УДК 518:517

М.Я.Бартіш

ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ"ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ З НАДЛІНІЙНОЮ ШВИДКІСТЮ ЗБІЖНОСТІ

Нехай дана система нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$P(x)=0, \qquad /1/$$

де $x \in E^N$, $P(x) \in E^N$. Одним з ефективних методів розв"язування рівнянь /1/ є метод Ньютона-Канторовича [4], порядок збіжності якого дорівнює двом. Поряд з цим можна використовувати й інші методи Ньютона-Канторовича, наприклад метод з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$ [1]. У випадку, коли $P(x)$ задано не аналітично, а відомо лише алгоритм визначення $P(x)$ при заданому значенні x, доцільно використовувати різницевий аналог методу Ньютона-Канторовича /в частинному випадку метод Стефенсена, $N+1$ точковий метод хорд/, різницевий аналог методу з порядком збіжності $1+\sqrt{2}$ [2], різницеві методи, одержані за допомогою рекурсій [3] та ін. Ці методи мають різний порядок збіжності. При їх використанні необхідно виконувати різне число елементарних алгебраїчних операцій для виконання однієї ітерації, що робить методи нееквівалентними за ефективністю в сенсі числа обчислень для розв"язування конкретної задачі.

Обчислювальний процес A ефективніший від процесу B, якщо виконується умова [I]

$$Q_A / Q_B < \log_{\rho_B} \rho_A , \qquad /2/$$

де Q_A, Q_B – число елементарних арифметичних операцій на одній ітерації; $\rho_A > 1$, $\rho_B > 1$ – порядок відповідних методів.

Треба відзначити, що величини Q_A і Q_B суттєво залежать від конкретного вигляду функції $P(x)$. Якщо для обчислення $P(x)$ потрібно виконати достатньо велике число елементарних операцій /наприклад, розв"язати задачу Коші/, достатньо ефективним є N + I точковий метод хорд, коли послідовність $\{x_n\}$ шукають за формулою

$$x_{n+1} = x_n - A_n^{-1} P(x_n), \quad n = 0,1,2,\dots, \qquad /3/$$

де A_n /для $n \geq N$ / визначається зі співвідношення

$$A_n H_n = E_n ; \qquad /4/$$

$$H_n = (x_n - x_{n-1} \dots x_{n-N+1} - x_{n-N});$$

$$E_n = (P(x_n) - P(x_{n-1}) \dots P(x_{n-N+1}) - P(x_{n-N})).$$

Розглянемо модифікацію N + I точкового методу хорд, який побудований на основі різницевого методу з праці [3]. Послідовність $\{x_n\}$ знаходимо за формулами

$$x_{n+1/2} = x_n - [A_{n-1/2}]^{-1} P(x_n),$$
$$x_{n+1} = x_n - [A_{n+1/2}]^{-1} P(x_n), \qquad /5/$$
$$n = 0,1,2,\dots,$$

де $A_{n+1/2}$ дістаємо для $n \geq \frac{N-1}{2}$ зі співвідношення

$$A_{n+1/2} H_n = E_n ; \qquad /6/$$

$$H_n = (x_{n+1/2} - x_n \dots x_{n-\frac{N-2}{2}} - x_{n-\frac{N-1}{2}});$$

$$E_n = (P(x_{n+1/2}) - P(x_n) \dots P(x_{n-\frac{N-2}{2}}) - P(x_{n-\frac{N-1}{2}})).$$

Для послідовності $\{x_n\}$, визначеної з /5/, має місце така теорема.

<u>Теорема</u>. Нехай в області $\Omega(x) = \{x \in E^N / \|x - x^*\| \leq R\}$.

а/ $P(x)$ двічі неперервно диференційована вектор-функція і друга похідна задовольняє умову Ліпшіца

$$\|P''(x') - P''(x'')\| \leq K\|x' - x''\|;\ x', x'' \in \Omega_1,\ K < \infty;$$

б/ існує $[P'(x)]^{-1}$ і має місце оцінка $\|[P'(x)]^{-1}\| \leq B < \infty$;

в/ початкове наближення x_0 вибрано достатньо близько до x^*.

Тоді $\{x_n\}$ збігається до розв"язку x^* рівняння /1/ і збіжність надлінійна

$$\|x_n - x^*\| \leq C\,\|x_{n-1} - x^*\|^{\tau},\quad C < \infty,$$

де τ - додатний корінь рівняння

$$\tau^2 = 2\tau + 1 \qquad \text{для } N = 1,$$

$$\tau^{N+1} = \tau^N + \tau^{\frac{N}{2}} + 1 \qquad \text{для } N \text{ - парного}, \qquad /7/$$

$$\tau^{\frac{N+1}{2}} = \tau^{\frac{N-1}{2}} + 1 \qquad \text{для } N \text{ - непарного}.$$

Для доведення теореми необхідно визначити оцінку величини $\|P(x_n)\|$, а саме:

$$\|P(x_n)\| = \|P(x_n) - P(x_{n-1}) - A_{n-1/2}(x_n - x_{n-1})\| =$$

$$= \|\tfrac{1}{2}P''(x_n)(x_n - x_{n-1})^2 + \{\tfrac{1}{2}[P''(x_{n-1})(x_{n-1/2} - x_{n-1})^2 +$$

$$+ P''(x_{n-\frac{N+1}{2}})(x_{n-\frac{N}{2}} - x_{n-\frac{N+1}{2}})^2] - [P''(x_{n-3/2})(x_{n-1} - x_{n-3/2})^2 +$$

$$+ P''(x_{n-\frac{N+1}{2}})(x_{n-1} - x_{n-\frac{N+1}{2}})(x_{n-\frac{N}{2}} - x_{n-\frac{N+1}{2}})]\}E_n^{-1}\| + O(\|x_{n-\frac{N}{2}} - x_{n-\frac{N+1}{2}}\|^2) \leq \varphi_n, \qquad /8/$$

де

$$\varphi_n = \begin{cases} K_1 \|x_n - x_{n-1}\|^2 \|x_{n-1} - x_{n-2}\| & N=1, \\ K_2 \|x_n - x_{n-1}\| \|x_{n-\frac{N}{2}} - x_{n-\frac{N+2}{2}}\| \|x_{n-N} - x_{n-N-1}\|, & N \text{ – парне}, \\ K_3 \|x_n - x_{n-1}\| \|x_{n-\frac{N-1}{2}} - x_{n-\frac{N+1}{2}}\| & N \text{ – непарне}, \end{cases} \qquad /9/$$

$K_i < \infty \quad i = 1, 2, 3.$

Під час реалізації запропонованого методу виникає ряд питань: як будувати матрицю $A_{-1/2+n}$ при $n \leq \left[\frac{N}{2}\right]$, як вибрати добре початкове наближення, як уникнути нестійкості системи /6/.

На практиці можна вибрати $A_{-1/2} = E$, а надалі за рекурентними формулами, що подібні до тих, які наявні в праці [5], визначати $A_{n-1/2}$ $(n>0)$. Однак, як показали розрахунки, проведені Л.Л.Роман, доцільно $A_{-1/2}$ вибирати як різницевий аналог матриці $P'(x_0)$, а для розв"язування системи /6/ використовувати метод регуляризації. Для визначення $[A_{n-1/2}]^{-1}$ можна також користуватися алгоритмом

$$[A_{n-\frac{1}{2}}]^{-1} \simeq H_n Q_{n-1} (2I - Q_{n-1} E_n), \qquad /10/$$

де

$$Q_0 \approx E_0^{-1}.$$

Відзначимо, що розглянутий алгоритм, як показують теоретичні дослідження та практика, конкурує за ефективністю в сенсі числа обчислень з $N+1$ точковим методом хорд.

Список літератури: 1. Б а р т і ш М.Я. Про один ітераційний метод розв"язування функціональних рівнянь. – Доп. АН УРСР. Сер. 1, 1968, № 5, с. 38-39. 2. Б а р т і ш М.Я., Щ е р б и н а Ю.М. Про один різницевий метод розв"язування нелінійних операторних рівнянь. – Доп. АН УРСР. Сер А, 1972, № 7, с.579-582.

3. Б а р т и ш М.Я., Щ е р б и н а Ю.Н. Итерационные формулы, полученные в помощью рекурсий. - Мат. сб., 1976, с.50-53. 4. К а н т о р о в и ч Л.В. О методе Ньютона. - Тр. матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1949, 28, № 104, с.104-144. 5. П ш е н и ч н ы й Б.Н., Д а н и л и н Ю.Н. Численные методы в экстремальных задачах. - М.: Наука, 1975. - 318 с.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.83

УДК 518:517.9

М.В.Жук, А.Я.Дзвоник

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Швидкість збіжності методу Канторовича для лінійних і нелінійних диференціальних й інтегральних рівнянь досліджувалась у праці [1, 2, 5].

Розглянемо швидкість збіжності методу Канторовича для систем лінійних диференціальних рівнянь.

Беремо систему рівнянь другого порядку

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(P)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + R(P)u = f(P) \qquad /1/$$

при умовах

$$u(P)\Big| = 0. \qquad /2/$$

Систему /1/ розглядаємо в області D простору координат $/x_1, \dots, x_m/$, обмеженої достатньо гладкою поверхнею Γ, яка включає дві гіперплощини: $x_1 = a, x_1 = b, a < b$; Γ_1 - поверхня Γ без вказаних гіперплощин; $P(x_1, \dots, x_m)$, $Q(x_2, \dots, x_m)$ - точки відповідно m і $/m-1/$-мірних просторів.

У системі /1/-/2/ $u(P), f(P)$ d - компонентні вектор-функції; A_{ij}, R - матриці d-го порядку, елементи яких є функціями від змінних $x_1, \dots, x_m$.