3. Б а р т и ш М.Я., Щ е р б и н а Ю.Н. Итерационные формулы, полученные в помощью рекурсий. - Мат. сб., 1976, с.50-53.
4. К а н т о р о в и ч Л.В. О методе Ньютона. - Тр. матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1949, 28, № 104, с.104-144. 5. П ш е н и ч н ы й Б.Н., Д а н и л и н Ю.Н. Численные методы в экстремальных задачах. - М.: Наука, 1975. - 318 с.

Стаття надійшла до редколегії 01.03.83

УДК 518:517.9

М.В.Жук, А.Я.Дзвоник

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Швидкість збіжності методу Канторовича для лінійних і нелінійних диференціальних й інтегральних рівнянь досліджувалась у праці [1, 2, 5].

Розглянемо швидкість збіжності методу Канторовича для систем лінійних диференціальних рівнянь.

Беремо систему рівнянь другого порядку

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(P)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + R(P)u = f(P) \qquad /1/$$

при умовах

$$u(P)\big|_{\Gamma} = 0. \qquad /2/$$

Систему /1/ розглядаємо в області D простору координат $/x_1, \dots, x_m/$, обмеженої достатньо гладкою поверхнею Γ, яка включає дві гіперплощини: $x_1 = a, x_1 = b, a < b$; Γ_1 - поверхня Γ без вказаних гіперплощин; $P(x_1, \dots, x_m)$, $Q(x_2, \dots, x_m)$ - точки відповідно m і $/ m-1 /$-мірних просторів.

У системі /1/-/2/ $u(P), f(P)$ d - компонентні вектор-функції; A_{ij}, R - матриці d -го порядку, елементи яких є функціями від змінних $x_1, \dots, x_m$.

Відносно заданих функцій припускаємо, що $f(P)$ належить дійсному гільбертовому простору l-компонентних вектор-функцій $H = L_2(D)$ із нормою

$$\|f\|^2 = \int_D f^2(P)\,dP = \int_D \sum_{k=1}^{l} f_k^2(P)\,dP.$$

Матриці A_{ij} і R задовольняють так:

а/ $A_{ij} = A_{ji}$, $(i,j = 1,2,\ldots,m)$;

б/ якими би не були l-компонентні вектори $t_1, t_2, \ldots, t_m$, має місце нерівність

$$\mu_0 \sum_{k=1}^{m} \|t_k\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}\; t_j \cdot t_i \leq \mu_1 \sum_{k=1}^{m} \|t_k\|^2, \qquad /3/$$

$\mu_0, \mu_1 - const > 0$ /тут крапка – скалярне множення; $\|\cdot\|$ – довжина вектора/;

в/ $$\beta_0 u^2 \leq Ru \cdot u \leq \beta_1 u^2. \qquad /4/$$

За область визначення $D(L)$ оператора L приймаємо множину l-компонентних вектор-функцій, двічі неперервно диференційовних в замкнутій області $\bar{D} = D + \Gamma$, які задовольняють крайові умови /2/.

Позначимо через $H_0 \subset H$ енергетичний простір допоміжного додатно визначеного оператора T

$$Tu \equiv -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad u|_\Gamma = 0$$

в $D(T) = D(L)$, тобто замикання $D(T)$ в метриці

$$[u,v]_0 = (Tu,v) = \int_D \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,dP.$$

$$|u_0|^2 = [u,u]_0$$

При цьому [3]

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma}|u|_0, \quad \gamma = const > 0. \qquad /5/$$

Для довільних функцій $u, v \in H_0$ формально введемо білінійну форму

$$L(u,v) = \int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(P)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + R(P)u\cdot v\Big]dP.$$

Тоді умови /3/, /4/, /5/ забезпечують для довільної вектор-функції $u(P)\in H_o$ виконання нерівності

$$\sigma |u|_o^2 \leq L(u,u) \leq \eta |u|_o^2, \qquad /6/$$

де σ, η – деякі додатні константи [8].

Задачу /1/–/2/ розв"язуємо методом Канторовича, згідно з яким наближений розв"язок шукаємо у вигляді

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{s} C_{kl}(x_1)\varphi_{kl}(P), \qquad /7/$$

де $u_n(P) = (u_{n1}(P), \ldots, u_{ns}(P))$; $\varphi_{kl}(P)$ – попередньо вибрані лінійно-незалежні в Γ_1 функції, для яких виконуються умови $\varphi_{kl}(P)|_{\Gamma_1} = 0$. Функції вибираємо таким чином, щоб їх вибрана система $\{\chi_p(x_1)\varphi_{kl}(P)\} \in H_o$ $(p, k = 1,2,\ldots; l = 1,2,\ldots,s)$ була повною системою лінійно незалежних функцій в просторі H_o, при цьому система функцій $\{\chi_p(x_1)\}$ задовольняє умови

$$\chi_p(x_1)|_{x_1=a} = \chi_p(x_1)|_{x_1=b} = 0, \; p = 1,2,\ldots \qquad /8/$$

Невідомі коефіцієнти $C_{kl}(x_1)$ визначаємо з системи

$$\int_{D_{x_1}} (Lu_n - f)\varphi_{kl}(P)dQ = 0, \qquad /9/$$

$$C_{kl}(x_1)|_{x_1=a} = C_{kl}(x_1)|_{x_1=b} = 0, \; k = 1,2,\ldots,n; \; l = 1,2,\ldots,s, \qquad /10/$$

де D_{x_1} – переріз області D гіперплощиною $x_1 = const$.

Система /9/ зводиться до лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно $C_{kl}(x_1)$.

Як відомо, для узагальненого розв"язку $u \in H_o$ задачі /1/–/2/ виконується тотожність

$$L(u,v) \equiv \int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + R u\cdot v\Big]dP = \int_D f\cdot v\,dP \qquad /11/$$

при довільній функції $v(P) \in H_o$. Аналогічно для узагальненого розв"язку системи /9/–/10/ $u_n(P) \in H_n \cap H_o$ справедлива тотожність

$$L(u_n, g_n) \equiv \int_D \Big[\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\frac{\partial g_n}{\partial x_i} + R u_n g_n\Big]dP = \int_D f g_n dP, \qquad /12/$$

де $g(P)$ – довільна функція з $H_n \cap H_o$, а $H_n \subset H$ –

2-3998

простір l -компонентних вектор-функцій вигляду

$$V_n(P)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{l} a_{kl}(x_1)\varphi_{kl}(P).$$

Відомо, що умова /6/ забезпечує існування та єдиність узагальненого розв"язку для задачі /I/-/2/ і системи /9/-/I0/ [3].

Встановимо збіжність та оцінку швидкості збіжності методу Канторовича. Нехай $u(P)$ узагальнений розв"язок задачі /I/-/2/. Розглянемо функціонал

$$\mathcal{I}(u-v_n,u-v_n)=\int_D\Big[\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}-\frac{\partial v_n}{\partial x_j}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\Big)+ \qquad /I3/$$
$$+R(u-v_n)(u-v_n)\Big]dP,$$

де $v_n(P)$ - довільний елемент простору $H_n\cap H_0$ і покажемо, що функціонал /I3/ набирає найменшого значення при $v_n=u_n$, тобто

$$\mathcal{I}(u-u_n,u-u_n)\leq\mathcal{I}(u-v_n,u-v_n), \qquad /I4/$$

де $u_n(P)$ - узагальнений розв"язок системи методу Канторовича /9/-/I0/.

Оскільки для системи /I/ при умовах /2/ знаходження узагальненого розв"язку системи методу Канторовича еквівалентно задачі відшукання мінімуму функціонала

$$\mathcal{J}(v)=\int_D\Big[\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\Big(\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big)\Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)+Rv\cdot v-2v\cdot f\Big]dP$$

на множині функцій із $H_n\cap H_0$, то при довільній функції $v_n\in H_n\cap H_0$ маємо

$$\mathcal{J}(u_n)\leq\mathcal{J}(v_n). \qquad /I5/$$

Перетворимо функціонал $\mathcal{J}(v_n)$, використовуючи співвідношення /II/ при $v=v_n$. Тоді одержуємо

$$\mathcal{J}(v_n)=\int_D\Big[\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\frac{\partial v_n}{\partial x_j}\frac{\partial v_n}{\partial x_i}+Rv_n\cdot v_n-2\Big[\sum_{i,j=1}^{m}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x_i}+$$
$$+Ru\cdot v_n\Big]dP=\mathcal{I}(u-v_n,u-v_n)-\mathcal{I}(u,u). \qquad /I6/$$

Враховуючи останню рівність і нерівність /І5/, знаходимо

$$\mathcal{I}(u-u_n,\, u-u_n)-\mathcal{I}(u,u)\leq \mathcal{I}(u-v_n,\, u-v_n)-\mathcal{I}(u,u).$$

Тобто нерівність /І4/ справедлива.

На основі нерівності /6/, враховуючи нерівність /І4/, дістаємо

$$|u-u_n|_0^2\leq \frac{1}{\sigma}\mathcal{I}(u-u_n,\, u-u_n)\leq\frac{1}{\sigma}\mathcal{I}(u-v_n,\, u-v_n)\leq\frac{\eta}{\sigma}|u-v_n|_0^2.$$

Отже,

$$|u-u_n|_0\leq C|u-v_n|_0, \qquad /І7/$$

де $C=\sqrt{\frac{\eta}{\sigma}}$. Елемент $v_n(P)\in H_n\cap H_0$ вибираємо так, щоб він реалізував мінімум функціонала $|u-v_n|_0$.

Причому враховуючи повноту в просторі H_0 системи функцій $\{\chi_p(x_1)\varphi_{kl}(P)\}$ ($p,k=1,2,\ldots;\ l=1,2,\ldots,4$) , для елемента $v_n(P)=\lim\limits_{t\to\infty} v_n^t(P)$, де елемент

$$v_n^t(P)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{4}\sum_{p=1}^{t} a_{kl}^p\chi_p(x_1)\varphi_{kl}(P),$$

реалізує мінімум функціонала $|u-v_n^t|_0$, маємо

$$|u-v_n|_0\to 0$$

при $n\to\infty$, а тому

$$|u-u_n|_0\to 0 \qquad /І8/$$

при $n\to\infty$. Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема. При умовах задачі, що забезпечують виконання нерівностей /6/, метод Канторовича збігається і швидкість збіжності характеризується оцінкою /І7/.

Розглянемо тепер способи вибору координатної системи функцій $\{\chi_p(x_1)\varphi_{kl}(P)\}$ $(p,k=1,2,\ldots;\ l=1,2,\ldots,4)$. Їх вибираємо у вигляді $\chi_p(x_1)\varphi_{kl}(P)=(0,\ldots,0,\chi_p(x_1)\varphi_k(P),0,\ldots,0)$, де $\chi_p(x_1)\varphi_k(P)$ займає l -те місце. Розглянемо випадок $m=2$. Тоді область D є областю координат x,y , а мека Γ складається з прямих $x=a,\ x=b$ і кривих $y=g(x)$, $y=h(x),\ g(x)<h(x)$. Повними у сенсі збіжності за енергією системами $\{\chi_p(x)\varphi_{kl}(x,y)\}, p, k=1,2,\ldots; l=1,\ldots,d$ будуть, наприклад, такі системи:

$$\left\{0,\ldots,0,\sin\frac{p\pi(x-a)}{b-a}\sin\frac{k\pi(y-g(x))}{h(x)-g(x)},0,\ldots,0\right\},$$

$$\left\{0,\ldots,0,x^{p-1}y^{k-1}(x-a)(b-x)(y-g(x))(h(x)-y),0,\ldots,0\right\},$$

де компонента, відмінна від нуля, займає l -те місце. При цьому система $\{\varphi_{kl}(x,y)$ вибирається відповідно в одному з виглядів

$$\bar{\varphi}_{kl}(x,y)=\left(0,\ldots,0,\sin\frac{k\pi(y-g(x))}{h(x)-g(x)},0,\ldots,0\right), \qquad /19/$$

$$\tilde{\varphi}_{kl}(x,y)=(0,\ldots,0\,y^{k-1}(y-g(x))(h(x)-y),0,\ldots,0),\ k=1,2,\ldots \qquad /20/$$

Тоді можна побудувати функції

$$\bar{v}_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{d}\bar{a}_{kl}(x)\bar{\varphi}_{kl}(x,y),$$

$$\tilde{v}_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{d}\tilde{a}_{kl}(x)\tilde{\varphi}_{kl}(x,y),$$

де $\bar{a}_{kl}(x), \tilde{a}_{kl}(x)$ – функції, що дорівнюють нулю при $x=a$, $x=b$ такі, що величини

$$\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\bar{v}_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial\bar{v}_n}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=|u-\bar{v}_n|_0^2,$$

$$\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{v}_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial\tilde{v}_n}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=|u-\tilde{v}_n|_0^2$$

мають порядок $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Тут $u(x,y)$ –узагальнений розв"язок задачі /1/–/2/, для якого існують інтегровні з квадратом в області D похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ [4].

Таким чином, вибираючи $\varphi_{kl}(x,y)$ у вигляді /19/ або /20/, згідно з оцінкою /17/ маємо

$$|u-u_n|_0=o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Для прикладу розглянемо систему

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 2(y-1)(1-e^y-y) - xe^y(x-1)(y+1) \\ -\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 2(y-1)(1-e^y-y) - 2x(x-1) + \pi^2 \sin\pi x \sin\pi y \\ -\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 2\pi^2 \sin\pi x \sin\pi y - 2x^2 + 2x \\ \qquad\qquad u\big|_\Gamma = 0, \end{cases}$$

де $u = (u_1(x,y), u_2(x,y), u_3(x,y))$, Γ – межа прямокутної області D : $[0,1;\ 0,1]$,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1&1&0 \\ 1&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix},\ A_{12} = A_{21} = \bar{0},\ A_{22} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&1 \\ 0&1&1 \end{pmatrix},\ R = \bar{0},\ f(x,y) = (2(y-1)(1-e^y-y) -$$

$$- xe^y(x-1)(y+1),\ 2(y-1)(1-e^y-y) - 2x(x-1) + \pi^2 \sin\pi x \sin\pi y,$$

$$2\pi^2 \sin\pi x \sin\pi y - 2x^2 + 2x).$$

Точним розв"язком цієї системи

$$u^* = \begin{pmatrix} x(x-1)(e^y-1)(y-1) \\ xy(x-1)(y-1) \\ \sin\pi x \sin\pi y \end{pmatrix}.$$

Перше наближення шукається у вигляді

$$u^1 = \begin{pmatrix} C_{11}(x) \sin\pi y \\ C_{12}(x) \sin\pi y \\ C_{13}(x) \sin\pi y \end{pmatrix},$$

друге – у вигляді

$$u^2 = \begin{pmatrix} C_{11}(x)\sin\pi y + C_{21}(x)\sin 2\pi y \\ C_{12}(x)\sin\pi y + C_{22}(x)\sin 2\pi y \\ C_{13}(x)\sin\pi y + C_{23}(x)\sin 2\pi y \end{pmatrix}.$$

Порівняємо значення u^* з наближеннями за Рітцом і Канторовичем:

	$x=0,2; y=0,6$	$x=0,5; y=0,5$	$x=0,8; y=0,7$
Точний розв"язок	0,0526I6	0,08I090	0,048660
$u^*(x,y)$	0,0384	0,0625	0,03360
	0,562632	I,0	0,894946
Перше наближення за	0,049087	0,078004	0,02986
Рітцом	0,0I564I	0,04I45	0,022I32
	0,522845	0,98594	0,868245
Перше наближення за	0,0520I4	0,08I080	0,048584
Канторовичем	0,038I9	0,062490	0,033494
	0,562I09	0,998940	0,8944I9
Друге наближення за	0,05I328	0,08089I	0,04I690
Рітцом	0,029945	0,058205	0,030609
	0,55997I	0,999895	0,89098I
Друге наближення за	0,052600	0,08I080	0,0486I0
Канторовичем	0,038398	0,062490	0,03358I
	0,5626I9	0,998940	0,894794

Список літератури: I. Ж у к М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных интегральных уравнений. – В кн.: Мат. сб. К.: Наукова думка, I976, с.2I0–2I4. 2. Ж у к М.В. Дослідження швидкості збіжності методу Канторовича для нелінійних диференціальних рівнянь. – Укр. мат. журн., 28, I976, № 2, с. I83–I93. 3. Ж у к М.В., Д з в о н и к А.Я. Застосування методу Канторовича для систем диференціальних рівнянь. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., I984, вип. 22, с. 8–I5. 4. К а н т о р о в и ч Л.В., К р ы л о в В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.; Л.: Физматгиз, I962. – 708 с. 5. Л у ч к а А.Ю., Ж у к М.В. Исследование быстроты сходимости метода Канторовича для линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. – В кн.: Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. К., I975, с. 84–99.

Стаття надійшла до редколегії 26.03.83