z - z_1) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z_1+0} + \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z_1-0} \right) \delta'(z - z_1) \right], \end{aligned} \quad /6/$$

$$\text{де } K_\lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}, \quad \delta'(z - z_1) = \frac{d\delta(z - z_1)}{dz}.$$

Застосуємо до рівняння /6/ перетворення Фур'є по z . В результаті одержимо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{t}}{dz^2} - \xi^2 \bar{t} = & \frac{\Lambda_0}{2\lambda_1} (1 - K_\lambda^{-1}) \left[2 \xi^2 \bar{t} \Big|_{z_1} \delta(z - z_1) - \right. \\ & \left. - \left(\bar{t}' \Big|_{z_1+0} + \bar{t}' \Big|_{z_1-0} \right) \delta'(z - z_1) \right], \end{aligned} \quad /7/$$

де ξ - параметр перетворення Фур'є.

При цьому граничні умови /1/ записуємо як

$$\bar{t} \Big|_{z=0} = \bar{t}_0, \quad \bar{t} \Big|_{z=l} = \bar{t}_l. \quad /8/$$

Загальний розв'язок рівняння /7/ має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{t} = & A \operatorname{ch} |\xi| z + B \operatorname{sh} |\xi| z - \frac{\Lambda_0}{2\lambda_1} (1 - K_\lambda^{-1}) \left[\left| \xi \bar{t} \right|_{z_1} e^{-|\xi| |z - z_1|} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\bar{t}' \Big|_{z_1+0} + \bar{t}' \Big|_{z_1-0} \right) e^{-|\xi| |z - z_1|} \operatorname{sgn}(z - z_1) \right], \end{aligned} \quad /9/$$

де сталі A і B потрібно визначати із граничних умов /8/.

Продиференціювавши /9/ по z , маємо

$$\frac{d\bar{t}}{dz} = |\xi| (A \operatorname{sh} |\xi| z + B \operatorname{ch} |\xi| z) + \frac{\Lambda_0}{2\lambda_1} (1 - K_\lambda^{-1}) \left\{ \xi \bar{t} \Big|_{z_1} e^{-|\xi|(z-z_1)} \operatorname{sign}(z-z_1) + \right. \\ \left. + (\bar{t}' \Big|_{z_1+0} + \bar{t}' \Big|_{z_1-0}) \left[\frac{1}{2} |\xi| e^{-|\xi|(z-z_1)} - \delta(z-z_1) \right] \right\}. \quad /10/$$

Із /9/ і /10/ знаходимо

$$\bar{t} \Big|_{z_1} = \frac{A \operatorname{ch} |\xi| z_1 + B \operatorname{sh} |\xi| z_1}{1 + \mathcal{L}(|\xi|)}, \quad /11/$$

$$\bar{t}' \Big|_{z_1+0} + \bar{t}' \Big|_{z_1-0} = \frac{2|\xi| (A \operatorname{sh} |\xi| z_1 + B \operatorname{ch} |\xi| z_1)}{1 - \mathcal{L}(|\xi|)}, \quad /12/$$

$$\text{де } \mathcal{L}(|\xi|) = \frac{|\xi| \Lambda_0}{2\lambda_1} (1 - K_\lambda^{-1}).$$

Згідно з граничними умовами /8/ одержуємо таку систему алгебраїчних рівнянь:

$$A [1 + (M \operatorname{sh} |\xi| z_1 - \mathcal{K} \operatorname{ch} |\xi| z_1) e^{-|\xi| z_1}] + \\ + B (M \operatorname{ch} |\xi| z_1 - \mathcal{K} \operatorname{sh} |\xi| z_1) e^{-|\xi| z_1} = \bar{t}_0, \quad /13/$$

$$A [\operatorname{ch} |\xi| \ell - (M \operatorname{sh} |\xi| z_1 + \mathcal{K} \operatorname{ch} |\xi| z_1) e^{-|\xi|(\ell-z_1)}] + \\ + B [\operatorname{sh} |\xi| \ell - (M \operatorname{ch} |\xi| z_1 + \mathcal{K} \operatorname{sh} |\xi| z_1) e^{-|\xi|(\ell-z_1)}] = \bar{t}_\ell, \quad /14/$$

де

$$M = M(|\xi|) = \frac{\mathcal{L}(|\xi|)}{1 - \mathcal{L}(|\xi|)}; \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}(|\xi|) = \frac{\mathcal{L}(|\xi|)}{1 + \mathcal{L}(|\xi|)}$$

Звідси одержуємо

$$A = \Delta_0^{-1} \left\{ \bar{t}_0 [sh |\xi| \ell - (M ch |\xi| z_1 + \mathcal{K} sh |\xi| z_1) e^{-|\xi|(\ell-z_1)}] - \right. \\ \left. - \bar{t}_0 (M ch |\xi| z_1 + \mathcal{K} sh |\xi| z_1) e^{-|\xi|z_1} \right\}, \quad /15/$$

$$B = \Delta_0^{-1} \left\{ \bar{t}_0 [(M sh |\xi| z_1 + \mathcal{K} ch |\xi| z_1) e^{-|\xi|(\ell-z_1)} - ch |\xi| \ell] + \right. \\ \left. + \bar{t}_0 [1 + (M sh |\xi| z_1 - \mathcal{K} ch |\xi| z_1) e^{-|\xi|z_1}] \right\}, \quad /16/$$

де

$$\Delta_0 = \Delta_0(|\xi|) = sh |\xi| \ell - \frac{2\mathcal{Z}}{1-\mathcal{Z}^2} ch |\xi| (\ell - 2z_1).$$

Підставивши тепер /11/, /12/, /15/, /16/ у /9/, після деяких перетворень маємо

$$\bar{t} = [\Delta_0(|\xi|)]^{-1} \left\{ \bar{t}_0 [sh |\xi| (\ell - z) - M(|\xi|) ch |\xi| (z - z_1) e^{-|\xi|(\ell-z_1)} + \right. \\ + \mathcal{K}(|\xi|) sh |\xi| (z - z_1) e^{-|\xi|(\ell-z_1)} + M(|\xi|) ch |\xi| (\ell - z) e^{-|\xi|z_1} \operatorname{sign}(z - z_1) \\ - M(|\xi|) \mathcal{K}(|\xi|) e^{-|\xi|(z - z_1 + \ell - z_1)} \operatorname{sign}(z - z_1) + \\ + M(|\xi|) \mathcal{K}(|\xi|) e^{-|\xi|(z - z_1 + \ell - z_1)} - \mathcal{K}(|\xi|) sh |\xi| (\ell - z_1) e^{-|\xi|z_1}] + \\ + \bar{t}_0 [sh |\xi| z - \mathcal{K}(|\xi|) sh |\xi| (z - z_1) e^{-|\xi|z_1} - \\ - \mathcal{K}(|\xi|) sh |\xi| z_1 e^{-|\xi|z_1} + \\ + 2M(|\xi|) \mathcal{K}(|\xi|) S(z - z_1) e^{-|\xi|(z_1 + z - z_1)}] -$$

$$-M(|\xi|)ch|\xi|(z-z_1)e^{-|\xi|z_1} - M(|\xi|)ch|\xi|z_1e^{-|\xi||z-z_1|}sign(z-z_1)\} \quad (17)$$

Перейшовши в /17/ від трансформант до оригіналів, одержуємо розв'язок, який відповідає довільній зміні по координаті x температур граничних поверхонь неоднорідного шару.

У випадку, коли на поверхнях $z=0$, $z=l$ шару температури змінюються, наприклад, за законом

$$t_0 = \theta_0 \cos \omega x, \quad t_l = \theta_l \cos \omega x \quad (18)$$

розв'язок поставленої задачі має вигляд

$$\begin{aligned} t = [\Delta_0(\omega)]^{-1} \cos \omega x \{ & \theta_0 [sh \omega(l-z) - M(\omega)ch \omega(z-z_1)e^{-\omega(l-z_1)} + \\ & + K(\omega)sh \omega(z-z_1)e^{-\omega(l-z_1)} + M(\omega)ch \omega(l-z)e^{-\omega|z-z_1|}sign(z-z_1) - \\ & - M(\omega)K(\omega)e^{-\omega(|z-z_1|+l-z_1)}sign(z-z_1) + M(\omega)K(\omega)e^{-(|z-z_1|+l-z_1)} - \\ & - K(\omega)sh \omega(l-z_1)e^{-\omega|z-z_1|}] + \theta_l [sh \omega z - K(\omega)sh \omega(z-z_1)e^{-\omega z_1} - \\ & - K(\omega)sh \omega z_1e^{-\omega|z-z_1|} + 2M(\omega)K(\omega)S(z-z_1)e^{-\omega(z_1+|z-z_1|)} - \\ & - M(\omega)ch \omega(z-z_1)e^{-\omega z_1} - M(\omega)ch \omega z_1e^{-\omega|z-z_1|}sign(z-z_1)] \}, \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$M(\omega) = \frac{Z(\omega)}{1-Z(\omega)}; \quad K(\omega) = \frac{Z(\omega)}{1+Z(\omega)};$$

$$\Delta_0(\omega) = sh \omega l - \frac{2Z(\omega)}{1-[Z(\omega)]^2} ch \omega(l-2z_1).$$

При $z = z_1$ маємо

$$t|_{z_1} = \frac{\cos \omega x}{2\Delta_0(\omega)} \left\{ \theta_0 \left[\frac{e^{\omega(l-z_1)}}{1+\mathcal{I}(\omega)} - \frac{e^{-\omega(l-z_1)}}{1-\mathcal{I}(\omega)} \right] + \right. \\ \left. + \theta_l \left[\frac{e^{\omega z_1}}{1+\mathcal{I}(\omega)} - \frac{e^{-\omega z_1}}{1-\mathcal{I}(\omega)} \right] \right\}.$$

/20/

Зауважимо, що аналогічним способом можна визначити температурне поле в шарі з N тонкими включеннями.

Список літератури: І. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1968. 2. Підстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. - Киев: Наукова думка, 1976.

Стаття надійшла в редколегію 28.02.83

УДК 517.51 /517.88

Л.Є.Базилевич

ДОТІЧНІ КУЛІ Й АСИМПТОТИЧНА КРИВИНА

Нехай R^n - арифметичний евклідовий простір. Позначимо через $d(x, y)$ відстань між точками $x, y \in R^n$, через $K(x, r)$ - відкриту кулю радіуса r з центром у точці $x \in R^n$.

Дамо означення кривини довільної множини /слід відзначити, що ідея такого означення кривини належить І.Н.Песіну/.

Означення 1. Множина $M \subset R^3$ має в точці p кривину, коли точка p - неізолювана точка множини M , і існує коло S таке, що $d(p', S) = o(d^2(p, p'))$ при $p' \rightarrow p, p' \in M$.

Означення 2. Множина $M \subset R^3$ має в точці p поверхневу кривину, коли p - неізолювана точка множини M , і існує по-

верхня $Q \in \mathcal{Q} / \mathcal{Q}$ - множина поверхонь другого порядку /така, що

$$d(p', Q) = o(d^2(p', p)) \quad \text{при } p' \rightarrow p, p' \in M.$$

Якщо M - два рази диференційовна крива або поверхня, то означення 1 і 2 збігаються з прийнятими.

Означення 3. Множина M має у точці p асимптотичну /поверхневу/ кривину, коли існує така вимірна підмножина $N \subset M$ що N має в точці p /поверхневу/ кривину і ортогональна проєкція множини N на дотичну /площину/ до M у точці p має точку p точкою зовнішньої густини.

Означення 4. Множина $M \subset \mathbb{R}^3$ має в точці $p \in M$ властивість A , якщо існує відкрита куля K така, що $p \in \partial K$ $K \cap M = \emptyset$.

Означення 5. Множина $M \subset \mathbb{R}^3$ має в точці $p \in M$ властивість B , коли існують дві відкриті кулі K_1 і K_2 , $K_1 \not\subset K_2$, $K_2 \not\subset K_1$ такі, що $p \in \partial K_1 \cap \partial K_2$, $K_1 \cap K_2 \cap M = \emptyset$.

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що кулі K_1 і K_2 однакового радіусу.

Лема I. Нехай множина $M \subset \mathbb{R}^3$ у кожній своїй точці має властивість A , причому радіус z кулі K з означення 4 сталий для всіх точок $p \in M$, а напрям прямої, яка проходить через точку p і центр кулі K , утворює з напрямом осі OZ кут, не більший, ніж $\pi/8$, і $\text{diam } M \leq \frac{z}{3}$. Тоді множина M розташована на поверхні Q , що має поверхневу кривину у всіх своїх точках, крім, можливо, множини точок двовірної хаусдорфової міри нуль.

Доведення. Нехай $A := \bigcup \{K_p \cap K(p, z) \mid p \in M\}$, $P(A)$ - проєкція множини A на площину xOy , а Q - графік функції $f(x, y) = \{\min z \mid (x, y, z) \in A, (x, y) \in P(A)\}$. Поверхня Q має в кожній своїй точці властивість A , причому радіус куль K з означення 4 для всіх точок $p \in Q$ дорів-

на τ , а кут між напрямком прямої, що проходить через точку P і центр кулі K , та осі OZ не перевищує числа $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Неважко перевірити, що функція f задовольняє умову Ліпшиця і є два рази диференційовною майже всюди на $P(A)$. Тому Q має поверхневу кривину в усіх своїх точках, крім, можливо, точок множини двомірної хаусдорфівної міри нуль.

Теорема I. Нехай множина $M \subset \mathbb{R}^3$ має властивість A в усіх своїх точках, крім, можливо, точок множини двомірної хаусдорфівної міри нуль. Тоді M має асимптотичну кривину в усіх своїх точках, крім, можливо, точок множини двомірної хаусдорфівної міри нуль.

Доведення. Зобразимо множину M у вигляді $M \setminus L = \cup M_i$, де множини $\varphi_i(M_i) / \varphi_i$ - деяка ізометрія простору $\mathbb{R}^3$ задовольняють умови леми I, а L - множина двомірної хаусдорфівної міри нуль. За лемою I, кожна множина $\varphi_i(\bar{M}_i)$ розташована на поверхні Q_i , що є графіком функції $f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, яка має поверхневу кривину в усіх своїх точках, крім, можливо, точок множини L_i двомірної хаусдорфівної міри нуль. Позначимо через N_i множину точок густини множини $P(\bar{M}_i)$. Множина $P(\bar{M}_i) \setminus N_i$ має плоску лебегову міру нуль, а $\bar{M}_i \setminus \varphi_i^{-1}(f_i(N_i))$ - двомірну хаусдорфівну міру нуль /функція f_i задовольняє умову Ліпшиця/. Тому множина M має асимптотичну кривину в усіх своїх точках, крім точок множини $LU(\cup(M_i \setminus \varphi_i^{-1}(f_i(N_i))))$ двомірної хаусдорфівної міри нуль. Теорема доведена.

Нехай у точці P множина M має властивість B , і K_1, K_2 кулі з означення 5 радіусу R . Нехай R' - радіус кулі, для якої коло $\partial K_1 \cap \partial K_2$ - екватор. Через γ_P позначимо мінімум двох чисел: R' і $\sqrt{R^2 - (R')^2}$, а через ϵ_P -

пряму, що проходить через точку ρ і середину відрізка, який сполучає центри куль K_1 і K_2 .

Лема 2. Нехай замкнена множина M має в усіх своїх точках властивість B , причому для всіх $\rho \in M$ числа $\tau_\rho = \tau - \text{const}$, кут між напрямом прямої ℓ_ρ і осі Oz не більший, ніж $\pi/8$, $\text{diam } M \leq \tau/3$. Тоді M розташована на кривій, що має кривину всюди, крім, можливо, точок множини довжини нуль.

Доведення. Нехай $A := \{(K_1 \cup K_2) \cap K(\rho, \frac{\tau}{3}) \mid \rho \in M\}$, де $(K_1 \cup K_2)_\rho$ - об'єднання куль K_1 і K_2 , що відповідають точці ρ ; $P(A)$ - проекція множини A на площину xOy а Q графік функції $f(x, y) = \{\min z \mid (x, y, z) \in A, (x, y) \in P(A)\}$. Площина Π_ρ , що проходить через точку ρ і центри куль K_1 і K_2 ділить всі точки множини M (крім точки ρ) на дві множини: N_1 і N_2 . Прийmemo

$$(\forall x \in M)((x < \rho \iff x \in N_1) \wedge (x > \rho \iff x \in N_2)).$$

Нехай $\rho' < \rho \in N_1$, N_2' - відповідні множини, утворені площиною $\Pi_{\rho'}$. З огляду на умови леми, перепозначаючи, коли потрібно, отримуємо, що $N_1' \subset N_1$ і $N_2' \supset N_2$. Прийmemo

$$(\forall x \in M)((x < \rho' \iff x \in N_1') \wedge (x > \rho' \iff x \in N_2')).$$

Аналогічно робимо для точок $\rho' > \rho$. Відношення $<$ лінійно впорядковує множину M , і топологія порядку $<$ збігається з топологією, індукованою вкладенням $M \subset \mathbb{R}^3$. Для всякої

точки $\rho \in M$ прийmemo $x_\rho := \inf \{x \in M \mid x > \rho\}$. Якщо

$x \neq x_\rho$, то точки ρ і x_ρ з'єднуємо в просторі

$\mathbb{R}^3 \setminus (K_1 \cup K_2 \cup K_1' \cup K_2')$, де K_1, K_2 - кулі з означення 5 для точки ρ , а K_1', K_2' - для точки ρ' , найкоротшою

два рази диференційовною кривою γ_ρ . Незавжди бачити, що крива $\Gamma = MU(\cup \{\gamma_\rho \mid \rho \in M\})$ шукана. Лема доведена.

Теорема 2. Нехай множина $M \subset \mathbb{R}^3$ має властивість B в усіх своїх точках, крім, можливо, точок множини довжини нуль. Тоді M має асимптотичну кривину в усіх точках, крім, можливо, точок множини довжини нуль.

Доведення теореми 2 повторює доведення теореми I з заміною леми I на лему 2.

Зауважимо, що існує ніде не диференційовна крива /поверхня/, яка має у кожній точці властивість B /властивість A /.

Стаття надійшла в редколегію 28.02.83

УДК 517.946

В.М.Кирилич

ЗАДАЧА З НЕРОЗДІЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ НА ПРЯМІЙ

Постановка задачі. Нехай G - криволінійний сектор, обмежений кривими ℓ_1 і ℓ_2 , які задаються рівняннями $x=a(t)$ і $x=b(t)$ ($a(0)=b(0)=0$, $a(t)<b(t) \forall t>0$).

В G розглядається гіперболічна система рівнянь

$$(D_t + \lambda_i D_x) u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t) u_j + f_i(x,t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Всі задані функції з класу $C(\bar{G})$. Припускаємо, що розв'язок $\xi = \varphi_i(\tau, x, t)$ задачі Коші $d\xi/d\tau = \lambda_i(\xi, \tau)$, $\xi(t) = x$, $i = \overline{1, n}$ один для будь-якої точки $(x, t) \in G$ і може бути єдиним способом продовжений для всіх $\tau < t$, так, щоб точка $(\varphi_i(\tau, x, t), \tau)$ досягала границі області G . Відповідну інтегральну криву позначимо через $Q_i(x, t)$.

Припускаємо, що різниця $\lambda_i(x(t), t) - x'(t)$ не має при $t \geq 0$ нулів, і позначимо через K^{+} сукупність індексів i , ($i = \overline{1, p+q}$, $0 < p, q < n$), для яких ця різниця додатна при $x=a(t)$, а

через K^- сукупність індексів $i, (i = \overline{p+1, n})$, для яких вона від'ємна при $x = \theta(t)$. Приймемо $K^\pm = K^+ \cap K^-$.

В області G потрібно знайти узагальнений розв'язок системи /1/, який на кривих ℓ_1 і ℓ_2 задовольняє задані граничні умови

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_{ij}(t) u_j(a(t), t) + \beta_{ij}(t) u_j(b(t), t)) = h_i(t), \quad /2/$$

$$i = \overline{1, n+q},$$

де $\alpha_{ij}(t); \beta_{ij}(t); h_i(t) \in C(\mathbb{R}_+)$.

Відзначимо, що коли $q=0$, або $p=n$, то задача /1/, /2/ перетворюється в задачу Коші для системи /1/ з початковими умовами на кривій ℓ_1 чи ℓ_2 . Задані без початкових умов для гіперболічних систем типу /1/ вивчені у працях [2], [3].

Нехай

$$\alpha_1(t) = \|\alpha_{ij}(t)\|, j \in K^+,$$

$$\beta_1(t) = \|\beta_{ij}(t)\|, j \in K^-,$$

$$\beta_2(t) = \|-\beta_{ij}(t)\|, j \in K^+ \setminus K^\pm, \quad (i = \overline{1, n+q})$$

$$\alpha_2(t) = \|-\alpha_{ij}(t)\|, j \in K^- \setminus K^\pm,$$

$$A(t) = \|\alpha_1(t) \beta_1(t)\|,$$

$$B(t) = \|\beta_2(t) \alpha_2(t)\|.$$

Припускаємо, що

$$\det A(t) \neq 0 \quad \forall t \geq 0, \quad /3/$$

$$|A(0)^{-1} B(0)| < 1, \quad /4/$$

$$\sum_{j=1}^{n+q} \beta_{ij}(0) h_j(0) = 0, i \in K^\pm, \quad /5/$$

де за норму матриці вибирають одну зі звичайних її норм, а $\beta_{ij}(0)$ - елементи матриці $[I - A(0)^{-1}B(0)]^{-1}A(0)^{-1}$.

Згідно з неперервністю завжди знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що $|A(t)^{-1}B(t)| < 1 \forall t \in [0, \varepsilon]$.

Існування і єдиність узагальненого розв'язку. Введемо допоміжні функції

$$v_i^a(t) = u_i(a(t), t), i \in K^+, v_i^b(t) = u_i(b(t), t), i \in K^-.$$

Праву частину системи /I/ позначимо через $F_i(x, t)$. Згідно з розподілом знаків різниці $\lambda_i(x(t), t) - x^i(t)$ характеристики, що виходять з точки $(0, 0)$, розподіляють G на компоненти $G_i, i \in K^\pm$, пронумеровані справа наліво.

Інтегруючи i -те рівняння системи /I/ вздовж характеристики $Q_i(x, t), i = \overline{1, n}$, одержимо [1]:

$$u_i(x, t) = \omega_i(x, t) + \int_{t_i(x, t)}^{t_i(x, t)} F_i(\varphi_i(\tau, x, t), \tau) d\tau, i = \overline{1, n}, \quad /6/$$

де

$$\omega_i(x, t) = \begin{cases} v_i^a(t_i(x, t)), i \in K^+, \\ v_i^b(t_i(x, t)), i \in K^-; \end{cases}$$

$t_i(x, t)$ - ордината точки перетину характеристики $\xi = \varphi_i(\tau, x, t)$ з кривою e_1 при $i \in K^+$, або з кривою e_2 при $i \in K^-$.

Очевидно, що питання про існування і єдиність розв'язку задачі /1/, /2/ зводиться до однозначного знаходження функцій $\omega_i(x, t)$. Підставляючи /6/ у /2/, одержуємо систему для визначення функцій $v_i^a(t), v_i^b(t)$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p+q} \alpha_{ij}(t) v_j^a(t) + \sum_{j=p+1}^n \beta_{ij}(t) v_j^b(t) = \\ = - \sum_{j=1}^p \beta_{ij}(t) v_j^a(t_j(b(t), t)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=p+q+1}^n \alpha_{ij}(t) v_j^b(t_j(a(t), t)) - \\
& - \sum_{j=1}^p \beta_{ij}(t) \int_{t_j(b(t), t)}^t F_j(\varphi_j(\tau, b(t), t), \tau) d\tau - \\
& - \sum_{j=p+q+1}^n \alpha_{ij}(t) \int_{t_j(a(t), t)}^t F_j(\varphi_j(\tau, a(t), t), \tau) d\tau + h_i(t), \\
& \quad i = \overline{1, n+q}. \tag{7}
\end{aligned}$$

Враховуючи умову /3/, систему /7/ можна записати у такому вигляді:

$$v(t) = p(t)v + H(t, u), \tag{8}$$

де

$$v(t) = \text{col} (v_1^a(t), \dots, v_{p+q}^a(t), v_{p+1}^b(t), \dots, v_n^b(t)),$$

$p(t)$ – оператор, норма якого при $t=0$ збігається з нормою матриці $A(0)^{-1}B(0)$; $H(t, u)$ – лінійний оператор типу Вольтерра, який легко визначити з системи /7/. За умовою /4/

$$v(t) = [I - p(t)]^{-1} H(t, u).$$

Підставляючи знайдені $v_i^a(t)$, $v_i^b(t)$ в /6/, одержимо систему інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду відносно шуканих функцій u_i , яка розв'язується методом ітерацій. Розв'язок такої системи назвемо узагальненим неперервним розв'язком задачі /1/, /2/. Оскільки при переході через характеристики $Q_i(0,0), i \in K^{\pm}$ характер рівнянь системи /1/ змінюється, то для забезпечення неперервності розв'язку на характеристиках $\xi = \varphi_i(\tau, 0,0), i \in K^{\pm}$ потрібно знаходити умови узгодження. Легко перевірити, що /5/ забезпечують дану вимогу. Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема. Нехай: 1/ функції $\lambda_i(x,t)$, $a_{ij}(x,t)$, $f_i(x,t) \in C(\bar{G})$; 2/ $\alpha_{ij}(t)$, $\beta_{ij}(t)$, $h_i(t) \in C(\mathbb{R}_+)$; 3/ $a(t)$, $b(t) \in C(\mathbb{R}_+)$; 4/ виконуються умови /3/ - /5/.

Тоді задача /1/-/2/ має єдиний неперервний узагальнений розв'язок.

Зауваження. 1. Підписуючи гладкість відповідних функцій і вимагаючи умови узгодженості першого порядку в точці $(0, 0)$, можна довести існування і єдиність класичного розв'язку задачі /1/, /2/.

2. Глобальність розв'язку задачі /1/, /2/ випливає з того, що коли знайдено розв'язок при $t \leq \varepsilon$, то для $t \geq \varepsilon$ одержуємо змішану задачу з початковими умовами при $t = \varepsilon$. Така задача легко розв'язується викладеним тут методом.

Список літератури: 1. А б о л и н я В.Э., М и ш к и с А.Д. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. - Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, 20, кн. 3. 2. М е л ь - н и к З.О. Одна неклассическая граничная задача для гиперболической системы первого порядка с двумя независимыми переменными. - Дифференц. уравн., 1981, 17, № 6. 3. Holten R.P. Generalised Goursat Problem. - Pacif. J. Math., 1962, 12, № 1.

Стаття надійшла в редколегію 28.02.83

З М І С Т

Ш е р б и н а Ю.М., Г о л у б Б.М. Збіжність ітераційного методу з пам'яттю для мінімізації функцій.....	3
Ж у к М.В., Д з в о н и к А.Я. Застосування методу Канторовича для систем диференціальних рівнянь.....	8
Д у д з я н и й І.М., Ц и м б а л В.М. Асимптотика розв'язку змішаної задачі для деякого рівняння третього порядку.....	15
М а р т и н е н к о Марія Д., М а р т и н е н к о Михайло Д. Задача без початкових умов для рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами.....	19
К в і т І.Д. Зворотна формула для відбиття випадкового вектора.....	21
Г н а т и ш и н О.П. Поелементно резервування при неоднаковій надійності резерву.....	26
Г р и л і ц ь к и й Д.В. Система сингулярних інтегральних рівнянь для плоскої контактної задачі термомпружності при стаціонарному тепловиділенні на ділянці контакту.....	29
Г р и л і ц ь к и й Д.В., О к р е п к и й Б.С. Осесиметрична задача про тиск штамп на ізотропний шар, який лежить на жорсткій основі з вирізом.....	34
Ш а ц ь к и й І.П. Полога циліндрична оболонка з жорстким включенням вздовж напрямної.....	45
О щ и п к о Л.Й. Оптимальний розрахунок оболонок БВІ.....	49

Хлебніков Д.Г., Прокопішин І.А.,
Парашак О.М. Осесиметрична задача згину пластин-
ки гладким штампом з врахуванням відставання..... 54

Флейшман Н.П., Бобик Х.О. Розв'язу-
вання крайових задач теорії пластин методом інваріант-
ного занурення..... 57

Тисовський Л.О. Згин плити з круглою
шайбою і тонкими пружними прямолінійними включеннями.... 64

Опанасович В.К., Драган М.С. Анти-
плоска деформація тіла з системою тонких пружних вклю-
чень..... 71

Копитко М.Ф., Савула Я.Г. Власні ко-
ливання оболонки нульової гауссової кривини..... 77

Ковальчук Б.В. Двовимірна стаціонарна за-
дача теплопровідності для шару з тонким включенням..... 81

Базилевич Л.С. Дотичні кулі й асимптотична
кривина..... 86

Кирилич В.М. Задача з нероздільними гранич-
ними умовами для гіперболічної системи першого порядку
на прямій..... 90

УДК 519.6

Скорость итерационного метода с памятью для минимизации функции. Е р б и н а Д.Н., Г о л у б Б.М. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.22. Прикладные задачи математики и механики. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 3-7 /на укр. яз./.

Для решения задачи $f(x) \rightarrow \min, x \in E^n$ исследуется итерационный метод

$$x_{n+1} = x_n - [f''(\bar{x}_n)]^{-1} f'(x_n),$$

$$\bar{x}_n = \begin{cases} x_0, & \text{если } n=0, \\ x_n - \frac{1}{2} [f''(\bar{x}_{n-1})]^{-1} f'(x_n), & \text{если } n=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Порядок сходимости этого метода равен $1 + \sqrt{2} \approx 2,41$, в то же время увеличение количества операций на каждой итерации по сравнению с методом Ньютона незначительно. Доказана сходимость метода для сильно выпуклых функций $f \in C^3$. Библиогр.: 5 назв.

УДК 518:517.9

Применение метода Канторовича для систем дифференциальных уравнений. Ж у к М.В., Д з в о н и к А.Я. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып.22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 8-15 /на укр. яз/.

Метод Канторовича применен для решения систем дифференциальных уравнений. Доказана теорема существования и единственности решения исходной задачи и системы метода Канторовича. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.946

Асимптотика решения смешанной задачи для некоторого уравнения третьего порядка. Д у д з я н и й И.М., Ц и м б а л В.Н. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып.22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 15-19 /на укр. яз./.

Методом погранслоя получено асимптотическое разложение решения смешанной задачи для сингулярно возмущенного уравнения в частных производных третьего порядка. Малый параметр входит множителем при первой производной по времени и третьей производной по пространственной координате. Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.944:947

Задача без начальных условий для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. М а р т и н е н к о Мария Д., М а р т и н е н к о Михаил Д. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.22. Прикладные задачи математики и механики. - Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 19-21 /на укр. яз./.

Доказана теорема о разрешимости задачи без начальных условий для уравнения теплопроводности с переменными во времени коэффициентами. Библиогр.: 2 назв.

УДК 519.21

Формула обращения для отражения случайного вектора. К в и т И.Д. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 21-26 /на укр. яз./.

На основании определения интервального ограничителя в многомерном первом гипероктанте доказывается формула обращения для отражения положительного случайного вектора. Из нее же получаются многомерная теорема единственности и формула для многомерной плотности вероятности. Библиогр.: 4 назв.

УДК 621.3

Поэлементное резервирование при неодинаковой надежности резерва. Г н а т и ш и н А.П. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 26-28 /на укр. яз./.

Рассматривается задача определения числа резервных элементов для обеспечения наперед заданной надежности некоторой сложной системы. Библиогр.: 2 назв.

УДК 539.3

Система сингулярных интегральных уравнений для плоской контактной задачи термоупругости при стационарном тепловыделении на площадке контакта. Г р и л и ц к и й Д.В. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып.22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 29-34 /на укр. яз/.

Дана математическая постановка плоской контактной задачи термоупругости о сжатии двух упругих изотропных тел при стационарном тепловыделении на площадке контакта и выведена для нее система сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Ил. 1. Библиогр.: 2 назв.

УДК 539.3

Осесимметричная задача о давлении штампа на изотропный слой, лежащий на жестком основании. Г р и л и ц к и й Д.В., О к р е п к и й Б.С. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 34-45 /на укр. яз./.

Решается задача о давлении жесткого штампа на слой при смешанных условиях на его нижней границе. Приведены графики распределения контактных давления и перемещений слоя над вырезом в зависимости от его толщины. Ил. 5. Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.3

Пологая цилиндрическая оболочка с жестким включением вдоль направляющей. Шацкий И.П. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 45–49 /на укр. яз./.

Задача о концентрации напряжений в окрестности жесткого линейного включения, локализованного вдоль отрезка направляющей пологой цилиндрической оболочки, при симметричном нагружении сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений относительно скачков сдвигающего и перерезывающего усилий. На основе численного решения интегральных уравнений методом механических квадратур произведен анализ зависимостей коэффициентов интенсивности усилий и моментов от параметра кривизны оболочки. Числовые результаты приведены в виде графиков. Ил. 4. Библиогр.: 2 назв.

УДК 539.3

Оптимальный расчет оболочек ЭВЛ. Ощипко Л.И. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 22. Прикладные задачи математики и механики. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 49–53 /на укр. яз./.

Решается задача оптимального проектирования конструкции, состоящей из двух сферических и двух цилиндрических оболочек. Сферическая и цилиндрическая оболочки сопряжены через ребро жесткости. Минимизируется объем конструкции при ограничениях на максимальные эквивалентные напряжения и некоторые геометрические параметры. Задача сводится к задаче геометрического программирования. Ил. 1. Библиогр.: 4 назв.

Осесимметричная задача изгиба пластинки гладким штампом с учетом отставания. Х л е б н и к о в Д.Г., П р о к о п и н и й И.А., П а р а щ а к А.М. – Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 54-57 /на укр. яз./.

Решена осесимметричная задача изгиба свободно опертой пластинки кольцевым гладким штампом с неизвестной зоной контакта. В качестве исходных соотношений используются приближенные уравнения на контактное давление и функции напряжений, полученные операторным методом и учитывающие деформации сдвига и поперечное обжатие пластины. Граница области контакта определяется методом последовательных приближений на основе решения задачи с заданной зоной контакта.

Полученное решение используется для исследования отставания центральной части круглой пластинки при изгибе ее сплошным штампом. Ил. 2. Библиогр.: 4 назв.

Решение краевых задач теории пластин методом инвариантного погружения. Ф л е й ш м а н Н.П., Б о б и к Х.Е. – Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып.22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те; 1984, с. 57-64 /на укр. яз./.

Рассматривается краевая задача для системы двух дифференциальных уравнений общего вида с частными производными второго порядка, которая моделирует задачи теории изотропных и анизотропных пластин. После дискретизации задача сведена к одному матрично-векторному разностному уравнению второго порядка, которое решается методом инвариантного погружения. Библиогр.: 2 назв.

УДК 539.3

Изгиб плиты с круглой каймой и тонкими упругими прямолинейными включениями. Т и с о в с к и й Л.О. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 64-70 /на укр. яз./.

Исследуется задача о напряженно-деформированном состоянии кусочно-однородной плиты, ослабленной системой произвольно расположенных тонких упругих включений. Приведены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестностях концов включений. Дан численный анализ задачи для случая одного произвольно расположенного тонкого включения. Ил. 2. Список лит.: 3 назв.

УДК 539.311

Антиплоская деформация тела с системой тонких упругих включений. О п а н а с о в и ч В.К., Д р а г а н М.С. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 71-77 /на укр. яз./.

Рассмотрена антиплоская деформация тела, содержащего инородные тонкие прямолинейные упругие включения. При помощи методов теории функций комплексного переменного задача сведена к системе интегродифференциальных уравнений, которая решалась методом механических квадратур. Приведен численный анализ коэффициентов интенсивности напряжений для случая взаимодействия двух упругих включений в теле, находящегося под воздействием однородных сдвиговых напряжений на бесконечности. Ил. 2. Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.3

Собственные колебания оболочек нулевой гауссовой кривизны. К о п и т к о М.Ф., С а в у л а Я.Г. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 77-80 /на укр. яз./.

Полуаналитическим методом конечных элементов исследуются собственные колебания оболочек нулевой гауссовой кривизны. Частичная проблема собственных значений для матриц больших размерностей решается блочно-степенным методом. Алгоритм реализован в виде комплекса программ. Приведены численные результаты. Библиогр.: 7 назв.

УДК 517.95.32

Двумерная стационарная задача теплопроводности для слоя с тонким включением. К о в а л ь ч у к Б.В. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып.22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 81-86 /на укр. яз./.

С помощью интегрального преобразования Фурье получено решение двумерной стационарной задачи теплопроводности для слоя с тонким включением. При этом коэффициент теплопроводности слоя как единого целого представляется с помощью дельта-функции Дирака. Задача сводится к решению дифференциального уравнения, содержащего коэффициентами дельта-функцию Дирака и ее производную. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.51/517.88

Касательные шары и асимптотическая кривизна. Б а з и л е - в и ч Л.Е. - Вестн. Львов. ун-та, сер. мех.-мат., вып. 22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 83-90 /на укр. яз./.

Дается определение /асимптотической/ кривизны для произвольных подмножеств евклидова пространства R^3 , устанавливается связь этих понятий с свойством существования у множества касательных шаров. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.946

Задача с нераздельными граничными условиями для гиперболической системы первого порядка на прямой. К и р и л и ч В.М. - Вестн. Львов. ун-та, сер.мех.-мат., вып.22. Прикладные задачи математики и механики. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984, с. 90-94 /на укр. яз./.

Установлена корректная разрешимость одной неклассической граничной задачи в криволинейном секторе, в который попадают характеристики системы, выходящие из его вершины. Библиогр.: 3 назв.

Вестник Львовского университета

Серия механико-математическая

Выпуск 22

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Львов

Издательство при Львовском государственном университете

издательского объединения "Вища школа"

/290000, Львов, ул. Университетская, I/

/На украинском языке/

Редактор В.В.В о й т о в и ч

Технічний редактор С.В.К о п о т ю к

Коректор В.П.К о р о л е н к о

Н/К

Підп. до друку 17.11.83. БГ І2372. Формат 60x84/16.

Папір друк. № 3. Офс. друк. Ум. друк. арк. 6,04.

Обл.-вид. арк. 3,9. Тираж 600 прим. Вид. № ІІ77.

Зам. № 4126 . Ціна 55 к. Замовне.

Видавництво при Львівському державному університеті
видавничого об'єднання "Вища школа", 290000, Львів,
вул. Університетська, І.

Львівська обласна книжкова друкарня, 290000, Львів,
вул. Стефаника, ІІ.

55 коп.



Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1984, вип. 22. 1—104.