УДК 517.944:947

Марія Д.Мартиненко

ПРО ЗАДАЧУ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У праці [3] методом А.Н.Тихонова [4] доведено існування розв"язку задачі без початкових умов для загальних параболічних систем у припущенні, що гранична поверхня задовольняє певне обмеження вигляду

$$C\iint_S \frac{|\cos\varphi|}{r^2}\,dS < 1, \qquad /1/$$

а коефіцієнт системи та граничних операторів - деякі умови гладкості та узгодженості. Приклади такої поверхні наведено у праці [2], а в праці [1] показано, що обмеження на коефіцієнти рівняння можуть бути послаблені, проте обмеження /1/ на граничну поверхню зняти не вдалося. Наведемо задачу без початкових умов, яка розв"язна без обмеження виду /1/ на граничну поверхню.

В області $\Pi = \{(x_1, x_2, t) : x_1^2 + x_2^2 < R^2, -\infty < t \le T\}$ розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t)\Delta u + b(t)u \qquad /2/$$

і припустимо, що:

1/ $a(t) \ge a_0^2 > 0,\ b(t) \ge b_0^2 > 0 \quad \forall t \in]-\infty, T]$ / a_0, b_0 - сталі/;

2/ $\left|\int_{-\infty}^{t} a(t)dt\right| < +\infty,\ \left|\int_{-\infty}^{t} b(t)dt\right| < +\infty$;

3/ $a(t)$ - монотонна на $]-\infty, T]$.

Нехай функція $f(\varphi, t)$ ($\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$ - полярний кут/ неперервна по φ, неперервно-диференційовна по t, причому

$$|f(\varphi, t)| \le C\exp\left\{\int_{-\infty}^{t} b(t)dt + \beta_0'\right\},$$

де C, β_0' - сталі.

Доведемо, що за цих умов в області Π існує обмежений розв"язок рівняння /2/, який набирає на граничному колі значення $f(\varphi,t)$:

$$u(R\cos\varphi, R\sin\varphi, t) = f(\varphi,t). \qquad /3/$$

За допомогою заміни

$$u(x_1,x_2,t) = v(x_1,x_2,\gamma(t)\exp\beta(t)),$$

де

$$\beta(t) = \int_{-\infty}^{t} b(t)dt + \beta_0; \quad \gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t)dt; \quad \beta_0 < \beta_0',$$

задачу /2/-/3/ зведемо до стандартного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v. \qquad /4/$$

Умова /3/ набере такого вигляду:

$$v(R\cos\varphi, R\sin\varphi, t) = \mathcal{F}(\varphi,t), \qquad /5/$$

де $\mathcal{F}(\varphi,t)$ - неперервна функція.

Позначимо через $\mathcal{F}^*(x_1,x_2,t)$ двічі неперервно-диференційовну /по x_1, x_2 / функцію, неперервно-диференційовну по t в Π, яка на граничному колі $x_1^2+x_2^2=R^2$ збігається з $f(\varphi,t)$. Її можна одержати, наприклад, за допомогою інтегралу Пуассона. Задачу без початкових умов /4/-/5/ заміною

$$v = \mathcal{F}^*(x_1,x_2,t) + v_0$$

зводимо до знаходження функції v_0, що в Π задовольняє рівняння

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = \Delta u + \Phi(x_1,x_2,t), \qquad /6/$$

де $\Phi = \Delta \mathcal{F}$,

а на граничному колі - умову

$$V_0 (R\cos\varphi, R\sin\varphi, t) = 0. \qquad /7/$$

Обмежений у Π розв"язок задачі /6/-/7/ легко виписується за допомогою методу Фур"є [5].

Список літератури: 1. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Задача без початкових умов для рівняння теплопровідності із змінними коефіцієнтами. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1984, вип.20, с.20-21. 2. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д., Бойко Л.Ф. Задача без початкових умов для рівняння теплопровідності. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1982, вип.19, с. 9-11. 3. Мартиненко М.Д., Бойко Л.Ф. О разрешимости задач без начальных условий для параболических по И.Г.Петровскому систем.-Докл. АН СССР, 1978, т.243, № 1, с.30-32. 4. Тихонов А.Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. - Мат. сб., 1935, с.199-216. 5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966. - 724 с.

Стаття надійшла до редколегії 30.05.83

УДК 518:517.948

А.Т.Дудикевич

АПРІОРНІ ОЦІНКИ Й ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ РІЗНИЦЕВОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА У ПРОСТОРІ

Для двомірної задачі Діріхле для рівняння Пуассона одержано [2-4] апріорні оцінки й оцінки швидкості збіжності різницевої задачі. Застосуємо принцип максимуму для знаходження апріор-