$$D_2(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z^3}{1+\frac{3}{2}z+\frac{3}{2}z^2+\frac{5}{4}z^3+\frac{3}{4}z^4+\frac{1}{8}z^5}; \qquad /9/$$

2/ відносно модельного рівняння $y'=-\lambda y+\varphi$ ($\varphi=const$, $Re\lambda>0$, $z=\lambda h$) стійкий в правій частині [4];

3/ узгоджений з порядком $S=2$ і другим порядком точності.

Отже, чисельний метод /5/, /2/, /8/ має всі властивості чисельних методів розв"язку жорстких диференціальних рівнянь. Його використання при розв"язку текстових прикладів дало позитивні результати не тільки порівняно з іншими методами такого ж типу, але й з новим методом Ейлера другого порядку.

Список літератури: 1. Боднарчук П.И., Максимив Е.М. Нелинейные многошаговые методы решения дифференциальных уравнений. - В кн.: Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и их приложения. К., 1978, с.9-10. 2. Самарский А.А. Введение в численные методы. - М.: Наука, 1982. - 271 с. 3. Wanbecq A. Nonlinear methods in solving ordinary differential equations.- J. Coup. Appl. Math., 1976, 2, N1, p.27-33. 4. Lambert J.D. Computational Methods in Ordinary Differential Equations.- London-New-York, 1973.- 373 p.

Стаття надійшла до редколегії 12.04.83

УДК 537.533.33

І.І.Ширій

ЗОВНІШНЯ ПРОСТОРОВА ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА У ВИПАДКУ НЕЗАМКНЕНИХ ПОВЕРХОНЬ

Для розв"язування інтегрального рівняння застосуємо метод граничних елементів: густину шукаємо за допомогою фінітних функцій із заданими апріорними особливостями на краю граничної поверхні, а інтегрування ведемо по частині поверхні. Крім того, спростимо задання граничної поверхні, для якої необхідно задати тільки систему вузлів.

Поставлена задача зводиться до розв"язування двомірного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\iint_S \sigma(r)\,\mathcal{K}(r_0, r)\,dS = f(r_0),\quad r_0 \in S,$$
$$\mathcal{K}(r_0, r) = n_0\,(r_0 - r)/|r_0 - r|^{1/2}, \qquad /1/$$

де $\sigma(r)$ – невідома густина; $|r_0 - r|^{1/2}$ – відстань між фіксованою точкою $r_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ простору та довільною точкою $r(x, y, z)$ поверхні, тобто $|r_0 - r|^{1/2} = [(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + (z-\bar{z})^2]^{1/2}$; n_0 – зовнішня нормаль до поверхні S в точці r_0.

Поверхню S можна апроксимувати за допомогою сукупності чотирикутних 4-вузлових, 8-вузлових і 12-вузлових елементів, що відповідає білінійній, біквадратичній або бікубічній зміні форми поверхні [1]. Декартові координати довільної точки криволінійного чотирикутника e_i, на які розбита поверхня S, виражаються через координати вузлових точок і деяких функцій від внутрішніх координат таким чином:

$$x = x_i(\xi, \eta) = \sum_{\ell=1}^{n} N^{\ell}(\xi, \eta)\, x_i^{\ell},$$
$$y = y_i(\xi, \eta) = \sum_{\ell=1}^{n} N^{\ell}(\xi, \eta)\, y_i^{\ell}, \qquad /2/$$
$$z = z_i(\xi, \eta) = \sum_{\ell=1}^{n} N^{\ell}(\xi, \eta)\, z_i^{\ell},$$

де n – кількість вузлових точок елемента e_i; $(x_i^{\ell}, y_i^{\ell}, z_i^{\ell})$ – декартові координати ℓ-ї вузлової точки елемента; $N^{\ell}(\xi, \eta)$ – для кожного конкретного випадку можна вивести. Припустимо далі, що шукана густина з /1/ на кожному з елементів може змінюватись білінійно, біквадратично або бікубічно. Задамо її з особливістю на краю граничної поверхні у вигляді

$$\sigma(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{m} \Phi_j(\xi, \eta)\, \Theta_j(\xi, \eta), \qquad /3/$$

де

$$\mathcal{G}_j(\xi,\eta)=\begin{cases}\sum\limits_{\ell=1}^{n}\mu_j^{\ell}M^{\ell}(\xi,\eta), & \text{якщо } (\xi,\eta)\in e_j,\\ 0\ , & \text{якщо } (\xi,\eta)\notin e_j;\end{cases}$$

m – кількість елементів e_j; $M^{\ell}=(\xi,\eta)=N^{\ell}(\xi,\eta)$, μ_j^{ℓ} – значення функції $\mathcal{G}(\xi,\eta)$ в ℓ -му вузлі елемента e_j; $\mathcal{G}_j(\xi,\eta)$ – функція, що враховує особливість у густині на елементах, які прилягають до краю поверхні.

Таким чином, внаслідок заміни змінних /2/ і задання густини /3/ інтегральне рівняння /1/ набере вигляду

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{\ell=1}^{n}\mu_j^{\ell}\iint_D Q_j(\xi,\eta)M^{\ell}(\xi,\eta)I_j(\xi,\eta)\mathcal{K}_j(\hat{x},\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}_{\hat{x}\in S}=f(\hat{x}),\qquad /4/$$

де

$$\mathcal{K}_j(\hat{x},\xi,\eta)=\frac{[\bar{x}-x_j(\xi,\eta)]\cos(n,\bar{n}_x)+[\bar{y}-y_j(\xi,\eta)]\cos(n,n_{\bar{y}})+[\bar{z}-z_j(\xi,\eta)]\cos(n,n_{\bar{z}})}{\{[\bar{x}-x_j(\xi,\eta)]^2+[\bar{y}-y_j(\xi,\eta)]^2+[\bar{z}-z_j(\xi,\eta)]^2\}^{3/2}},$$

$\hat{x}=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$; $D=[-1,1]\times[-1,1]$ – "стандартний" квадрат зміни параметрів ξ,η; $I_j(\xi,\eta)$ – якобіан переходу. Позначивши P – загальну кількість вузлів на S і вибравши $p\geq P$ точок колокації для визначення невідомих значень густини μ_j^{ℓ} у вузлах елементів e_j, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{\ell=1}^{n}\mu_j^{\ell}\iint_D \theta_j(\xi,\eta)M^{\ell}(\xi,\eta)I_j(\xi,\eta)\mathcal{K}_j(\hat{x},\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}_{\hat{x}=\hat{x}_i}=f(\hat{x}_i),\quad i=1,2,\dots,p.\qquad /5/$$

Враховуючи, що вузол $\hat{x}_i$ може потрапляти в Q_k елементів, де Q_k = 1, 2, 4 залежно від розміщення вузла та ступеня апроксимації, і позначивши густину у вузлі через a_k, систему /5/ можна записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^{P}a_k\left\{\iint_D\sum_{j=1}^{Q_k}\theta_j(\xi,\eta)M^{j}(\xi,\eta)I_j(\xi,\eta)\mathcal{K}_j(\hat{x}_i,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}=f(\hat{x}_i).\qquad /6/$$

Конкретизуємо вигляд функції $Q_j(\xi,\eta)$. Припустимо, що розмір сітки, по вузлах якої апроксимується поверхня, $p\times g$. То-де $m=(p-1)(q-1)$, а $\theta_j(\xi,\eta)$ запишемо як

$$\theta_j(\xi,\eta)=\begin{cases}(1-\xi)^{-n_1}(1+\eta)^{-n_2}, & j=1\\(1+\xi)^{-n_3}(1+\eta)^{-n_2}, & j=(q-1)(p-2)+1\\(1-\xi)^{-n_1}(1-\eta)^{-n_4}, & j=q-1\\(1+\xi)^{-n_3}(1-\eta)^{-n_4}, & j=(q-1)(p-1)\\(1-\xi)^{-n_1}, & j=2,3,\dots,(q-2)\\(1+\xi)^{-n_3}, & j=(q-1)(p-2)+2,\dots,(q-1)(p-1)-1\\(1+\eta)^{-n_2}, & j=(q-1)\cdot k+1,\ k=1,2,\dots,(p-3)\\(1-\eta)^{-n_4}, & j=(q-1)\cdot k,\ \ k=2,3,\dots,(p-2)\\1\end{cases} \quad /7/$$

у внутрішніх елементах сітки; $0\leq n_i<1,\ i=\overline{1,4}$. Особливість у густині виділяють для тих елементів, що є на краю поверхні. Наведемо вигляд відповідних замін змінних для виділення особливості в густині:

$$\begin{aligned}&j=1:\ \xi=1-\lambda^{\frac{1}{1-n_1}},\ \ \eta=\delta^{\frac{1}{1-n_2}}-1,\\&j=(q-1)(p-2)+1:\ \xi=\lambda^{\frac{1}{1-n_3}}-1,\ \ \eta=\delta^{\frac{1}{1-n_2}}-1,\\&j=q-1:\ \xi=1-\lambda^{\frac{1}{1-n_1}},\ \ \eta=1-\delta^{\frac{1}{1-n_4}},\\&j=(q-1)(p-1):\ \xi=\lambda^{\frac{1}{1-n_3}}-1,\ \eta=1-\delta^{\frac{1}{1-n_4}},\\&j=2,3,\dots,(q-2):\ \xi=1-\lambda^{\frac{1}{1-n_1}},\ \eta=\delta,\\&j=(q-1)(p-2)+2,\dots,(q-1)(p-1)-1:\ \xi=\lambda^{\frac{1}{1-n_3}}-1,\ \eta=\delta,\\&j=(q-1)\cdot k+1,\ \ k=1,2,\dots,(p-3):\ \xi=\lambda,\ \eta=\delta^{\frac{1}{1-n_2}}-1,\\&j=(q-1)\cdot k,\ \ k=2,3,\dots,(p-2):\ \xi=\lambda,\ \eta=1-\delta^{\frac{1}{1-n_4}},\end{aligned} \quad /8/$$

$\xi=\lambda,\ \eta=\delta$ у внутрішніх елементах сітки.

Розглянемо коефіцієнти матриці /6/. Якщо точка колокації $\hat{x}_i \in e_i$, то ядро $\mathcal{K}_j(\hat{x},\xi,\eta)$ матиме особливість, яку виділяємо. Введемо для цього такі позначення:

$$M^i = M^i(\xi,\eta);\ \bar{M}^i = M^i(\bar{\xi},\bar{\eta});\ I_k = I_k(\xi,\eta);\ \bar{I}_k = I_k(\bar{\xi},\bar{\eta}),\ i=1,\dots,4;$$

$$F_H(\hat{x}_k,\xi,\eta) = \{Q(\xi-\bar{\xi})^2 + P(\xi-\bar{\xi})(\eta-\bar{\eta}) + N(\eta-\bar{\eta})^2\}/\{A^2(\xi-\bar{\xi})^2 + 2B(\xi-\bar{\xi})(\eta-\bar{\eta}) + C^2(\eta-\bar{\eta})^2\}^{3/2};\ \hat{x}_k = r_H(\bar{\xi},\bar{\eta}), \text{ якщо } \hat{x}_k \in e_H;$$

$$Q = n_0 r'_{H_{\xi\xi}};\ P = 2n_0 r'_{H_\xi} r'_{H_\eta};\ N = n_0 r'_{H_{\eta\eta}};\ A = |r'_{H_\xi}|;\ C = |r'_{H_\eta}|;$$

$$B = r'_{H_\xi} r'_{H_\eta}.\qquad \delta_{H,K} = \begin{cases} 1, & \hat{x}_K \in e_H \\ 0 & \hat{x}_K \notin e_H \end{cases}.$$

До кожного доданку підінтегральної функції рівняння системи /6/ додамо і віднімемо величину, а саме, значення густини і якобіана переходу в точці $\hat{x}_K$, помножене на $F_H(\hat{x}_K,\xi,\eta)$. Тоді систему /6/ запишемо у вигляді

$$\sum_{K=1}^{P} a_K \sum_{j=1}^{Q_K} \iint_D \left[M^j I_j \mathcal{K}_j(\hat{x}_H,\xi,\eta) - \delta_{j,K} \bar{M}^j \bar{I}_j F_j(\hat{x}_K,\xi,\eta)\right] d\xi\, d\eta + a_K \sum_{j=1}^{Q_K} \iint_D \delta_{j,K} \bar{M}^j \bar{I}_j F_j(\hat{x}_K,\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = f(\hat{x}_K). \qquad /9/$$

У /9/ перший інтеграл особливості в ядрі не має, а другий обчислюється аналітично. Провівши в першому інтегралі з формули /9/ заміну змінних /8/, отримаємо систему рівнянь з виділеними особливостями в ядрі та густині.

Визначивши невідомі a_K із перетвореної системи /9/, розв"язок інтегрального рівняння /1/ у будь-якій точці простору $\hat{z} \in R^3$ шукаємо за формулою

$$u(\hat{z}) = \sum_{K=1}^{P} a_K \iint_D \sum_{j=1}^{Q_K} q(\xi,\eta) M^j(\xi,\eta) I_j(\xi,\eta) \bar{\mathcal{K}}_j(\hat{z},\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta, \qquad /10/$$

$$\bar{\mathcal{K}}_j(\hat{z},\xi,\eta) = \{[\bar{x}_1 - x_j(\xi,\eta)]^2 + [\bar{y}_1 - y_j(\xi,\eta)]^2 + [\bar{z}_1 - z_j(\xi,\eta)]^2\}^{-1/2},\ \hat{z} = (\bar{x}_1,\bar{y}_1,\bar{z}_1).$$

Список літератури: І. Л а ш а Ж.К., У о т с о н Дж.О. Усовершенствованная программа для решения трехмерных задач теории упругости методом граничных интегральных уравнений. - В кн.: Метод граничных интегральных уравнений. М.: Мир, 1978, с. III-128. 2. Л ю д к е в и ч И.В., Ш и р и й И.И. Решение задачи Неймана для уравнения Лапласа на незамкнутых поверхностях методом интегральных уравнений. - Львов, 1983. - 10 с. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 1182 Ук-Д83. 3. Л ю д к е в и ч И.В., Ш и р и й И.И. Численное решение граничных задач теории потенциала для многосвязных областей. - Теорет. электротехника, 1982, вып. 33, с.12-16.

Стаття надійшла до редколегії 16.02.84

УДК 518.517.948

В.А.Бакалець, В.А.Пучка

КОМПЛЕКС ПРОГРАМ РОЗРАХУНКУ СКЛАДНИХ ЕЛЕКТРОННО-ОПТИЧНИХ СИСТЕМ

Основне завдання сучасного програмного продукту, орієнтованого на задачі математичної фізики, забезпечення точності й економічності обчислень [2]. Досягнути цієї мети можна за рахунок розробки ефективних алгоритмів, проведення детального модульного аналізу, вибору економних схем обчислення, а також організації інтерактивної взаємодії з прикладною програмою. Виходячи з цього, розроблено комплекс програм розрахунку потенціалу, напруженостей еквіпотенціальних ліній електростатичного поля, що створюються розімкнутими просторовими конфігураціями. Вибраний клас поверхонь - це найбільш вживані елементи електронно-оптичних систем /ЕОС/: нескінченно тонкі смужки, пластинки й оболонки, які можуть мати довільні вирізи.

Як відомо [3], просторову задачу розрахунку ЕОС можна звести до двомірного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, для розв"язування якого використовують методику виділення