УДК 534.III

І.М.Дудзяний

РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ СТРУНИ, ЯКА РУХАЄТЬСЯ ВЗДОВЖ СВОЄЇ ОСІ, ПРИ ВРАХУВАННІ ЗАТУХАННЯ

Вивчимо вимушені поперечні коливання струни, яка рухається з деякою швидкістю V вздовж своєї осі, при врахуванні затухання, пропорціонального першому степеню швидкості переміщень. Використовуючи принцип Даламбера, рівняння коливань вказаної механічної системи в нерухомій декартовій системі координат XOZ запишемо як

$$\left(\frac{T_0}{\rho F_0}-V^2\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2V\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{dV}{dt}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{\rho F_0}\left[2\alpha_0\frac{dv}{dt}-g(x,t)\right], \quad /\mathrm{I}/$$

де $v=v(x,t)$ – поперечні /вздовж осі OZ / переміщення перерізу струни з абсцисою x в момент часу t ; ρ – об"ємна густина матеріалу струни; F_0 – постійна площа поперечного перерізу струни; T_0 – початковий натяг струни; $g(x,t)$ – проекція на OZ зовнішніх збурюючих сил; $2\alpha_0\frac{dv}{dt}$ – член, який характеризує зовнішнє затухання поперечних коливань, пропорційне першому степеню швидкості переміщень.

Допускаючи, що швидкість руху струни мало змінюється за період коливань і сили затухання малі порівняно з силами пружності, рівняння /I/ для випадку періодичного зовнішнього збурення запишемо у вигляді

$$\alpha(\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta(\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+\gamma(\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\varepsilon f\left(x,\tau,\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\varepsilon Q\cos\varphi, \quad /2/$$

де ε – малий додатний період; $\tau=\varepsilon t$ – "повільний" час; εQ – амплітуда зовнішньої збурючої сили, $\frac{d\varphi}{dt}=\nu(\tau)$ – її миттєва частота. Коефіцієнти $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$, $\gamma(\tau)$ – повільно змінні, причому

$$\alpha(\tau)=c^2-V^2(\tau)=\frac{T_0}{\rho F_0}-V^2(\tau);\ \beta(\tau)=-2V(\tau);\ \gamma(\tau)=-1, \qquad /3/$$

$$\varepsilon f=\frac{dV}{d\tau}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial\alpha_0}{\rho F_0}\left(V(\tau)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\right). \qquad /4/$$

Враховуючи наявність малого параметра, при побудові розв"язку диференціального рівняння /2/ використовуємо асимптотичний метод нелінійної механіки [2], вважаючи при цьому, що функція $v(x,t)$ задовольняє нульові крайові умови

$$v(0,t)=v(\ell,t)=0. \qquad /5/$$

Функцію $v(x,t)$ подаємо у вигляді асимптотичного ряду

$$v(x,t)=a[\varphi_1(x)\cos\theta+\varphi_2(x)\sin\theta]+\varepsilon v_1(x,\tau,a,\theta)+\varepsilon^2 v_2\ldots, \qquad /6/$$

де $\varphi_1(x)\cos\theta+\varphi_2(x)\sin\theta$ – розв"язок відповідної незбуреної $/\varepsilon=0/$ крайової задачі; $\theta=\varphi+\psi=\vartheta(\tau)t+\psi;\ v_1,v_2\ldots$ – невідомі, 2π – періодичні за θ функцією.

Параметри a і ψ у рівності /6/ зв"язані співвідношеннями

$$\begin{cases}\dfrac{da}{dt}=\varepsilon A_1(\tau,a,\psi)+\varepsilon^2 A_2(\tau,a,\psi)+\varepsilon^3\ldots\\ \dfrac{d\psi}{dt}=\omega(\tau)-\vartheta(\tau)+\varepsilon B_1(\tau,a,\psi)+\varepsilon^2 B_2(\tau,a,\psi)+\varepsilon^3\ldots,\end{cases} \qquad /7/$$

де $A_1(\tau,a,\psi),\ A_2(\tau,a,\psi),\ldots,\ B_1(\tau,a,\psi),\ B_2(\tau,a,\psi)$ – невідомі 2π – періодичні за ψ функцією, які необхідно знайти.

Підставляючи /6/, /7/ у /2/ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, одержуємо

$$\begin{cases}\alpha(\tau)\dfrac{d^2\varphi_1}{dx^2}+\beta(\tau)\omega(\tau)\dfrac{d\varphi_2}{dx}-\gamma(\tau)\omega^2(\tau)\varphi_1=0,\\ \alpha(\tau)\dfrac{d^2\varphi_2}{dx^2}+\beta(\tau)\omega(\tau)\dfrac{d\varphi_1}{dx}-\gamma(\tau)\omega^2(\tau)\varphi_2=0,\end{cases} \qquad /8/$$

$$\alpha(\tau)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \beta(\tau)\omega(\tau)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x\partial t} + \gamma(\tau)\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} = \cos(\theta-\psi)Q +$$
$$+ \psi_1(x,\tau,a,\theta) - \Big\{\beta(\tau)\Big(A_1\frac{d\varphi_1}{dx} + aB_1\frac{d\varphi_2}{dx}\Big) + \gamma(\tau)\Big[(\omega-\nu)\varphi_1\frac{\partial A_1}{\partial\psi} +$$
$$+ 2\omega\,(A_1\varphi_2 - aB_1\varphi_1) + a\Big(\frac{d\omega}{d\tau} + (\omega-\nu)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\Big)\varphi_2\Big]\Big\}\cos\theta -$$
$$- \Big\{\beta(\tau)\Big(A_1\frac{d\varphi_2}{dx} - aB_1\frac{d\varphi_1}{dx}\Big) + \gamma(\tau)\Big[(\omega-\nu)\varphi_2\frac{\partial A_1}{\partial\psi} - 2\omega\times \qquad /9/$$
$$\times\,(A_1\varphi_1 + aB_1\varphi_2) - a\Big(\frac{d\omega}{d\tau} + (\omega-\nu)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\Big)\varphi_1\Big]\Big\}\sin\theta;$$

де $\psi_q(\tau,x,a,\theta)$;... коефіцієнти розкладу функції $\varepsilon f\big(x,\tau,\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial t}\big)$ в асимптотичний ряд

$$\varepsilon f = \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 \ldots \qquad /10/$$

Розв"язуючи систему диференціальних рівнянь /8/ з врахуванням крайових умов /5/, знаходимо розв"язок крайової задачі в нульовому наближенні / $\varepsilon = 0$/:

$$\omega_k(\tau) = \frac{\pi k c}{\ell}\,(1 - p^2(\tau)), \qquad /11/$$

$$\varphi_{1k}(x) = \sin\frac{\pi k x}{\ell}\cos\Big[\pi k p(\tau)\Big(1-\frac{x}{\ell}\Big)\Big], \qquad /12/$$

$$\varphi_{2k}(x) = \sin\frac{\pi k x}{\ell}\sin\Big[\pi k p(\tau)\Big(1-\frac{x}{\ell}\Big)\Big], \qquad /13/$$

де $p(\tau) = V(\tau)/c$. Співвідношення /11/-/13/ описують лінійні коливання, близькі до коливань у k -й формі динамічної рівноваги незбуреної системи.

Для побудови диференціальних рівнянь першого наближення розглянемо співвідношення /9/. Використовуючи методику з праці [1], одержуємо систему диференціальних рівнянь для визначення 2π - періодичних за ψ функцій $A_1(\tau,a,\psi)$ і $B_1(\tau,a,\psi)$

$$[\omega(\tau)-\nu(\tau)]\mathcal{P}\frac{\partial A_1}{\partial\psi} + NB_1(\tau,a,\psi) = Q_1(\tau)\cos\psi + Q_2(\tau)\sin\psi, \qquad /14/$$

$$-a[\omega(\tau)-\nu(\tau)]\mathcal{P}\frac{\partial B_1}{\partial\psi_1} + NA_1(\tau,a,\psi) = \Phi(\tau,a) - Q_2(\tau)\cos\psi +$$
$$+ Q_1(\tau)\sin\psi + a\mathcal{P}\frac{d\omega}{d\tau}, \qquad /15/$$

$$\mathcal{P}=-\frac{1}{2},\; N=\pi kc,\; Q_1(\tau)=Q\int_0^{\ell}\varphi_1(x)\,dx,\; Q_2(\tau)=Q\int_0^{\ell}\varphi_2(x)\,dx; \qquad /16/$$

$$\Phi(\tau,a)=\frac{\pi ka}{2}\left(\frac{2\alpha_0}{\rho F_0}-\rho(\tau)\frac{d\nu}{d\tau}\right). \qquad /17/$$

Частинні 2π – періодичні розв"язки цієї системи мають вигляд

$$A_1(\tau,a,\psi)=a\left(\frac{\alpha_0}{\rho F_0}+\frac{\rho(\tau)}{2c}\frac{d\nu}{d\tau}\right)+a_1\sin\psi+a_2\cos\psi, \qquad /18/$$

$$B_1(\tau,a,\psi)=-\frac{1}{a}\left(a_2\sin\psi-a_1\cos\psi\right), \qquad /19/$$

де $a_1=a(\tau)=\frac{\Delta_1(\tau)}{\Delta(\tau)};\quad a_2(\tau)=\frac{\Delta_2(\tau)}{\Delta(\tau)};$ /20/

$$\Delta\tau=\frac{[\omega(\tau)-\nu(\tau)]\mathcal{P}^4}{16}-2N[\omega(\tau)-\nu(\tau)]^2+N^4; \qquad /21/$$

$$\Delta_1(\tau)=Q_1(\tau)\{\omega(\tau)-\nu(\tau))\mathcal{P}[(\omega(\tau)-\nu(\tau))\mathcal{P}^2-(\omega-\nu)N\mathcal{P}-N^2]+N^3\} \qquad /22/$$

$$\Delta_2(\tau)=Q_2(\tau)\{(\omega(\tau)-\nu(\tau))\mathcal{P}[(\omega(\tau)-\nu(\tau))\mathcal{P}^2-(\omega(\tau)-\nu(\tau))N\mathcal{P}-N^2]+N^3\}. \qquad /23/$$

Знайдені явно вирази для $A_1(\tau,a,\psi)$ і $B_1(\tau,a,\psi)$ дають змогу перше наближення розв"язку задачі про вимушені коливання виразити як

$$V_1(x,t)=a\left[\varphi_1(x)\cos\theta+\varphi_2(x)\sin\theta\right], \qquad /24/$$

де параметри a і ψ / $\theta=\varphi+\psi$ / визначають зі системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{da}{dt}=a\left(\frac{\rho(\tau)}{2c}+\frac{\alpha_0}{\rho F_0}\right)+a_1(\tau)\sin\psi+a_2(\tau)\cos\psi,$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\omega(\tau)-\nu(\tau)-\frac{1}{a}\left[a_2(\tau)\sin\psi-a_1(\tau)\cos\psi\right]. \qquad /25/$$

Прийнявши в /25/ $\tau=\tau_0=const,\ \frac{da}{dt}=0$ і $\frac{d\psi}{dt}=0$, одержимо у першому наближенні рівняння резонансної кривої стаціонарного режиму коливань

$$\begin{cases} \dfrac{\vartheta(\tau_0)}{\omega(\tau_0)} = 1 - \dfrac{1}{a\omega(\tau_0)}\left[a_2(\tau)\sin\psi - a_1(\tau)\cos\psi\right], \\ a_1(\tau)\sin\psi + a_2(\tau)\cos\psi = -\dfrac{\alpha_0 a}{\rho F_0} \; . \end{cases} \qquad /26/$$

Після необхідних перетворень згідно з /II/–/I3/, /I6/, /2I/–/23/ отримаємо /нехтуючи величинами $\omega(\tau_0) - \vartheta(\tau_0)$ /:

$$\frac{\vartheta_0}{\omega_0} = 1 \pm \frac{2Q_0 \, l \cos\frac{\pi\rho_0}{2}}{\bar{a}\rho F_0 \pi^3 c^2 (1-\rho_0^2)} \sqrt{1 - \frac{\bar{a}^2 \pi^4 c^2 \alpha_0^2 (1-\rho_0^2)^2}{4Q_0^2 \cos^2 \pi\rho_0/2}}, \qquad /27/$$

де

$$\vartheta_0 = \vartheta(\tau_0); \;\; \omega_0 = \omega(\tau_0); \; \rho_0 = \rho(\tau_0); \;\; \bar{a} = a/l. \qquad /28/$$

Враховуючи /27/, залежність $\bar{a}_{max}(\rho_0)$ запишемо так:

$$a_{max}(\rho_0) = \frac{2Q_0 \cos\frac{\pi\rho_0}{2}}{\pi^2 c \, \alpha_0 (1-\rho_0^2)} \qquad /29/$$

Список літератури: I. Барвінський А.Ф., Дудзяний І.М. Про власні коливання в системах з розподіленими параметрами, що описуються одним нелінійним рівнянням з частинними похідними другого порядку. – Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1981, вип. I7, с.28–33. 2. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – Киев: Вища школа. Изд-во при Киев. ун-те, 1976. – 589 с.

Стаття надійшла до редколегії I4.I2.83