де $\Phi = \Delta \mathcal{F}$,

а на граничному колі – умову

$$V_{0}(R\cos\varphi, R\sin\varphi, t) = 0. \qquad /7/$$

Обмежений у Π розв"язок задачі /6/-/7/ легко виписується за допомогою методу Фур"є [5].

Список літератури: I. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д. Задача без початкових умов для рівняння теплопровідності із змінними коефіцієнтами. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1984, вип.20, с.20-21. 2. Мартиненко Марія Д., Мартиненко Михайло Д., Бойко Л.Ф. Задача без початкових умов для рівняння теплопровідності. - Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1982, вип.19, с. 9-II. 3. Мартиненко М.Д., Бойко Л.Ф. О разрешимости задач без начальных условий для параболических по И.Г.Петровскому систем.-Докл. АН СССР, 1978, т.243, № I, с.30-32. 4. Тихонов А.Н. Теоремы единственности для уравнения теплопроводности. - Мат. сб., 1935, с.199-216. 5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966. - 724 с.

Стаття надійшла до редколегії 30.05.83

УДК 518:517.948

А.Т.Дудикевич

АПРІОРНІ ОЦІНКИ Й ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ РІЗНИЦЕВОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА У ПРОСТОРІ

Для двомірної задачі Діріхле для рівняння Пуассона одержано [2-4] апріорні оцінки й оцінки швидкості збіжності різницевої задачі. Застосуємо принцип максимуму для знаходження апріорних оцінок розв"язку різницевої схеми підвищеного порядку [I] й оцінки швидкості збіжності цієї схеми у просторі.

У прямокутному паралелепіпеді $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2, x_3): 0 \le x_\alpha \le \ell_\alpha, \alpha = \overline{1,3}\}$ з межею Γ шукаємо розв"язок задачі Діріхле для рівняння Пуасоона

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{3} L_\alpha u = -f(x), \quad x \in G, \qquad /I/$$

$$u\Big|_\Gamma = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \qquad /2/$$

де $L_\alpha u = \partial^2 u / \partial x_\alpha^2 \; (\alpha = \overline{1,3})$; $f(x)$ і $\varphi(x)$ - задані неперервні функції відповідно в G і Γ; $G = \bar{G}/\Gamma$.

В області $\bar{G}$ на рівномірній сітці $\bar{\omega}_h = \{ih_1, jh_2, kh_3, h = (h_1, h_2, h_3),\ 0 \le i \le n+1,\ 0 \le j \le m+1,\ 0 \le k \le p+1,\ h_1 = \ell_1/(n+1),\ h_2 = \ell_2/(m+1),\ h_3 = \ell_3/(p+1)\}$ розглянемо відповідну різницеву задачу

$$\lambda' y = -g(x), \quad x \in \omega_h, \qquad /3/$$

$$y\Big|_\gamma = \psi(x), \qquad /4/$$

де $\lambda' y = \sum_{\alpha=1}^{3} \Big[\prod_{\beta \ne \alpha}^{1+3} (E - \varkappa_\beta \lambda_\beta)\Big] \lambda_\alpha y$; E - одиничний оператор; $\lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ $(\alpha = \overline{1,3})$ - різницева апроксимація на сітці ω_h оператора L_α; $g = f - \sum_{\alpha=1}^{3} \varkappa_\alpha \lambda_\alpha f$; $\varkappa_\alpha = h_\alpha^2/12 \; (\alpha = \overline{1,3})$; h_1, h_2, h_3 - кроки по координатних напрямках x_1, x_2, x_3; n, m і p - кількість точок розбиття по x_1, x_2, x_3; γ і ω_h - множина граничних і внутрішніх вузлів сітки; $\omega_h = \bar{\omega}_h / \gamma$.

<u>Теорема</u>. Різницева схема /3/-/4/, визначена на двадцятисемиточковому шаблоні, задовольняє умови принципу максимуму тоді і тільки тоді, коли для кроків h_α $(\alpha = \overline{1,3})$ різницевої схеми виконується умова

$$\sum_{\beta \ne \alpha}^{1,3} \frac{h_\alpha^2}{h_\beta^2} \le 5. \qquad /5/$$

У праці [1] на двадцятисемиточковому шаблоні наведена різницева схема четвертого порядку точності, яку запишемо в такому канонічному вигляді:

$$\frac{4}{5}\left[1+5(\alpha+\beta+\gamma)\right]y_{i,j,k}=\frac{1}{60}\Big\{2(20\alpha-5\beta-5\gamma+4)\times$$

$$\times(y_{i+1,j,k}-y_{i-1,j,k})+2(20\beta-5\alpha-5\gamma+4)(y_{i,j+1,k}+$$

$$+y_{i,j-1,k})+2(20\gamma-5\alpha-5\beta+4)(y_{i,j,k+1}+y_{i,j,k-1})+$$

$$+\left[5(\beta+\alpha)-4\right](y_{i+1,j+1,k}+y_{i-1,j+1,k}+y_{i+1,j-1,k}+y_{i-1,j-1,k})+$$

$$+\left[5(\alpha+\gamma)-4\right](y_{i+1,j,k+1}+y_{i+1,j,k-1}+y_{i-1,j,k+1}+y_{i-1,j,k-1})+$$

$$+\left[5(\beta+\gamma)-4\right](y_{i,j+1,k+1}+y_{i,j+1,k-1}+y_{i,j-1,k+1}+y_{i,j-1,k-1})+$$

$$+2(y_{i+1,j+1,k+1}+y_{i+1,j+1,k-1}+y_{i-1,j+1,k+1}+y_{i+1,j-1,k+1}+$$

$$+y_{i-1,j-1,k+1}+y_{i-1,j+1,k-1}+y_{i+1,j-1,k-1}+y_{i-1,j-1,k-1})\Big\}+\bar{g}_{i,j,k},$$

де $y_{0,j,k}=\psi_{0,j,k}$; $y_{n+1,j,k}=\psi_{n+1,j,k}$;

$y_{i,0,k}=\psi_{i,0,k}$; $y_{i,m+1,k}=\psi_{i,m+1,k}$;

$y_{i,j,0}=\psi_{i,j,0}$; $y_{i,j,p+1}=\psi_{i,j,p+1}$;

$$i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};\ k=\overline{1,p};\ \alpha=\frac{1}{h_1^2};\ \beta=\frac{1}{h_2^2};\ \gamma=\frac{1}{h_3^2}. \quad (6)$$

Різницева задача /3/–/4/ є частковим випадком такої більш загальної задачі [3] : знайти визначену на $\bar{\omega}_h$ функцію $y(x)$, яка на ω_h задовольняє рівняння

$$\begin{cases} A(x)\,y(x) = \sum\limits_{\xi\in Ш'(x)} B(x,\xi)\,y(\xi) + F(x),\; x\in\omega_h, \\ y(x) = \psi(x),\; x\in\gamma, \end{cases} \qquad /7/$$

$$A(x)>0,\; B(x,\xi)>0,\; (x,\xi)\in\omega_h,$$

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi\in Ш'(x)} B(x,\xi) \geq 0,\; x\in\omega_h, \qquad /8/$$

де $y(x)$ – розв"язок різницевої задачі; $Ш'(x)$ – множина всіх вузлів розглядуваного шаблону з центром в точці x , крім самого вузла x , тобто $\xi \neq x$; $A(x)$ і $B(x,\xi)$ – задані коефіцієнти рівняння.

Нехай граничні умови /2/ апроксимуються точно. Порівнюючи схему /6/ з /7/, одержуємо

$$A(x) = A(x_i, x_j, x_k) = \begin{cases} \frac{4}{5}\left[1+5(\alpha+\beta+\gamma)\right], & i=\overline{1,n};\; j=\overline{1,m};\; k=\overline{1,p}; \\ 1, & i=0,n+1;\; j=\overline{1,m};\; k=\overline{1,p}; \\ 1, & j=0,m+1;\; i=\overline{1,n};\; k=\overline{1,p}; \\ 1, & k=0,p+1;\; i=\overline{1,n};\; j=\overline{1,m}; \end{cases}$$

$$B(x,\xi) = \frac{1}{30}(20\alpha - 5\beta - 5\gamma + 4) > 0,\; \xi = (x_{i-1}, x_j, x_k),\, (x_{i+1}, x_j, x_k),$$

$$B(x,\xi) = \frac{1}{30}(20\beta - 5\alpha - 5\gamma + 4) > 0,\; \xi = (x_i, x_{j-1}, x_k),\, (x_i, x_{j+1}, x_k),$$

$$B(x,\xi) = \frac{1}{30}(20\gamma - 5\alpha - 5\beta + 4) > 0,\; \xi = (x_i, x_j, x_{k-1}),\, (x_i, x_j, x_{k+1}),$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{60}[5(\alpha+\gamma)-4]>0,\ \xi=(x_{i-1},x_{j-1},x_k),(x_{i+1},x_{j-1},x_k),$$
$$(x_{i-1},x_{j+1},x_k),(x_{i+1},x_{j+1},x_k),$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{60}[5(\beta+\gamma)-4]>0,\ \xi=(x_i,x_{j+1},x_{k-1}),(x_i,x_{j-1},x_{k-1}),$$
$$(x_i,x_{j+1},x_{k+1}),(x_i,x_{j-1},x_{k+1}),$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{60}[5(\beta+\alpha)-4]>0,\ \xi=(x_{i-1},x_j,x_{k-1}),(x_{i+1},x_j,x_{k-1}),$$
$$(x_{i+1},x_j,x_{k-1}),(x_{i+1},x_j,x_{k+1}),$$

$$B(x,\xi)=\frac{1}{30},\ \xi=(x_{i-1},x_{j+1},x_{k-1}),(x_{i+1},x_{j+1},x_{k-1}),$$
$$(x_{i-1},x_{j+1},x_{k+1}),(x_{i+1},x_{j+1},x_{k+1}),$$
$$(x_{i-1},x_{j-1},x_{k-1}),(x_{i+1},x_{j-1},x_{k-1}),$$
$$(x_{i-1},x_{j-1},x_{k+1}),(x_{i+1},x_{j-1},x_{k+1}),$$

$$D(x)=D(x_i,x_j,x_k)=\begin{cases} 0; & i=\overline{2,n-1};\quad j=\overline{2,m-1};\quad k=\overline{2,p-1};\\ \frac{1}{h_1^2}; & i=1,n;\quad j=\overline{1,m};\quad k=\overline{1,p};\\ \frac{1}{h_2^2}; & j=1,m;\quad i=\overline{1,n};\quad k=\overline{1,p};\\ \frac{1}{h_3^2}; & k=1,p;\quad i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,m};\\ 1; & i=0,n+1;\quad j=\overline{1,m};\quad k=\overline{1,p};\\ 1; & j=0,m+1;\quad i=\overline{1,n};\quad k=\overline{1,p};\\ 1; & k=0,p+1;\quad i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,m}. \end{cases}$$

Таким чином, при виконанні умови /5/ коефіцієнти різницевої схеми /6/ задовольняють умови /8/. Область $\bar{\omega}_h$ – зв"язна, тому на основі наслідку з принципу максимуму існує єдиний розв"язок задачі /6/.

Розв"язок неоднорідного рівняння /6/ запишемо у такому вигляді:

$$y_h = y_h^{(1)} + y_h^{(2)},$$

де $y_h^{(1)}$ – розв"язок неоднорідного рівняння /6/ з однорідними умовами; $y_h^{(2)}$ – розв"язок відповідного однорідного рівняння з неоднорідними крайовими умовами. Для розв"язку справедлива оцінка [2]

$$\| y_h^{(2)} \|_{C_h} \leq \| \psi \|_{\gamma}, \qquad /9/$$

де

$$\| y \|_{C_h} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} | y(x) |.$$

Щоб оцінити розв"язок $y_h^{(1)}$ в $\bar{\omega}_h$, будуємо мажорантну функцію

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{\delta_c}{6} \left[\rho_c^2 - \sum_{\alpha=1}^{3} (x_\alpha - c_\alpha)^2 \right],$$

де $\delta_c = \max_{x \in \omega_h} | f(x) |$; ρ_c – радіус сфери; (c_1, c_2, c_3) – центр сфери. Причому область ω_h розташована всередині сфери. Тоді

$$\Delta_h V_h(x) = -\delta_c, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \omega_h;$$

$$V_{0,j,k} = V_{n+1,j,k} = 0, \; j = \overline{1,m}, \; k = \overline{1,p};$$

$$V_{i,0,k} = V_{i,m+1,k} = 0, \; i = \overline{1,n}, \; k = \overline{1,p};$$

$$V_{i,j,0} = V_{i,j,p+1} = 0, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,m}.$$

Використовуючи метод одержання апріорних оцінок [2], для розв"язку задачі /6/ одержуємо оцінку

$$\|y_h\|_{C_h} \leq \frac{\rho_c^2}{6} \|g_h\|_{C_h^{(1)}} + \|\psi\|_{\gamma}, \quad \|g_h\|_{C_h^{(1)}} = \max_{x \in \omega_h} |g(x)|,$$

що означає стійкість різницевої схеми /6/. Таким чином, різницева схема /6/ на рівномірній сітці має четвертий порядок точності, а на кубічній – збігається зі швидкістю $O(h^6)$.

<u>Список літератури:</u> І. Людкевич Й.В., Дудикевич А.Т. Різницеві апроксимації підвищеного порядку для рівняння Пуассона в просторі. – Вестн. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат., 1982, вып. 19, с.3-6. 2. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений. – К.: Вища школа, 1977. – 408 с. 3. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 552 с. 4. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

Стаття надійшла до редколегії 3.01.83

УДК 519.6

Н. І. Пустомельникова

ОПТИМАЛЬНИЙ ЗА ЛОКАЛЬНОЮ ПОХИБКОЮ ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Обгрунтуємо явний, дробово-раціональний чисельний метод другого порядку, на локальну похибку якого не впливає сама структура дробово-раціональної формули методу. Наявність такого впливу може суттєво зменшувати крок інтегрування при реалізації чисельного методу [3, 4].

В основі дослідження чисельного методу другого порядку [1]

$$y_{n+1}^{[2]} = y_n + \frac{hK_1^2}{2K_1 - K_2}, \qquad /1/$$